ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 1ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 1ος

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

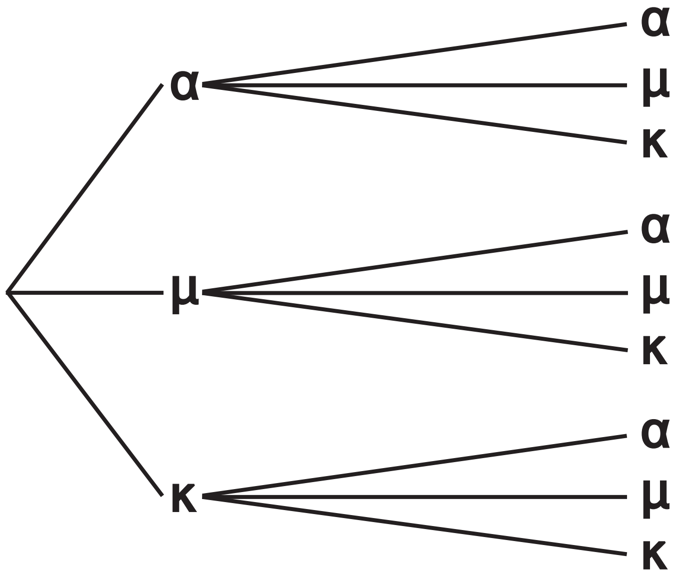
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§1.1. Δειγματικός χώρος – Ενδεχόμενα
Α΄ΟΜΑΔΑΣ

1. Έστω α, μ, κ τα αποτελέσματα η μπάλα να είναι άσπρη, μαύρη και κόκκινη αντιστοίχως. Έχουμε:

i) 1η εξαγωγή — 2η εξαγωγή — Αποτέλεσμα



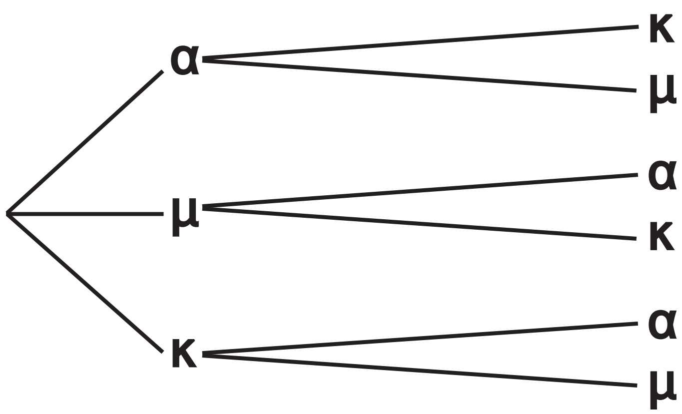
(α, α)
(α, μ)
(α, κ)
(μ, α)
(μ, μ)
(μ, κ)
(κ, α)
(κ, μ)
(κ, κ)

Ω = {(α, α), (α, μ), (α, κ), (μ, α), (μ, μ), (μ, κ), (κ, α), (κ, μ), (κ, κ)}

ii) {(κ, α), (κ, μ), (κ, κ)}

iii) {(α, α), (μ, μ), (κ, κ)}.

2. i) 1η εξαγωγή — 2η εξαγωγή — Αποτέλεσμα



(α, μ)
(α, κ)
(μ, α)
(μ, κ)
(κ, α)
(κ, μ)

Ω = {(α, μ), (α, κ), (μ, α), (μ, κ), (κ, α), (κ, μ)}

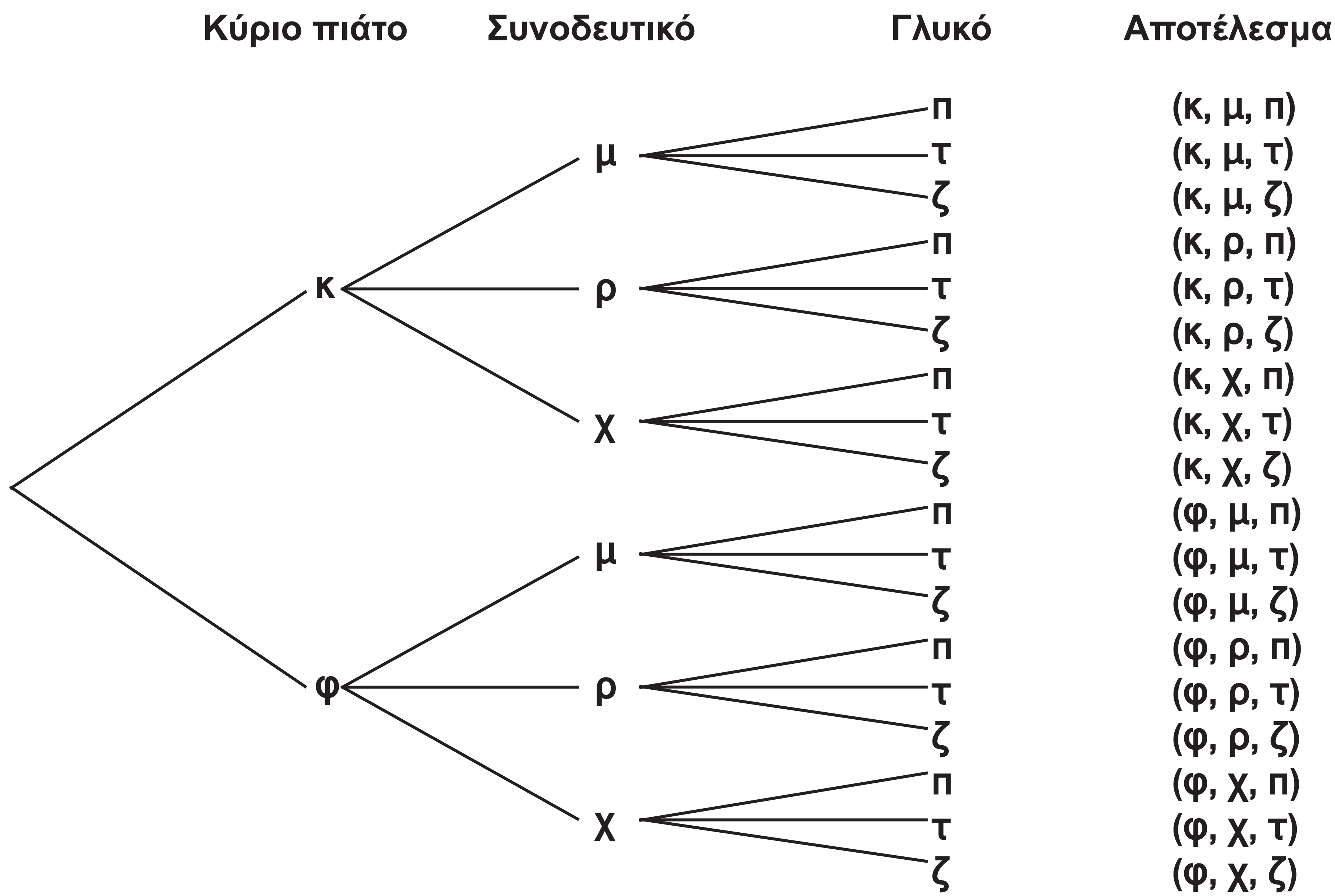
ii) {(κ, α), (κ, μ)}

iii) Ø.

3. i) Ω = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αυτοκίνητο), (Μακεδονία, τρένο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

ii) Α = {(Κύπρος, αεροπλάνο), (Μακεδονία, αεροπλάνο)}.

4. i) Αν συμβολίσουμε καθεμία από τις επιλογές με το αρχικό της γράμμα, έχουμε το παρακάτω δεντροδιάγραμμα:


Κύριο πιάτο
Συνοδευτικό
Γλυκό
Αποτέλεσμα
κ
φ
μ
ρ
χ
μ
ρ
χ
π
τ
ζ
π
τ
ζ
π
τ
ζ
π
τ
ζ
π
τ
ζ
π
τ
ζ
(κ, μ, π)
(κ, μ, τ)
(κ, μ, ζ)
(κ, ρ, π)
(κ, ρ, τ)
(κ, ρ, ζ)
(κ, χ, π)
(κ, χ, τ)
(κ, χ, ζ)
(φ, μ, π)
(φ, μ, τ)
(φ, μ, ζ)
(φ, ρ, π)
(φ, ρ, τ)
(φ, ρ, ζ)
(φ, χ, π)
(φ, χ, τ)
(φ, χ, ζ)

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία τις 18 τριάδες της στήλης "αποτέλεσμα" αποτελεί το δειγματικό χώρο του πειράματος:

ii) $A = \{(κ, μ, π), (κ, ρ, π), (κ, χ, π), (φ, μ, π), (φ, ρ, π), (φ, χ, π)\}$

iii) $B = \{(κ, μ, π), (κ, μ, τ), (κ, μ, ζ), (κ, ρ, π), (κ, ρ, π), (κ, ρ, ζ), (κ, χ, π), (κ, χ, τ), (κ, χ, ζ)\}$

iv) $A \cap B = \{(κ, μ, π), (κ, ρ, π), (κ, χ, π)\}$

v) $Γ = \{(κ, ρ, π), (κ, ρ, τ), (κ, ρ, ζ), (φ, ρ, π), (φ, ρ, τ), (φ, ρ, ζ)\}$ $(A \cap B) \cap Γ = \{(κ, ρ, π)\}$.

5. i) $Ω = \{(0, α), (0, β), (0, γ), (0, δ), (1, α), (1, β), (1, γ), (1, δ)\}$

ii) $A = \{(0, γ), (0, δ)\}$

iii) $B = \{(0, α), (0, β), (1, α), (1, β)\}$

iv) $Γ = \{(1, α), (1, β), (1, γ), (1, δ)\}$.

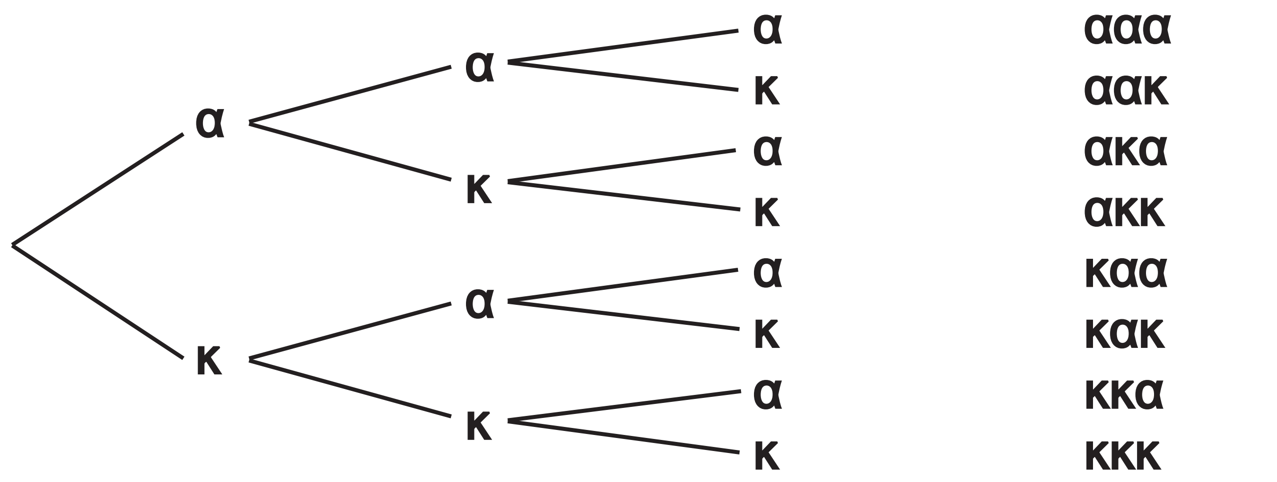
6.i) $A = \{3\}$, $B = \{2, 4, 6\}$, $A \cap B = \varnothing$, **άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.**

ii) Επειδή υπάρχουν και Έλληνες καθολικοί, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$, **δηλαδή τα A και B δεν είναι ασυμβίβαστα.**

iii) Επειδή υπάρχουν γυναίκες άνω των 30, που να είναι 30 χρόνια παντρεμένες, αυτό σημαίνει ότι $A \cap B \neq \varnothing$.

iv) $A \cap B = \varnothing$, **άρα τα A και B είναι ασυμβίβαστα.**

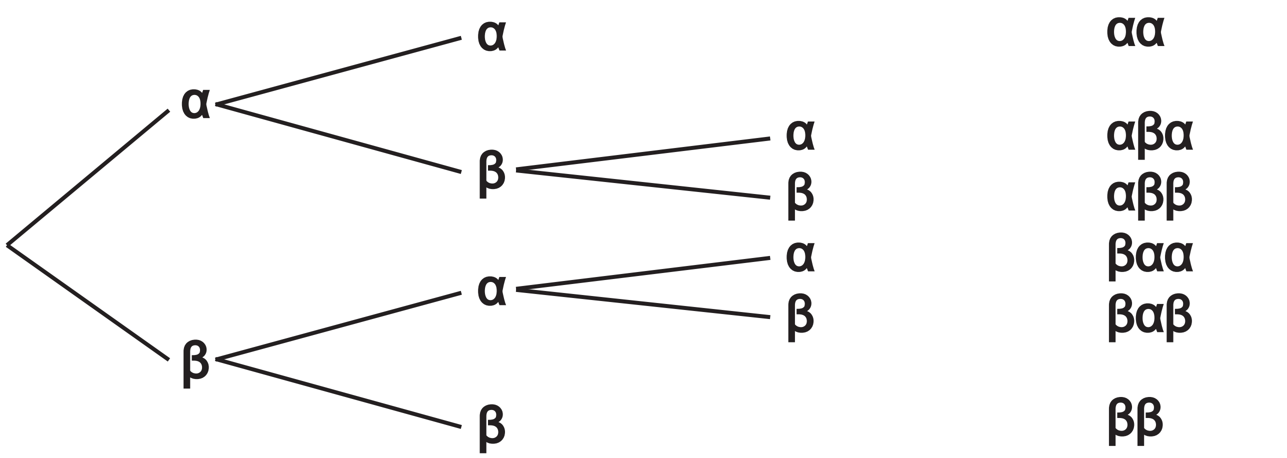
7. 1ο παιδί 2ο παιδί 3ο παιδί Αποτέλεσμα



Ω = {ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ}.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. 1ο παιχνίδι 2ο παιχνίδι 3ο παιχνίδι Αποτέλεσμα



Ω = {αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ}.

2. Τα αποτελέσματα της ρίψης δύο ζαριών φαίνονται στον παρακάτω πίνακα διπλής εισόδου.

1η ρίψη \ 2η ρίψη	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

Άρα

$A = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$.

$B = \{(1, 1), (1, 3), (1, 5), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 1), (3, 3), (3, 5), (4, 2), (4, 4), (4, 6), (5, 1), (5, 3), (5, 5), (6, 2), (6, 4), (6, 6)\}$.

$\Gamma = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (3, 1), (4, 1)\}$.

$A \cap B = \{(3, 1), (4, 2), (5, 1), (5, 3), (6, 2), (6, 4)\}$.

$A \cap \Gamma = \{(2, 1), (3, 1), (4, 1)\}$.

$(A \cap B) \cap \Gamma = \{(3, 1)\}$.

§ 1.2. Έννοια της πιθανότητας
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η τράπουλα έχει 4 πεντάρια και επομένως η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{4}{52}=\frac{1}{13}$.

ii) Το ενδεχόμενο είναι το αντίθετο του ενδεχομένου του προηγούμενου ερωτήματος. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $1-\frac{4}{52}=\frac{48}{52}=\frac{12}{13}$.

2. Αν Γ το αποτέλεσμα “γράμματα” και Κ το αποτέλεσμα “κεφαλή”, ο δειγματικός χώρος του πειράματος είναι $\Omega=\{ΚΓ, ΓΚ, ΚΚ, ΓΓ\}$ και υπάρχει μια ευνοϊκή περίπτωση, η ΓΓ. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{1}{4}$.

3. Το κουτί έχει συνολικά $10+15+5+10=40$ μπάλες.

i) Οι μαύρες μπάλες είναι 15. Άρα η πιθανότητα να είναι η μπάλα μαύρη $\frac{15}{40}$.

ii) Υπάρχουν 10 άσπρες και 15 μαύρες μπάλες. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40}=\frac{25}{40}$.

iii) Το να μην είναι η μπάλα ούτε κόκκινη ούτε πράσινη, σημαίνει ότι μπορεί να είναι άσπρη ή μαύρη. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι ίση με $\frac{10+15}{40}=\frac{25}{40}$.

4. Η τάξη έχει συνολικά
$4 + 11 + 9 + 3 + 2 + 1 = 30$ μαθητές. Για να έχει η οικογένεια ενός μαθητή 3 παιδιά, πρέπει ο μαθητής αυτός να έχει δηλώσει ότι έχει 2 αδέλφια. Επειδή 9 μαθητές δήλωσαν ότι έχουν 2 αδέλφια, η ζητούμενη πιθανότητα είναι $\frac{9}{30}$.

5. Έχουμε $\Omega = \{10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$, $A = \{12, 15, 18\}$ και $B = \{12, 16, 20\}$. Επομένως

i) $P(A) = \frac{3}{11}$.

ii) Έχουμε $P(B) = \frac{3}{11}$, άρα $P(B') = 1 - \frac{3}{11} = \frac{8}{11}$.

6. Αν Λ, Π και Ν είναι τα ενδεχόμενα να κερδίσουν ο Λευτέρης, ο Παύλος και ο Νίκος αντιστοίχως, τότε

$P(\Lambda) = \frac{30}{100}$, $P(\Pi) = \frac{20}{100}$ και $P(N) = \frac{40}{100}$.

Επειδή τα ενδεχόμενα είναι ασυμβίβαστα έχουμε:

i) $P(\Lambda \cup \Pi) = P(\Lambda) + P(\Pi) = \frac{30}{100} + \frac{20}{100} = \frac{50}{100}$,
δηλαδή **50%**.

ii) $P(\Lambda \cup N)' = 1 - P(\Lambda \cup N) = 1 - P(\Lambda) - P(N) =$

$$= 1 - \frac{30}{100} - \frac{40}{100} = \frac{30}{100}$$, δηλαδή **30%**.

7. Έχουμε διαδοχικά $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

$$\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-P(A\cap B)=\frac{2}{3}$$

$$P(A\cap B)=\frac{17}{30}+\frac{7}{15}-\frac{2}{3}=\frac{17}{30}+\frac{14}{30}-\frac{20}{30}=\mathbf{\frac{11}{30}}.$$

8. Έχουμε διαδοχικά $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

$$\frac{1}{2}+P(B)-\frac{1}{3}=\frac{5}{6}$$

$$P(B)=\frac{5}{6}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}=\frac{5}{6}+\frac{2}{6}-\frac{3}{6}=\frac{4}{6}=\mathbf{\frac{2}{3}}.$$

9. Έχουμε διαδοχικά $P(A)+P(B)-P(A\cap B)=P(A\cup B)$

$$2P(A)-0{,}2=0{,}6$$

$$2P(A)=0{,}8$$

$$\mathbf{P(A)=0{,}4}.$$

10. Έχουμε διαδοχικά $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$$=\frac{1}{2}+\left(1-\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{12}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{12}=\frac{6}{12}+\frac{4}{12}-\frac{1}{12}=\frac{9}{12}=\mathbf{\frac{3}{4}}.$$

11. Έχουμε $P(A\cup B)\le P(A)+P(B)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow P(A)+P(B)-P(A\cap B)\le P(A)+P(B)\Leftrightarrow 0\le P(A\cap B)$

που ισχύει.

12. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει κάρτα D και B το ενδεχόμενο να έχει κάρτα V.

Έχουμε $P(A) = \frac{25}{100}$, $P(B) = \frac{55}{100}$, $P(A \cap B) = \frac{15}{100}$.

Επομένως $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

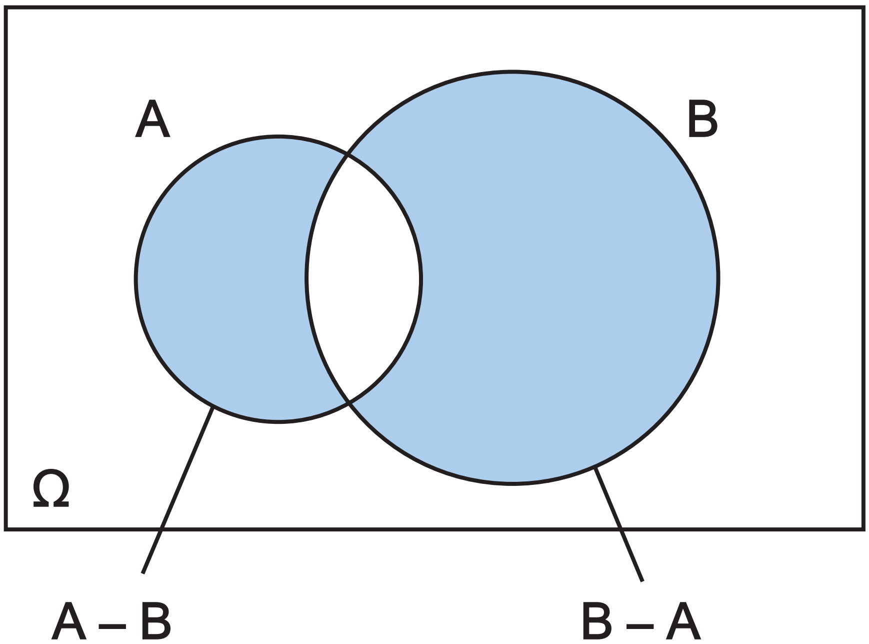
$= \frac{25}{100} + \frac{55}{100} - \frac{15}{100} = \frac{65}{100}$, δηλαδή **65%.**

13. Έστω A το ενδεχόμενο να έχει υπέρταση και B το ενδεχόμενο να έχει στεφανιαία νόσο. Έχουμε

$P(A) = \frac{10}{100}$, $P(B) = \frac{6}{100}$ και $P(A \cap B) = \frac{2}{100}$.

α) Έχουμε $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) =$

$= \frac{10}{100} + \frac{6}{100} - \frac{2}{100} = \frac{14}{100}$, δηλαδή **14%.**



β) Το ενδεχόμενο να έχει το άτομο μόνο μια ασθένεια είναι το $(A-B)\cup(B-A)$. Τα ενδεχόμενα $(A-B)$ και $(B-A)$ είναι ασυμβίβαστα. Επομένως

$$P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=$$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)+2P(A\cap B)=\frac{10}{100}+\frac{6}{100}-\frac{4}{100}=\frac{12}{100},$$

δηλαδή **12%**.

14. Έστω Α το ενδεχόμενο να μαθαίνει αγγλικά και Β το ενδεχόμενο να μαθαίνει γαλλικά.

Έχουμε $P(A)=\frac{80}{100}$, $P(B)=\frac{30}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{20}{100}$.

Άρα $P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=$

$$=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)=1-\frac{80}{100}-\frac{30}{100}+\frac{20}{100}=\frac{10}{100},$$

δηλαδή **10%**.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\mathbf{\kappa+\lambda-\mu}$

ii) $P\big((A\cup B)'\big)=1-P(A\cup B)=\mathbf{1-\kappa-\lambda+\mu}$

iii) $P\big((A-B)\cup(B-A)\big)=P(A-B)+P(B-A)=$

$$=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$

$$=P(A)+P(B)-2P(A\cap B)=\mathbf{\kappa+\lambda-2\mu}.$$

2. Αν Α και Β τα ενδεχόμενα να μην έχει ένα νοικοκυριό τηλεόραση και Βίντεο αντιστοίχως, θα είναι $P(A)=\frac{15}{100}$ και $P(B)=\frac{40}{100}$ και $P(A\cap B)=\frac{10}{100}$.

Επομένως η ζητούμενη πιθανότητα θα είναι:

$$P\left((A\cup B)'\right)=1-P(A\cup B)=1-[P(A)+P(B)-P(A\cap B)]=$$

$$=1-\left(\frac{15}{100}+\frac{40}{100}-\frac{10}{100}\right)=1-\frac{45}{100}=\frac{55}{100}$$, δηλαδή **55%.**

3. Έχουμε διαδοχικά $\frac{P(A)}{P(A')}=\frac{3}{4}$

$$\frac{P(A)}{1-P(A)}=\frac{3}{4}$$

$$4P(A)=3-3P(A)$$
$$7P(A)=3,$$

$$P(A)=\frac{3}{7},\ P(A')=1-P(A)=\frac{4}{7}.$$

4. Αν $P(A)=x$, τότε $P(A')=1-x$, όπου $0<x<1$. Έχουμε

$$\frac{1}{P(A)}+\frac{1}{P(A')}\geq 4\Leftrightarrow\frac{1}{x}+\frac{1}{1-x}\geq 4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1-x+x\geq 4x(1-x)\Leftrightarrow 1-x+x\geq 4x-4x^2\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4x^2-4x+1\geq 0\Leftrightarrow(2x-1)^2\geq 0$$ που ισχύει.

5. • Έχουμε
$$A \cap B \subseteq A$$
$$P(A \cap B) \le P(A)$$
$$P(A \cap B) \le 0{,}6 \qquad (1)$$
• Έχουμε
$$P(A \cup B) \le 1$$
$$P(A) + P(B) - P(A \cap B) \le 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - P(A \cap B) \le 1$$
$$0{,}6 + 0{,}7 - 1 \le P(A \cap B)$$
$$0{,}3 \le P(A \cap B) \qquad (2)$$
από τις (1) και (2) προκύπτει ότι:
$$0{,}3 \le P(A \cap B) \le 0{,}6.$$

6. $P(B) - P(A') \le P(A \cap B) \Leftrightarrow P(B) - 1 + P(A) \le P(A \cap B) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(B) + P(A) - P(A \cap B) \le 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(A \cup B) \le 1$ που ισχύει.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2
ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

§ 2.1. Οι πράξεις και οι ιδιότητές τους
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε

i) $A = \dfrac{(xy^3)^4}{(x^2y^3)^2} : \left(\dfrac{y^{-1}}{x^3}\right)^3 = \dfrac{x^4y^{12}}{x^4y^6} \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^6 \cdot \dfrac{x^9}{y^{-3}} = y^9 \cdot x^9 = (xy)^9$

ii) Για $x = 2010$ και $y = \dfrac{1}{2010}$ έχουμε $x\,y = 1$ οπότε

$A = 1^9 = 1.$

2. Έχουμε $A = \left[\left(\dfrac{x}{y}\right)^2 : \dfrac{1}{x^3y^7}\right]^2 = \left[\dfrac{x^2}{y^2} \cdot x^3y^7\right]^2 = \left(x^5 \cdot y^5\right)^2 = (xy)^{10}$

Για $x = 0{,}4$ και $y = -2{,}5$ είναι $xy = -1$ οπότε $A = (-1)^{10} = 1.$

3. i) $1001^2 - 999^2 = (1001 - 999)(1001 + 999) = 2 \cdot 2000 =$
$= 4.000.$

ii) $99 \cdot 101 = (100 - 1)(100 + 1) = 100^2 - 1 = 10000 - 1 =$
$= 9.999.$

iii) $\dfrac{(7{,}23)^2 - (4{,}23)^2}{11{,}46} = \dfrac{(7{,}23 + 4{,}23)(7{,}23 - 4{,}23)}{11{,}46} = \dfrac{11{,}46 \cdot 3}{11{,}46} = 3$

4. i) Έχουμε

$$(\alpha+\beta)^2-(\alpha-\beta)^2=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)=$$
$$=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2-\alpha^2+2\alpha\beta-\beta^2=4\alpha\beta$$

ii) Σύμφωνα με το ερώτημα (i):

$$\left(\frac{999}{1000}+\frac{1000}{999}\right)^2-\left(\frac{999}{1000}-\frac{1000}{999}\right)^2=4\frac{999}{1000}\cdot\frac{1000}{999}=4$$

5. i) Έχουμε

$$\alpha^2-(\alpha-1)(\alpha+1)=\alpha^2-(\alpha^2-1)=\alpha^2-\alpha^2+1=1$$

ii) Αν εφαρμόσουμε το ερώτημα (i) για $\alpha = 1{,}3265$ η τιμή που προκύπτει για την παράσταση είναι 1.

6. Έστω ν και $\nu + 1$ δύο διαδοχικοί φυσικοί αριθμοί:
Τότε έχουμε

$$(\nu+1)^2-\nu^2=(\nu+1-\nu)(\nu+1+\nu)=(\nu+1)+\nu$$

7. Ισχύει $2^\nu+2^{\nu+1}+2^{\nu+2}=2^\nu(1+2+2^2)=2^\nu\cdot 7$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν παραγοντοποιήσουμε αριθμητή και παρονομαστή
Έχουμε

i) $$\frac{\alpha^3-2\alpha^2+\alpha}{\alpha^2-\alpha}=\frac{\alpha(\alpha^2-2\alpha+1)}{\alpha(\alpha-1)}=\frac{(\alpha-1)^2}{\alpha-1}=\alpha-1$$

ii) $$\frac{\alpha^2-\alpha+2\alpha-2}{\alpha^2-1}=\frac{\alpha(\alpha-1)+2(\alpha-1)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}=\frac{\alpha+2}{\alpha+1}$$

2. Έχουμε

i) $$\left(\alpha-\frac{1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^3+\alpha^2}{(\alpha+1)^3}=\left(\frac{\alpha^2-1}{\alpha}\right)^2\cdot\frac{\alpha^2(\alpha+1)}{(\alpha+1)^3}=$$

$$=\frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}{\alpha^2}\cdot\frac{\alpha^2}{(\alpha+1)^2}=(\alpha-1)^2$$

ii) $$\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{\alpha^2-1}{\alpha^3-1}=\frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha+1}\cdot\frac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)}=1$$

3. Έχουμε

i) $$(x+y)^2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)^{-2}=(x+y)^2\left(\frac{y+x}{xy}\right)^{-2}=(x+y)^2\left(\frac{xy}{x+y}\right)^2=$$

$$=(xy)^2=x^2y^2$$

ii) $$\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{x^{-1}-y^{-1}}{x^{-2}-y^{-2}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}=$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)}{\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)}=$$

$$=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{1}{\frac{y+x}{xy}}=\frac{x+y}{x-y}\cdot\frac{xy}{x+y}=\frac{xy}{x-y}$$

4. Έχουμε $\left(\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}\right):\left(\frac{x^2}{x-y}-y\right)=$

$$=\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{(x-y)(x+y)}:\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}=$$

$$=\frac{x^2-xy+y^2}{x-y}\cdot\frac{x-y}{x^2-xy+y^2}=1$$

5.i) **α΄ τρόπος:** Με γενίκευση της ιδιότητας 1iv) των αναλογιών (βλ. εφαρμογή 1, σελ. Α, 78 / 49 - 50) έχουμε

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\alpha+\beta+\gamma}{\beta+\gamma+\alpha}=1,$$

οπότε $\alpha=\beta=\gamma$.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\beta}{\gamma}=\frac{\gamma}{\alpha}=k$, οπότε έχουμε

$$\alpha=k\beta,\ \beta=k\gamma \text{ και } \gamma=k\alpha$$

Αν, τώρα, προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), βρίσκουμε

$$\alpha+\beta+\gamma=k(\alpha+\beta+\gamma)$$

οπότε έχουμε $k=1$ (αφού $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, διότι τα α, β, γ είναι μήκη πλευρών τριγώνου).

Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

γ΄ τρόπος: Η συγκεκριμένη άσκηση μπορεί να αποδειχθεί, μετά τη διδασκαλία της § 1.3, ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε κατά μέλη τις ισότητες (1), οπότε έχουμε $\alpha\beta\gamma=k^3(\alpha\beta\gamma)$ και, επειδή $\alpha\beta\gamma\neq 0$, θα είναι $k^3=1$ και άρα $k=1$. Έτσι, από τις ισότητες (1) προκύπτει ότι $\alpha=\beta=\gamma$.

Σχόλιο: Ο συγκεκριμένος τρόπος μπορεί να εφαρμοσθεί και όταν τα α, β, γ είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί του μηδενός, ενώ για τους δύο πρώτους τρόπους απαιτείται στην περίπτωση αυτή να αποδειχτεί ότι $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$.

ii) **α΄ τρόπος:** Έχουμε $\alpha-\beta=\beta-\gamma$ (1) και $\alpha-\beta=\gamma-\alpha$ (2), οπότε, αν προσθέτουμε κατά μέλη τις ισότητες (1) και (2) προκύπτει ότι

$$2\alpha-2\beta=\beta-\alpha \Rightarrow 3\alpha=3\beta \Rightarrow \alpha=\beta$$

Έτσι, από την ισότητα (1) βρίσκουμε ότι και $\beta=\gamma$. Άρα $\alpha=\beta=\gamma$ οπότε το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

β΄ τρόπος: Θέτουμε $\alpha-\beta=\beta-\gamma=\gamma-\alpha=k$, οπότε έχουμε $\alpha-\beta=k$, $\beta-\gamma=k$ και $\gamma-\alpha=k$ (2)
Αν τώρα προσθέσουμε κατά μέλη τις ισότητες (2), βρίσκουμε ότι $k=0$, οπότε, λόγω των ισοτήτων αυτών, είναι $\alpha=\beta=\gamma$ και άρα το τρίγωνο είναι ισόπλευρο.

6. Αν x και y είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου, τότε θα ισχύει $L=2x+2y$ και $E=xy$ οπότε, λόγω της υπόθεσης, θα έχουμε $2x+2y=4\alpha$ και $xy=\alpha^2$ και άρα
$y=2\alpha-x$ (1) και $xy=\alpha^2$ (2)
Λόγω της (1), η (2) γράφεται ισοδύναμα:

$$x(2\alpha-x)=\alpha^2 \Leftrightarrow 2\alpha x-x^2=\alpha^2 \Leftrightarrow x^2-2\alpha x+\alpha^2=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2=0 \Leftrightarrow x-\alpha=0 \Leftrightarrow x=\alpha$$

Έτσι από την (1) έχουμε ότι και $y=\alpha$ και άρα το ορθογώνιο είναι τετράγωνο.

7. Θα εργασθούμε με τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο.
i) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha+\beta=\gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι $\beta=\gamma-\alpha \in \mathbb{Q}$ (ως διαφορά ρητών), που είναι άτοπο.
ii) Ας υποθέσουμε ότι $\alpha\beta=\gamma \in \mathbb{Q}$. Τότε θα είναι

$$\beta=\frac{\gamma}{\alpha} \in \mathbb{Q}$$ (ως πηλίκο ρητών), που είναι άτοπο.

§ 2.2. Διάταξη πραγματικών αριθμών

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι $\alpha^2+9\geq 6\alpha \Leftrightarrow \alpha^2-6\alpha+9\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-3)^2\geq 0$ που ισχύει.

ii) Είναι $2(\alpha^2+\beta^2)\geq(\alpha+\beta)^2 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2\geq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\alpha^2+2\beta^2-\alpha^2-\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

2. Έχουμε $\alpha^2+\beta^2-2\alpha+1\geq 0 \Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha+1+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-1)^2+\beta^2\geq 0$ που ισχύει.

Η ισότητα ισχύει για $\alpha = 1$ και $\beta = 0$.

3. i) Ισχύει $(x-2)^2+(y+1)^2=0 \Leftrightarrow x-2=0$ και $y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=2$ και $y=-1$.

ii) Έχουμε $x^2+y^2-2x+4y+5=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2+4y+4=0 \Leftrightarrow (x-1)^2+(y+2)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-1=0$ και $y+2=0 \Leftrightarrow x=1$ και $y=-2$.

4. i) Προσθέτουμε κατά μέλη τις ανισότητες $4{,}5<x<4{,}6$ και $5{,}3<y<5{,}4$ οπότε έχουμε $4{,}5+5{,}3<x+y<4{,}6+5{,}4$ δηλαδή $9{,}8<x+y<10$.

ii) Από τη δεύτερη ανισότητα προκύπτει $-5{,}4<-y<-5{,}3$ και προσθέτουμε κατά μέλη με την $4{,}5<x<4{,}6$ οπότε έχουμε

$4{,}5-5{,}4<x-y<4{,}6-5{,}3 \Leftrightarrow -0{,}9<x-y<-0{,}7$.

iii) Ισχύει $5{,}3<y<5{,}4$ οπότε

$$\frac{1}{5{,}3}>\frac{1}{y}>\frac{1}{5{,}4} \Leftrightarrow \frac{1}{5{,}4}<\frac{1}{y}<\frac{1}{5{,}3}$$

και άρα $4{,}5\cdot\frac{1}{5{,}4}<x\cdot\frac{1}{y}<4{,}6\cdot\frac{1}{5{,}3} \Leftrightarrow \frac{45}{54}<\frac{x}{y}<\frac{46}{53}$

iv) Επειδή τα μέλη των ανισοτήτων είναι θετικοί αριθμοί μπορούμε να υψώσουμε στο τετράγωνο, οπότε έχουμε

$(4{,}5)^2 < x^2 < (4{,}6)^2 \Leftrightarrow 20{,}25 < x^2 < 21{,}16$ και

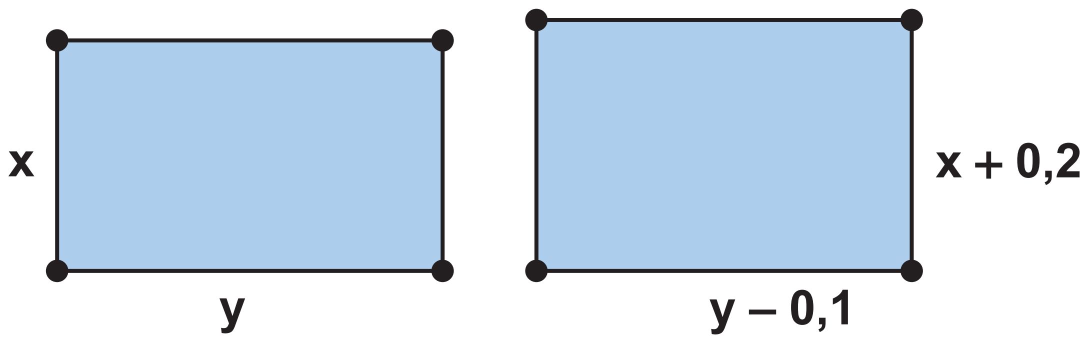
$(5{,}3)^2 < y^2 < (5{,}4)^2 \Leftrightarrow 28{,}09 < y^2 < 29{,}16$

προσθέτουμε κατά μέλη οπότε

$20{,}25 + 28{,}09 < x^2 + y^2 < 21{,}16 + 29{,}16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 48{,}34 < x^2 + y^2 < 50{,}32.$

5.



Για το x έχουμε:

$2 + 0{,}2 < x + 0{,}2 < 3 + 0{,}2 \Leftrightarrow 2{,}2 < x + 0{,}2 < 3{,}2$, (1)

Για το y έχουμε:

$3 - 0{,}1 < y - 0{,}1 < 5 - 0{,}1 \Leftrightarrow 2{,}9 < y - 0{,}1 < 4{,}9$, (2)

i) Η περίμετρος τότε γίνεται

$\Pi = 2(x + 0{,}2) + 2(y - 0{,}1) = 2(x + y + 0{,}1)$

Προσθέτοντας τις (1) και (2) έχουμε $5{,}1 < x + y + 0{,}1 < 8{,}1$ οπότε

$2 \cdot 5{,}1 < 2(x + y + 0{,}1) < 2 \cdot 8{,}1 \Leftrightarrow 10{,}2 < \Pi < 16{,}2.$

ii) Το εμβαδόν του ορθογωνίου γίνεται

$$E = (x + 0{,}2)(y - 0{,}1)$$

Πολλαπλασιάζουμε τις (1) και (2) κατά μέλη οπότε έχουμε

$2{,}2 \cdot 2{,}9 < (x + 0{,}2)(y - 0{,}1) < 3{,}2 \cdot 4{,}9 \Leftrightarrow 6{,}38 < E < 15{,}68.$

6. Επειδή $(1+\alpha)(1+\beta)>0$ έχουμε

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}<\frac{\beta}{1+\beta}\Leftrightarrow\frac{\alpha}{1+\alpha}(1+\alpha)(1+\beta)<\frac{\beta}{1+\beta}(1+\alpha)(1+\beta)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\alpha(1+\beta)<\beta(1+\alpha)\Leftrightarrow\alpha+\alpha\beta<\beta+\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha<\beta$, που ισχύει.

7. Ισχύει $5-x<0$ οπότε κατά την απλοποίησή του η ανισότητα αλλάζει φορά. Έτσι το σωστό είναι
$x(5-x)>(5+x)(5-x)\Leftrightarrow x<5+x\Leftrightarrow 0<5$, που ισχύει.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Επειδή οι α, β, γ είναι θετικοί, έχουμε

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}>\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow(\alpha+\gamma)\beta>\alpha(\beta+\gamma)\Leftrightarrow\alpha\beta+\beta\gamma>\alpha\beta+\alpha\gamma\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\beta\gamma>\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta>\alpha\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}<1$, που ισχύει.

ii) Ομοίως

$$\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}<\frac{\alpha}{\beta}\Leftrightarrow(\alpha+\gamma)\beta<\alpha(\beta+\gamma)\Leftrightarrow\alpha\beta+\beta\gamma<\alpha\beta+\alpha\gamma\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\beta\gamma<\alpha\gamma\Leftrightarrow\beta<\alpha\Leftrightarrow\dfrac{\alpha}{\beta}>1$, που ισχύει.

2. Ισχύει $\alpha+\beta>1+\alpha\beta\Leftrightarrow\alpha+\beta-\alpha\beta-1>0\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow\alpha(1-\beta)-(1-\beta)>0\Leftrightarrow(\alpha-1)(1-\beta)>0$, που ισχύει, αφού $\alpha>1$ και $\beta<1$.

3. Έχουμε τις ισοδυναμίες

$$(\alpha+\beta)\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)\geq 4\Leftrightarrow(\alpha+\beta)\left(\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}\right)\geq 4\Leftrightarrow(\alpha+\beta)^2\geq 4\alpha\beta\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta\geq 0\Leftrightarrow(\alpha-\beta)^2\geq 0$, που ισχύει.

4. i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2+2\alpha\beta+2\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha+\beta)^2+\alpha^2+\beta^2\geq 0,$
που ισχύει.

ii) $\alpha^2-\alpha\beta+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow 2\alpha^2-2\alpha\beta+2\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\alpha^2+\beta^2\geq 0 \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2+\alpha^2+\beta^2\geq 0,$
που ισχύει.

§ 2.3. Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $|\pi-3|=\pi-3$, αφού $\pi>3$.

ii) $|\pi-4|=4-\pi$, αφού $\pi<4$.

iii) $|3-\pi|+|4-\pi|=\pi-3+4-\pi=1.$

iv) $\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|-\left|\sqrt{3}-\sqrt{2}\right|=\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)-\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)=0$

2. Είναι $|x-3|=x-3$, αφού $x>3$ και $|x-4|=4-x$, αφού $x<4$ οπότε $|x-3|+|x-4|=x-3+4-x=1.$

3. i) Αν $x<3$, τότε ισχύει και $x<4$, οπότε $x-3<0$ και $4-x>0$. Άρα είναι
$$|x-3|-|4-x|=(3-x)-(4-x)=3-x-4+x=-1.$$

ii) Αν $x>4$, τότε είναι και $x>3$, οπότε $x-4>0$ και $x-3>0$.
Άρα έχουμε $|x-3|-|4-x|=x-3+(4-x)=1.$

4. Είναι $\dfrac{|\alpha-\beta|}{|\beta-\alpha|}=\dfrac{|\beta-\alpha|}{|\beta-\alpha|}=1.$

5. • Αν $x>0$ και $y>0$, τότε $A=\frac{x}{x}+\frac{y}{y}=1+1=2$

• Αν $x>0$ και $y<0$, τότε $A=\frac{x}{x}-\frac{y}{y}=1-1=0$

• Αν $x<0$ και $y<0$, τότε $A=\frac{-x}{x}-\frac{y}{y}=-1-1=-2$

• Αν $x<0$ και $y>0$, τότε $A=\frac{-x}{x}+\frac{y}{y}=-1+1=0$.

6. i) Ισχύει $d(2{,}37,D)\le 0{,}005$ (1)

ii) Ισχύει (1) $\Leftrightarrow |2{,}37-D|\le 0{,}005 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2{,}37-0{,}005\le D\le 2{,}37+0{,}005 \Leftrightarrow 2{,}365\le D\le 2{,}375$.

7.

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\lvert x-4\rvert\le 2$	$d(x,4)\le 2$	$[2,\ 6]$
$\lvert x+3\rvert<4$	$d(x,-3)<4$	$(-7,\ 1)$
$\lvert x-4\rvert>2$	$d(x,4)>2$	$(-\infty,2)\cup(6,+\infty)$
$\lvert x+3\rvert\ge 4$	$d(x,-3)\ge 4$	$(-\infty,-7]\cup[1,+\infty)$

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x-5\|<1$	$d(x,5)<1$	$(4, 6)$
$\|x+1\|>2$	$d(x,-1)>2$	$(-\infty,-3)\cup(1,+\infty)$
$\|x-5\|\geq 1$	$d(x,5)\geq 1$	$(-\infty,4]\cup[6,+\infty)$
$\|x+1\|\leq 2$	$d(x,-1)\leq 2$	$[-3, 1]$

Απόλυτη τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$\|x\|<2$	$d(x,0)<2$	$(-2, 2)$
$\|x+2\|\leq 3$	$d(x,-2)\leq 3$	$[-5, 1]$
$\|x\|\geq 2$	$d(x,0)\geq 2$	$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$
$\|x+2\|>3$	$d(x,-2)>3$	$(-\infty,-5)\cup(1,+\infty)$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Με τη βοήθεια της τριγωνικής ανισότητας έχουμε

$$|\alpha-\beta|=|(\alpha-\gamma)+(\gamma-\beta)|\leq|\alpha-\gamma|+|\gamma-\beta|.$$

2. Αν $\alpha>\beta$ τότε $\alpha-\beta>0$ και άρα $|\alpha-\beta|=\alpha-\beta$ οπότε έχουμε:

i) $$\frac{\alpha+\beta+|\alpha-\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta+\alpha-\beta}{2}=\frac{2\alpha}{2}=\alpha$$

και

ii) $$\frac{\alpha+\beta-|\alpha-\beta|}{2}=\frac{\alpha+\beta-\alpha+\beta}{2}=\frac{2\beta}{2}=\beta.$$

3. Επειδή $|x| \geq 0$ και $|y| \geq 0$, έχουμε: $|x|+|y| \geq 0$

Για να ισχύει η ισότητα πρέπει $|x|=0$ και $|y|=0$, δηλαδή $x=0$ και $y=0$.

Διαφορετικά ισχύει η ανισότητα. Επομένως:

i) $|x|+|y|=0 \Leftrightarrow x=0$ και $y=0$.

ii) $|x|+|y|>0 \Leftrightarrow x \neq 0$ ή $y \neq 0$.

4. i) Από $0<\alpha<\beta$ προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{\beta}<1$ και $\frac{\beta}{\alpha}>1$.

Είναι δηλαδή $\frac{\alpha}{\beta}<1<\frac{\beta}{\alpha}$.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $\left|1-\frac{\alpha}{\beta}\right|<\left|1-\frac{\beta}{\alpha}\right|$ ή, ισοδύναμα,

ότι $1-\frac{\alpha}{\beta}<\frac{\beta}{\alpha}-1$.

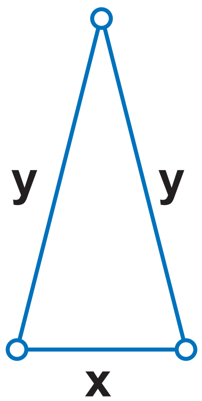
Επειδή $\alpha\beta>0$ η ανισότητα αυτή γράφεται ισοδύναμα

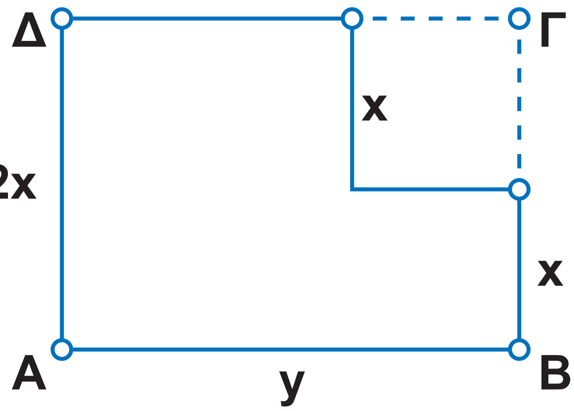
$$\alpha\beta-\frac{\alpha}{\beta}\cdot\alpha\beta<\frac{\beta}{\alpha}\alpha\beta-\alpha\beta \Leftrightarrow \alpha\beta-\alpha^2<\beta^2-\alpha\beta \Leftrightarrow$$

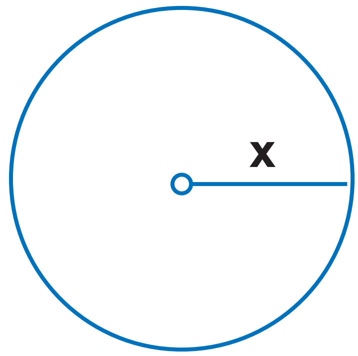
$$\Leftrightarrow 0<\beta^2+\alpha^2-2\alpha\beta \Leftrightarrow (\alpha-\beta)^2>0,$$ που ισχύει αφού $\alpha \neq \beta$.

5. Είναι $|x-2|<0{,}1 \Leftrightarrow 1{,}9<x<2{,}1$ (1)

και $|y-4|<0{,}2 \Leftrightarrow 3{,}8<y<4{,}2$ (2)







i) Η περίμετρος P_1 του τριγώνου είναι $P_1 = x + 2y$. Από την ανισότητα (2) προκύπτει ότι

$$7{,}6<2y<8{,}4 \qquad (3)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3), έχουμε:
$1{,}9+7{,}6<x+2y<2{,}1+8{,}4 \Leftrightarrow 9{,}5<P_1<10{,}5$.

ii) Η περίμετρος P_2 του σχήματος είναι ίση με την περίμετρο του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, οπότε είναι $P_2 = 4x + 2y$. Από την ανισότητα (1) προκύπτει ότι

$$7{,}6 < 4x < 8{,}4 \qquad (4)$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (4) και (3), έχουμε:

$7{,}6+7{,}6<4x+2y<8{,}4+8{,}4 \Leftrightarrow 15{,}2<P_2<16{,}8$.

iii) Η περίμετρος L του κύκλου είναι $L = 2\pi x$. Από την (1) προκύπτει

$2\pi\cdot 1{,}9<2\pi x<2\pi\cdot 2{,}1 \Leftrightarrow 3{,}8\pi<L<4{,}2\pi$.

§ 2.4. Ρίζες πραγματικών αριθμών

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\sqrt{100}=10$, $\sqrt[3]{1000}=\sqrt[3]{10^3}=10$, $\sqrt[4]{10000}=\sqrt[4]{10^4}=10$,

$\sqrt[5]{100000}=\sqrt[5]{10^5}=10$.

ii) $\sqrt{4}=\sqrt{2^2}=2$, $\sqrt[3]{8}=\sqrt[3]{2^3}=2$, $\sqrt[4]{16}=\sqrt[4]{2^4}=2$,

$\sqrt[5]{32}=\sqrt[5]{2^5}=2$.

iii) $\sqrt{0,01}=\sqrt{\dfrac{1}{100}}=\dfrac{1}{10}$, $\sqrt[3]{0,001}=\sqrt[3]{\dfrac{1}{1000}}=\dfrac{1}{10}$,

$\sqrt[4]{0,0001}=\sqrt[4]{\dfrac{1}{10000}}=\dfrac{1}{10}$, $\sqrt[5]{0,00001}=\sqrt[5]{\dfrac{1}{100000}}=\dfrac{1}{10}$.

2. i) $\sqrt{(\pi-4)^2}=|\pi-4|=4-\pi$.

ii) $\sqrt{(-20)^2}=|-20|=20$.

iii) $\sqrt{(x-1)^2}=|x-1|$.

iv) $\sqrt{\dfrac{x^2}{4}}=\dfrac{|x|}{2}$.

3. Έχουμε

$$\sqrt{\left(2-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(3-\sqrt{5}\right)^2}=\left|2-\sqrt{5}\right|+\left|3-\sqrt{5}\right|=$$

$$=\sqrt{5}-2+3-\sqrt{5}=1\cdot$$

4. $\left(\sqrt{x-5}-\sqrt{x+3}\right)\left(\sqrt{x-5}+\sqrt{x+3}\right)=\left(\sqrt{x-5}\right)^2-\left(\sqrt{x+3}\right)^2=$

$=(x-5)-(x+3)=x-5-x-3=-8,$

με την προϋπόθεση ότι $x-5\geq 0$ και $x+3\geq 0$, δηλαδή για $x\geq 5$.

5.i) $\left(\sqrt{8}-\sqrt{18}\right)\left(\sqrt{50}+\sqrt{72}-\sqrt{32}\right)=$

$=\left(\sqrt{2\cdot 4}-\sqrt{2\cdot 9}\right)\left(\sqrt{2\cdot 25}+\sqrt{2\cdot 36}-\sqrt{2\cdot 16}\right)=$

$=\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{2}\right)\left(5\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{2}\right)=\left(-\sqrt{2}\right)\left(7\sqrt{2}\right)=$

$=-7\left(\sqrt{2}\right)^2=-14.$

ii) $\left(\sqrt{28}+\sqrt{7}+\sqrt{32}\right)\left(\sqrt{63}-\sqrt{32}\right)=$

$=\left(\sqrt{4\cdot 7}+\sqrt{7}+\sqrt{2\cdot 16}\right)\left(\sqrt{7\cdot 9}-\sqrt{2\cdot 16}\right)=$

$=\left(2\sqrt{7}+\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)=$

$=\left(3\sqrt{7}+4\sqrt{2}\right)\left(3\sqrt{7}-4\sqrt{2}\right)=\left(3\sqrt{7}\right)^2-\left(4\sqrt{2}\right)^2=$

$=9\cdot 7-16\cdot 2=63-32=31.$

6.i) $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2-\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2+\sqrt{2}}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2-\sqrt{2}\right)\left(2+\sqrt{2}\right)}=$

$=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=2.$

ii) $\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt[3]{3-\sqrt{5}}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}=$

$=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{3^2-\left(\sqrt{5}\right)^2}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{9-5}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}=\sqrt[3]{2\cdot 4}=\sqrt[3]{8}=2.$

7.i) 1ος τρόπος:

$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt{\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=\sqrt[12]{2^4}=\sqrt[3]{2}.$

2ος τρόπος:

$\sqrt{\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt{\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt{\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}}=$

$=\sqrt{\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{2^{\frac{2}{3}}}=\left(2^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$

ii) 1ος τρόπος:

$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^3\cdot 2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{\sqrt[3]{2^4}}}=$

$=\sqrt[5]{2\sqrt[6]{2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^6\cdot 2^4}}=\sqrt[5]{\sqrt[6]{2^{10}}}=\sqrt[30]{2^{10}}=\sqrt[3]{2}.$

ii) 2ος τρόπος:

$\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2\cdot 2^{\frac{1}{3}}}}=\sqrt[5]{2\sqrt{2^{\frac{4}{3}}}}=\sqrt[5]{2\cdot\left(2^{\frac{4}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}=$

$=\sqrt[5]{2\cdot 2^{\frac{2}{3}}}=\sqrt[5]{2^{\frac{5}{3}}}=\left(2^{\frac{5}{3}}\right)^{\frac{1}{5}}=2^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{2}.$

8. i) $\sqrt[4]{3^3}\cdot\sqrt[3]{3}=3^{\frac{3}{4}}\cdot 3^{\frac{1}{3}}=3^{\frac{3}{4}+\frac{1}{3}}=3^{\frac{9}{12}+\frac{4}{12}}=3^{\frac{13}{12}}=3\cdot 3^{\frac{1}{12}}=3\sqrt[12]{3}.$

ii) $\sqrt[9]{2^8}\cdot\sqrt[6]{2^5}=2^{\frac{8}{9}}\cdot 2^{\frac{5}{6}}=2^{\frac{8}{9}+\frac{5}{6}}=2^{\frac{16}{18}+\frac{15}{18}}=2^{\frac{31}{18}}=2\cdot 2^{\frac{13}{18}}=2\sqrt[18]{2^{13}}.$

iii) $\sqrt{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[6]{5^4}=5^{\frac{3}{2}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}\cdot 5^{\frac{4}{6}}=5^{\frac{3}{2}+\frac{1}{3}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{9}{6}+\frac{2}{6}+\frac{4}{6}}=5^{\frac{15}{6}}=5^{\frac{5}{2}}=$

$=\sqrt{5^5}=5^2\cdot\sqrt{5}=25\sqrt{5}.$

9. i) $\dfrac{25\cdot\sqrt{12}}{\sqrt{75}}=\dfrac{25\cdot\sqrt{4\cdot 3}}{\sqrt{25\cdot 3}}=\dfrac{25\cdot 2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}}=10.$

ii) Με ανάλυση του 216 σε πρώτους παράγοντες βρίσκουμε $216=2^3\cdot 3^3$ οπότε έχουμε

$$\frac{\sqrt{216}\cdot\sqrt{75}}{\sqrt{50}}=\frac{\sqrt{2^3\cdot 3^3}\cdot\sqrt{25\cdot 3}}{\sqrt{2\cdot 25}}=\frac{5\sqrt{2^3\cdot 3^4}}{5\sqrt{2}}$$

$$=\sqrt{\frac{2^3\cdot 3^4}{2}}=\sqrt{2^2\cdot 3^4}=2\cdot 3^2=18.$$

10. Αν πολλαπλασιάσουμε κάθε κλάσμα με τη συζυγή παράσταση του παρονομαστή του έχουμε:

i) $$\frac{4}{5-\sqrt{3}}=\frac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{\left(5-\sqrt{3}\right)\left(5+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{25-3}=\frac{4\left(5+\sqrt{3}\right)}{22}=$$

$$=\frac{10+2\sqrt{3}}{11}$$

ii) $$\frac{8}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{8\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right)}{7-5}=4\left(\sqrt{7}+\sqrt{5}\right).$$

iii) $$\frac{\sqrt{7}+\sqrt{6}}{\sqrt{7}-\sqrt{6}}=\frac{\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)}{7-6}=\left(\sqrt{7}+\sqrt{6}\right)^2=$$

$$=7+6+2\sqrt{42}=13+2\sqrt{42}.$$

11.i) Αν αναλύσουμε τους 162 και 98 σε γινόμενο πρώτων παραγόντων βρίσκουμε $162 = 2 \cdot 3^4$ και $98 = 2 \cdot 7^2$ οπότε είναι

$$\frac{\sqrt{162}+\sqrt{98}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} = \frac{\sqrt{2\cdot 3^4}+\sqrt{2\cdot 7^2}}{\sqrt{2\cdot 25}-\sqrt{2\cdot 16}} = \frac{9\sqrt{2}+7\sqrt{2}}{5\sqrt{2}-4\sqrt{2}} = \frac{16\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 16$$

ii) Είναι $9^{12}+3^{20} = 9^{12}+(3^2)^{10} = 9^{12}+9^{10} =$

$= 9^{10}\cdot(9^2+1) = 82\cdot 9^{10}$

και $9^{11}+27^6 = 9^{11}+(3\cdot 9)^6 = 9^{11}+3^6\cdot 9^6 = 9^{11}+(3^2)^3\cdot 9^6 =$

$= 9^{11}+9^9 = 9^9(9^2+1) = 82\cdot 9^9$

οπότε έχουμε $\sqrt{\dfrac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}} = \sqrt{\dfrac{82\cdot 9^{10}}{82\cdot 9^9}} = \sqrt{9} = 3.$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.i) $\dfrac{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \dfrac{\left(3\sqrt{3}-2\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)} =$

$= \dfrac{9+3\sqrt{6}-2\sqrt{6}-4}{3-2} = 5+\sqrt{6}.$

ii) $\dfrac{\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}} = \dfrac{\left(\alpha\sqrt{\alpha}-\beta\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)}{\left(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta}\right)\left(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}\right)} =$

$= \dfrac{\alpha^2+\alpha\sqrt{\alpha\beta}-\beta\sqrt{\alpha\beta}-\beta^2}{\alpha-\beta} = \dfrac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)+\sqrt{\alpha\beta}(\alpha-\beta)}{\alpha-\beta} =$

$= \alpha+\beta+\sqrt{\alpha\beta}.$

I_a_algevra_lisis_a_1-62_18b_v1.indd 37 5/27/17 12:48 AM

2. i) Αξιοποιώντας γνωστές ταυτότητες έχουμε:

$$\left(3+2\sqrt{7}\right)^2=9+4\cdot 7+12\sqrt{7}=37+12\sqrt{7} \text{ και}$$

$$\left(3-2\sqrt{7}\right)^2=9+4\cdot 7-12\sqrt{7}=37-12\sqrt{7}.$$

ii) Με τη βοήθεια του ερωτήματος (i) παίρνουμε

$$\sqrt{37+12\sqrt{7}}-\sqrt{37-12\sqrt{7}}=\sqrt{\left(3+2\sqrt{7}\right)^2}-\sqrt{\left(3-2\sqrt{7}\right)^2}=$$

$$=\left|3+2\sqrt{7}\right|-\left|3-2\sqrt{7}\right|=3+2\sqrt{7}-\left(2\sqrt{7}-3\right)=6.$$

3. i) Είναι $\left(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{3}}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\right)^2+2\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt{\frac{3}{2}}=$

$$=\frac{2}{3}+\frac{3}{2}+2=\frac{4}{6}+\frac{9}{6}+\frac{12}{6}=\frac{25}{6}$$

που είναι ρητός αριθμός.

ii) Είναι $\left(\sqrt{\alpha}+\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2=\left(\sqrt{\alpha}\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\right)^2+2\sqrt{\alpha}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha}}=$

$$=\alpha+\frac{1}{\alpha}+2=\frac{\alpha^2+1+2\alpha}{\alpha}=\frac{(\alpha+1)^2}{\alpha}$$

που είναι ρητός αριθμός.

4. i) Μετατρέποντας τους παρονομαστές σε ρητούς έχουμε

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)}{5-3}+\frac{\sqrt{5}\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)}{5-3}=$$

$$=\frac{\sqrt{3}\sqrt{5}+3+5-\sqrt{5}\sqrt{3}}{2}=\frac{8}{2}=4.$$

ii) Είναι

- $\left(2-\sqrt{3}\right)^2=4-4\sqrt{3}+3=7-4\sqrt{3}$ και
- $\left(2+\sqrt{3}\right)^2=4+4\sqrt{3}+3=7+4\sqrt{3}$ οπότε

Έχουμε

$$\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^2}-\frac{1}{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\frac{1}{7-4\sqrt{3}}-\frac{1}{7+4\sqrt{3}}=$$

$$=\frac{7+4\sqrt{3}}{49-48}-\frac{7-4\sqrt{3}}{49-48}=7+4\sqrt{3}-7+4\sqrt{3}=8\sqrt{3}.$$

I_a_algevra_lisis_a_1-62_18b_v1.indd 39 5/27/17 12:48 AM

5. i) Από το πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε

$B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = \alpha + \beta$, οπότε $B\Gamma = \sqrt{\alpha+\beta}$.

ii) Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα ισχύει

$B\Gamma < AB + A\Gamma$ που σημαίνει ότι

$\sqrt{\alpha+\beta} < \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$.

iii) Υψώνουμε στο τετράγωνο και έχουμε

$$\sqrt{\alpha+\beta} \le \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta} \Leftrightarrow \left(\sqrt{\alpha+\beta}\right)^2 \le \left(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}\right)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha+\beta \le \alpha+\beta+2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} \Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{\alpha\beta} \Leftrightarrow 0 \le 2\sqrt{\alpha\beta},$$

που ισχύει.

Το "=" ισχύει αν και μόνο αν $\alpha = 0$ ή $\beta = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

§ 3.1. Εξισώσεις 1ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $4x-3(2x-1)=7x-42 \Leftrightarrow 4x-6x+3=7x-42 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 4x-6x-7x=-42-3 \Leftrightarrow -9x=-45 \Leftrightarrow x=5.$
Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=5$.

ii) $$\frac{1-4x}{5}-\frac{x+1}{4}=\frac{x-4}{20}+\frac{5}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 20\frac{1-4x}{5}-20\frac{x+1}{4}=20\frac{x-4}{20}+20\frac{5}{4} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(1-4x)-5(x+1)=x-4+25 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4-16x-5x-5=x+21 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow -21x-x=21+1 \Leftrightarrow -22x=22 \Leftrightarrow x=-1.$$
Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=-1$.

iii) $$\frac{x}{2}-\frac{x}{3}=\frac{x}{4}-\frac{x}{5}-\frac{49}{60} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 60\cdot\frac{x}{2}-60\cdot\frac{x}{3}=60\cdot\frac{x}{4}-60\cdot\frac{x}{5}-60\cdot\frac{49}{60} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 30x-20x=15x-12x-49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 30x-20x-15x+12x=-49 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 7x=-49 \Leftrightarrow x=-7.$$
Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=-7$.

iv) $1{,}2(x+1)-2{,}5+1{,}5x=8{,}6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12(x+1)-25+15x=86 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 12x+12-25+15x=86 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 27x=99 \Leftrightarrow x=\dfrac{99}{27}=\dfrac{11}{3}$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=\dfrac{11}{3}$.

2. i) $2(3x-1)-3(2x-1)=4 \Leftrightarrow 6x-2-6x+3=4 \Leftrightarrow 0x=3$.
Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) $2x-\dfrac{5-x}{3}=-\dfrac{5}{3}+\dfrac{7x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3\cdot 2x-3\cdot\dfrac{5-x}{3}=3\cdot\left(\dfrac{-5}{3}\right)+3\cdot\dfrac{7x}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-5+x=-5+7x \Leftrightarrow 0x=0$.
Άρα, η εξίσωση είναι ταυτότητα.

3. i) • Αν $\lambda-1\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$x=\dfrac{\lambda-1}{\lambda-1}=1$.

• Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

ii) • Αν $\lambda-2\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 2$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$x=\dfrac{\lambda}{\lambda-2}$.

• Αν $\lambda=2$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=2$ και είναι αδύνατη.

iii) $\lambda(\lambda-1)x=\lambda-1$

• Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda-1}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{1}{\lambda}.$$

• Αν $\lambda=0$ η εξίσωση γίνεται $0x=-1$ και είναι αδύνατη.

• Αν $\lambda=1$ η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

iv) $\lambda(\lambda-1)x=\lambda^2+\lambda \Leftrightarrow \lambda(\lambda-1)x=\lambda(\lambda+1)$.

• Αν $\lambda(\lambda-1)\neq 0 \Leftrightarrow \lambda\neq 0$ και $\lambda\neq 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{\lambda(\lambda+1)}{\lambda(\lambda-1)}=\frac{\lambda+1}{\lambda-1}.$$

• Αν $\lambda=0$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

• Αν $\lambda=1$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=2$ και είναι αδύνατη.

4. Έστω $AM=x$, τότε $\Delta M=5-x$, οπότε $E_1=\dfrac{3(5-x)}{2}$ και $E_2=\dfrac{x\cdot 5}{2}$.

i) Η ισότητα $E_1+E_2=E_3$ είναι ισοδύναμη με την ισότητα $E_1+E_2=\dfrac{(ΑΒΓΔ)}{2}$ από την οποία προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2}+\frac{5x}{2}=\frac{(5+3)5}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\cdot\frac{15-3x}{2}+4\cdot\frac{5x}{2}=4\cdot\frac{40}{4}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 30-6x+10x=40 \Leftrightarrow 4x=10 \Leftrightarrow x=\frac{5}{2}=2,5.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM=2,5$, είναι δηλαδή το μέσο του ΑΔ.

ii) Η ισότητα $E_1=E_2$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση

$$\frac{3(5-x)}{2}=\frac{5x}{2} \Leftrightarrow 15-3x=5x \Leftrightarrow 15=8x \Leftrightarrow x=\frac{15}{8}.$$

Επομένως η θέση του Μ προσδιορίζεται από το μήκος $AM=\frac{15}{8}$.

5. Αν το ποσό των x ευρώ κατατέθηκε προς 5%, τότε το υπόλοιπο ποσό των (4000 – x) ευρώ κατατέθηκε προς 3%.

– Το ποσό των x ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{5}{100}x$ ευρώ

– Το ποσό των (4000 – x) ευρώ έδωσε ετήσιο τόκο $\frac{3}{100}(4000-x)$ ευρώ.

Η εξίσωση που αντιστοιχεί στο πρόβλημα είναι

$$\frac{5}{100}x+\frac{3}{100}(4000-x)=175 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+3(4000-x)=100\cdot 175 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5x+12.000-3x=17.500 \Leftrightarrow 2x=17.500-12.000 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=5.500 \Leftrightarrow x=2.750 \text{ ευρώ}.$$

Επομένως τα 2.750 ευρώ τοκίστηκαν προς 5% και τα υπόλοιπα 1.250 ευρώ τοκίστηκαν προς 3%.

6. i) $v = v_0 + \alpha t \Leftrightarrow \alpha t = v - v_0 \Leftrightarrow t = \dfrac{v - v_0}{\alpha}$, αφού $\alpha \neq 0$.

ii) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} \Leftrightarrow \dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{R_2} = \dfrac{1}{R_1} \Leftrightarrow \dfrac{1}{R_1} = \dfrac{R_2 - R}{R_2 R}$

Από την τελευταία ισότητα προκύπτει ότι $R_2 - R \neq 0$,

αφού το $\dfrac{1}{R_1} \neq 0$.

Επομένως έχουμε $R_1 = \dfrac{R_2 R}{R_2 - R}$.

7. i) $x^2(x-4) + 2x(x-4) + (x-4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-4)(x^2+2x+1) = 0 \Leftrightarrow (x-4)(x+1)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x - 4$ ή $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 4$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και -1.

ii) $(x-2)^2 - (2-x)(4+x) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (x-2)(x+4) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)[(x-2)+(x+4)] = 0 \Leftrightarrow (x-2)(2x+2) = 0 \Leftrightarrow$

$x - 2 = 0$ ή $2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και -1.

8. i) $x(x^2-1) - x^3 + x^2 = 0 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - x - \cancel{x^3} + x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 0 και 1.

ii) $(x+1)^2 + x^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x + \cancel{1} + x^2 - \cancel{1} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 + 2x = 0 \Leftrightarrow 2x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = -1$ ή $x = 0$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 0.

9. i) $x(x-2)^2 = x^2-4x+4 \Leftrightarrow x(x-2)^2-(x-2)^2=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x-2=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=1$.
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2 και 1.

ii) $(x^2-4)(x-1)=(x^2-1)(x-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)(x-1)-(x-1)(x+1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)[(x+2)-(x+1)]=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

10. i) $x^3-2x^2-x+2=0 \Leftrightarrow x^2(x-2)-(x-2)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)(x+1)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ή $x-1=0$ ή $x+1=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=1$ ή $x=-1$.
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 2, 1 και -1.

ii) $x^3-2x^2-(2x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2(x-2)-(2x-1)(x-2)=0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x^2-2x+1)=0 \Leftrightarrow (x-2)(x-1)^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=0$ ή $x-1=0 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=1$.
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 2.

11. i) $\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x^2-x} \Leftrightarrow \frac{x}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)}$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq 0$.
Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x-1}=\frac{1}{x(x-1)} \Leftrightarrow x^2(x-1)=x-1 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$$

(αφού $x \neq 1$).
Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=-1$.

ii) $\frac{x+1}{x^2-1}+\frac{2}{x^2-2x+1}=0 \Leftrightarrow \frac{x+1}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x-1)^2}=0.$

Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{(x+1)}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1}+\frac{2}{(x-1)^2}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-1+2=0 \Leftrightarrow x+1=0 \Leftrightarrow x=-1,$$

που απορρίπτεται λόγω των περιορισμών.
Επομένως και η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.

12. i) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 1$ και $x \neq -1$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}=\frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x+1)\frac{1}{x-1}+(x-1)(x+1)\frac{1}{x+1}=$$

$$=(x-1)(x+1)\frac{2}{x^2-1} \Leftrightarrow x+1+x-1=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x=2 \Leftrightarrow x=1, \text{ που απορρίπτεται, αφού } x \neq 1.$$

Επομένως η εξίσωση είναι αδύνατη.

ii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq -2$.
Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{3}{x+2} - \frac{2}{x} = \frac{x-4}{x^2+2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x+2)\frac{3}{x+2} - x(x+2)\frac{2}{x} = x(x+2)\frac{x-4}{x(x+2)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - 2x - 4 = x - 4 \Leftrightarrow 0x = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση είναι ταυτότητα. Αν λάβουμε υπόψη τους περιορισμούς αυτό σημαίνει ότι η αρχική εξίσωση έχει ως λύση κάθε πραγματικό εκτός από τους αριθμούς 0 και -2.

iii) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq 2$ και $x \neq -2$.
Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{1}{x+2} = \frac{1}{x^2-4} \Leftrightarrow \frac{1}{x+2} = \frac{x}{(x+2)(x-2)} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x - 2 = x \Leftrightarrow 0x = 2$, που είναι αδύνατη.

iv) Η εξίσωση αυτή ορίζεται για κάθε $x \neq -1$ και $x \neq 1$.
Με τους περιορισμούς αυτούς έχουμε:

$$\frac{x^2-x}{x^2-1} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{x\,\cancel{(x-1)}}{(x+1)\,\cancel{(x-1)}} = \frac{x}{x+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{x+1} = \frac{x}{x+1},$$

που αληθεύει για κάθε πραγματικό αριθμό x, με $x \neq \pm 1$.

13. Έστω x – 1, x, x + 1 τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Ζητούμε ακέραιο x τέτοιον ώστε να ισχύει

$$(x-1)+x+(x+1)=(x-1)x(x+1)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x=x(x^2-1)\Leftrightarrow x(3-x^2+1)=0\Leftrightarrow x(4-x^2)=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x^2=4\Leftrightarrow x=0 \text{ ή } x=2 \text{ ή } x=-2.$$

Επομένως υπάρχουν τρεις τριάδες τέτοιων διαδοχικών αριθμών, οι εξής:

(–1, 0, 1), (1, 2, 3) και (–3, –2, –1).

14. i) $|2x-3|=5\Leftrightarrow 2x-3=5\Leftrightarrow$ ή $2x-3=-5\Leftrightarrow 2x=8$

ή $2x=-2\Leftrightarrow x=4$ ή $x=-1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 4 και –1.

ii) $|2x-4|=|x-1|\Leftrightarrow 2x-4=x-1$ ή $2x-4=-x+1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=3$ ή $3x=5\Leftrightarrow x=3$ ή $x=\dfrac{5}{3}$.

iii) Επειδή το πρώτο μέλος της εξίσωσης $|x-2|=2x-1$ είναι μη αρνητικό, για να έχει λύση η εξίσωση αυτή, πρέπει και το δεύτερο μέλος να είναι μη αρνητικό. Δηλαδή, πρέπει

$2x-1\geq 0$ (1)

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε: $|x-2|=2x-1\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-2=2x-1$ ή $x-2=1-2x\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Από τις παραπάνω λύσεις δεκτή είναι μόνο η $x=1$ που ικανοποιεί τον περιορισμό (1).

iv) Ομοίως, για την εξίσωση $|2x-1|=x-2$, πρέπει

$x-2\geq 0$ (2)

Με τον περιορισμό αυτό έχουμε: $|2x-1|=x-2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-1=x-2$ ή $2x-1=2-x\Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Από τις παραπάνω λύσεις καμία δεν είναι δεκτή, αφού καμία δεν επαληθεύει τον περιορισμό (2). Άρα, η εξίσωση είναι αδύνατη.

15. i) Έχουμε:

$$\frac{|x|+4}{3}-\frac{|x|+4}{5}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 15\cdot\frac{|x|+4}{3}-15\cdot\frac{|x|+4}{5}=$$

$$=15\cdot\frac{2}{3}\Leftrightarrow 5|x|+20-3|x|-12=10\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2|x|=2\Leftrightarrow |x|=1\Leftrightarrow x=\pm 1.$$

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -1 και 1.

ii) $$\frac{2|x|+1}{3}-\frac{|x|-1}{2}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow 6\cdot\frac{2|x|+1}{3}-6\cdot\frac{|x|-1}{2}=6\cdot\frac{1}{2}\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 4|x|+2-3|x|+3=3\Leftrightarrow |x|=-2$, που είναι αδύνατη.

16. i) Η εξίσωση $\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4$ ορίζεται για $x\neq -3$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε:

$$\left|\frac{3-x}{3+x}\right|=4\Leftrightarrow |3-x|=4\cdot|3+x|\Leftrightarrow 3-x=4(x+3)$$

ή $3-x=-4(x+3)\Leftrightarrow 3-x=4x+12$

ή $3-x=-4x-12\Leftrightarrow 5x=-9$ ή $3x=-15\Leftrightarrow x=-\frac{9}{5}$

ή $x=-5$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -5 και $-\frac{9}{5}$.

ii) $$|x-1||x-2|=|x-1|\Leftrightarrow |x-1|\big(|x-2|-1\big)=0\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |x-1|=0$ ή $|x-2|=1\Leftrightarrow x=1$ ή $x-2=1$

ή $x-2=-1\Leftrightarrow x=1$ ή $x=3$ ή $x=1$.

Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί 1 και 3.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $(x+\alpha)^2-(x-\beta)^2=2\alpha(\alpha+\beta)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-(x^2-2\beta x+\beta^2)=2\alpha^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-x^2+2\beta x-\beta^2=2\alpha^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x=\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2 \Leftrightarrow 2(\alpha+\beta)x=(\alpha+\beta)^2.$

- Αν $\alpha+\beta\neq 0$ η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{(\alpha+\beta)^2}{2(\alpha+\beta)}=\frac{\alpha+\beta}{2}.$$

- Αν $\alpha+\beta=0$ η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

ii) Για $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x-\alpha}{\beta}=\frac{x-\beta}{\alpha}\Leftrightarrow \alpha(x-\alpha)=\beta(x-\beta)\Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \alpha x-\alpha^2=\beta x-\beta^2 \Leftrightarrow \alpha x-\beta x=\alpha^2-\beta^2\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-\beta)x=(\alpha-\beta)(\alpha+\beta).$

- Αν $\alpha-\beta\neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x=\frac{(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)}{\alpha-\beta}=\alpha+\beta.$$

- Αν $\alpha-\beta=0\Leftrightarrow \alpha=\beta$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x=0$, οπότε είναι ταυτότητα.

2. i) Για $\alpha\neq 0$ και $\beta\neq 0$ έχουμε:

$$\frac{x}{\alpha}-\frac{x}{\beta}=1\Leftrightarrow \frac{\beta x-\alpha x}{\alpha\beta}=1\Leftrightarrow(\beta-\alpha)x=\alpha\beta.$$

- Αν $\beta-\alpha\neq 0\Leftrightarrow \beta\neq\alpha$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{\alpha\beta}{\beta-\alpha}$.

- Αν $\beta-\alpha=0\Leftrightarrow\beta=\alpha$ τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $0x=\alpha^2$ και είναι αδύνατη γιατί $\alpha\neq 0$.
  Επομένως η εξίσωση έχει λύση μόνο αν $\alpha\neq 0$, $\beta\neq 0$ και $\alpha\neq\beta$.

3. i) Στα 200 ml διάλυμα περιέχονται 30 ml καθαρό οινόπνευμα. Αν προσθέσουμε x ml καθαρό οινόπνευμα τότε το διάλυμα που θα προκύψει θα είναι (200 + x) ml και θα περιέχει (30 + x) ml καθαρό οινόπνευμα οπότε προκύπτει η εξίσωση

$$\frac{30+x}{200+x}=\frac{32}{100}\Leftrightarrow 100(30+x)=32(200+x)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3000+100x=6400+32x\Leftrightarrow 68x=3400\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{3400}{68}\Leftrightarrow x=50.$$

Επομένως ο φαρμακοποιός πρέπει να προσθέσει 50 ml καθαρό οινόπνευμα.

4. Έστω ότι x ώρες μετά την προσπέραση τα δύο αυτοκίνητα θα απέχουν μεταξύ τους 1 km. Το διάστημα που διανύει το Α στις x ώρες είναι 100x ενώ το αντίστοιχο διάστημα για το Β είναι 120x. Έτσι έχουμε την εξίσωση

$$120x-100x=1\Leftrightarrow 20x=1\Leftrightarrow x=\frac{1}{20}$$ ώρες, οπότε

$$x=\frac{1}{20}\cdot 60=3 \text{ λεπτά.}$$

Οπότε τα αυτοκίνητα θα απέχουν 1 km τρία λεπτά μετά την προσπέραση.

5. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq \alpha$ και $x \neq -\alpha$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{x^2-\alpha^2} \Leftrightarrow \frac{x+\alpha}{x-\alpha} = \frac{x^2}{(x+\alpha)(x-\alpha)} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+\alpha)^2 = x^2 \Leftrightarrow x+\alpha = x \text{ ή } x+\alpha = -x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0x = \alpha \text{ ή } 2x = -\alpha.$$

- Αν $\alpha = 0$, τότε η εξίσωση έχει ως λύση κάθε αριθμό $x \neq 0$.
- Αν $\alpha \neq 0$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση τον αριθμό $x = \dfrac{-\alpha}{2}$.

6. Η εξίσωση αυτή είναι ορισμένη για $x \neq 2$. Με αυτό τον περιορισμό έχουμε:

$$\frac{x^3-8}{x-2} = x^2+4 \Leftrightarrow \cancel{x^3} - \cancel{8} = \cancel{x^3} - 2x^2 + 4x - \cancel{8} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow 2x(x-2) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2.$$

Από τις τιμές αυτές δεκτή είναι μόνο η $x = 0$. Επομένως η εξίσωση έχει μοναδική λύση, τον αριθμό $x = 0$.

7. $\left|2|x|-1\right| = 3 \Leftrightarrow 2|x|-1 = 3$ ή $2|x|-1 = -3 \Leftrightarrow 2|x| = 4$ ή $2|x| = -2$.

Η δεύτερη είναι αδύνατη οπότε έχουμε
$2|x| = 4 \Leftrightarrow |x| = 2 \Leftrightarrow x = -2$ ή $x = 2$.
Επομένως οι λύσεις της εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2.

8. $\sqrt{x^2-2x+1}=|3x-5| \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2}=|3x-5| \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow |x-1|=|3x-5| \Leftrightarrow x-1=3x-5$ ή $x-1=-3x+5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x=4$ ή $4x=6 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=\frac{3}{2}$.

§ 3.2. Η εξίσωση $x^\nu=\alpha$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $x^3-125=0 \Leftrightarrow x^3=5^3 \Leftrightarrow x=5$.
ii) $x^5-243=0 \Leftrightarrow x^5=3^5 \Leftrightarrow x=3$.
iii) $x^7-1=0 \Leftrightarrow x^7=1 \Leftrightarrow x=1$.

2. i) $x^3+125=0 \Leftrightarrow x^3=(-5)^3 \Leftrightarrow x=-5$.
ii) $x^5+243=0 \Leftrightarrow x^5=(-3)^5 \Leftrightarrow x=-3$.
iii) $x^7+1=0 \Leftrightarrow x^7=(-1)^7 \Leftrightarrow x=-1$.

3. i) $x^2-64=0 \Leftrightarrow x^2=8^2 \Leftrightarrow x=-8$ ή $x=8$.
ii) $x^4-81=0 \Leftrightarrow x=\sqrt[4]{81}$ ή $x=-\sqrt[4]{81} \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$.
iii) $x^6-64=0 \Leftrightarrow x^6=64 \Leftrightarrow x=\sqrt[6]{64}$
$\Leftrightarrow x=\sqrt[6]{64}$ ή $x=-\sqrt[6]{64} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=2$ ή $x=-2$.

4. i) $x^5-8x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x^3-8)=0 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x^2=0$
ή $x^3=8 \Leftrightarrow x=0$ ή $x=2$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και 2.
ii) $x^4+x=0 \Leftrightarrow x(x^3+1)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή $x^3=-1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$.
Άρα λύσεις είναι οι αριθμοί 0 και – 1.
iii) $x^5+16x=0 \Leftrightarrow x(x^4+16)=0 \Leftrightarrow x=0$ ή
$x^4=-16 \Leftrightarrow x=0$ αφού η $x^4=-16$ είναι αδύνατη.
Άρα η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x=0$.

5. Για το x έχουμε την εξίσωση $x \cdot x \cdot 3x = 81$, με $x > 0 \Leftrightarrow 3x^3 = 81 \Leftrightarrow x^3 = 27 \Leftrightarrow x = 3$.
Άρα, οι διαστάσεις του παραλληλεπιπέδου είναι 3 m, 3 m και 9 m.

6. i) $(x+1)^3 = 64 \Leftrightarrow x+1 = 4 \Leftrightarrow x = 3$.

ii) $1 + 125x^3 = 0 \Leftrightarrow (5x)^3 = -1 \Leftrightarrow 5x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{5}$.

iii) $(x-1)^4 - 27(x-1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)[(x-1)^3 - 27] = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x - 1 = 0$ ή $(x-1)^3 = 27 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x - 1 = 3 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 1$ ή $x = 4$.

§ 3.3. Εξισώσεις 2ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-5)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1$, οπότε η εξίσωση έχει δύο πραγματικές ρίζες
$$x_1 = \frac{5+1}{2 \cdot 2} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \text{ και } x_2 = \frac{5-1}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$$

ii) $\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 9 = 36 - 36 = 0$, οπότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x = \frac{6}{2} = 3$.

iii) $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 3 \cdot 2 = 16 - 24 = -8 < 0$, οπότε η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες.

2. i) $x^2 - 1{,}69 = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1{,}69 \Leftrightarrow x = 1{,}3$ ή $x = -1{,}3$

ii) $0{,}5x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x(0{,}5x - 1) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x = 0$ ή $0{,}5x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ ή $x = 2$.

iii) $3x^2 + 27 = 0 \Leftrightarrow 3(x^2 + 9) = 0 \Leftrightarrow x^2 = -9$, που είναι αδύνατη.

3. i) Έχουμε $\Delta = 4 + 4\lambda(\lambda - 2) = 4 + 4\lambda^2 - 8\lambda =$
$= 4(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 4(\lambda - 1)^2 \geq 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}^*$
που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

ii) Έχουμε $\Delta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha\beta - 4\alpha\beta =$
$= (\alpha - \beta)^2 \geq 0$ για όλα τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$, που σημαίνει ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες.

4. Επειδή
$\Delta = 4 - 4\mu^2 = 0 \Leftrightarrow \mu^2 = 1 \Leftrightarrow \mu = 1$ ή $\mu = -1$,
οι τιμές του μ για τις οποίες η εξίσωση έχει διπλή ρίζα είναι οι αριθμοί 1 και –1.

5. Έχουμε $\Delta = 4(\alpha + \beta)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + \beta^2) =$

$= 4\alpha^2 + 4\beta^2 + 8\alpha\beta - 8\alpha^2 - 8\beta^2 = -4\alpha^2 - 4\beta^2 + 8\alpha\beta =$

$= -4(\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta) = -4(\alpha - \beta)^2 < 0$ και η εξίσωση είναι αδύνατη στο $\mathbb{R}$.
Στην περίπτωση που είναι $\alpha = \beta \neq 0$, ισχύει $\Delta = 0$ και η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.
Αν είναι $\alpha = \beta = 0$, τότε η εξίσωση παίρνει τη μορφή $2 = 0$ και είναι αδύνατη.

I_a_algevra_lisis_a_1-62_18b_v1.indd 56 5/27/17 12:53 AM

6. i) $S=2+3=5$ και $P=2\cdot 3=6$, οπότε η εξίσωση είναι η $x^2-5x+6=0$.

ii) $S=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ και $P=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, οπότε η εξίσωση είναι η:

$$x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow 2x^2-3x+1=0.$$

iii) $S=\left(5-2\sqrt{6}\right)+\left(5+2\sqrt{6}\right)=10$ και

$$P=\left(5-2\sqrt{6}\right)\cdot\left(5+2\sqrt{6}\right)=25-4\cdot 6=1$$

οπότε η εξίσωση είναι η: $x^2-10x+1=0$.

7. i) Είναι $S=2$ και $P=-15$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-2x-15=0$, η οποία έχει $\Delta=4-4(-15)=64$.
Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1=\frac{2+8}{2}=5 \text{ και } x_2=\frac{2-8}{2}=-3.$$

ii) Είναι $S=9$ και $P=10$. Οι ζητούμενοι αριθμοί είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2-9x+10=0$, η οποία έχει $\Delta=81-4\cdot 10=41$.
Επομένως οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

$$x_1=\frac{9+\sqrt{41}}{2} \text{ και } x_2=\frac{9-\sqrt{41}}{2}.$$

8. 1ος τρόπος:

i) Για να λύσουμε την εξίσωση αρκεί να βρούμε δύο αριθμούς που να έχουν άθροισμα $\sqrt{5}+\sqrt{3}$ και γινόμενο $\sqrt{15}=\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}$. Οι αριθμοί αυτοί είναι προφανώς οι $\sqrt{5}$ και $\sqrt{3}$ που είναι και οι ζητούμενες ρίζες της εξίσωσης.

2ος τρόπος:

Είναι $\Delta=\left(\sqrt{5}+\sqrt{3}\right)^2-4\sqrt{15}=$

$=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2+2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}-4\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=$

$=\left(\sqrt{5}\right)^2+\left(\sqrt{3}\right)^2-2\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}=\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2>0.$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{3}}{2}=\sqrt{5}$$

και $x_2=\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{\left(\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^2}}{2}=$

$$=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

ii) Είναι $\Delta=\left(\sqrt{2}-1\right)^2+4\sqrt{2}=\left(\sqrt{2}+1\right)^2>0.$

Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς

$$x_1=\frac{1-\sqrt{2}+\sqrt{2}+1}{2}=1 \text{ και } x_2=\frac{1-\sqrt{2}-\sqrt{2}-1}{2}=-\sqrt{2}.$$

9. **1ος τρόπος:**

$x^2+\alpha^2=\beta^2-2\alpha x \Leftrightarrow x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+\alpha)^2-\beta^2=0 \Leftrightarrow (x+\alpha+\beta)(x+\alpha-\beta)=0 \Leftrightarrow$

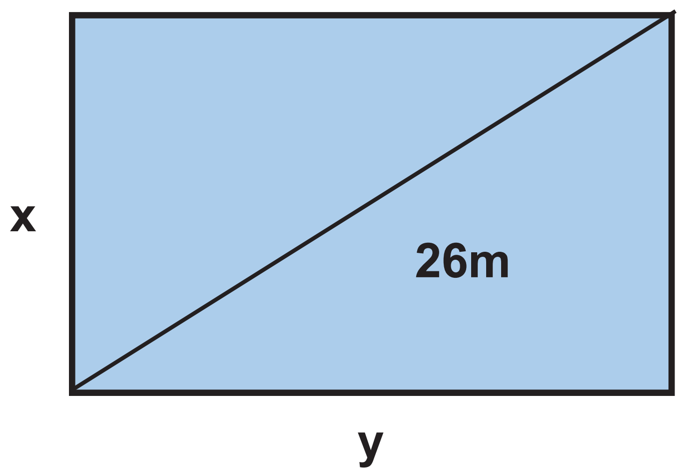
$\Leftrightarrow x=-\alpha-\beta$ ή $x=\beta-\alpha$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση γράφεται $x^2+2\alpha x+\alpha^2-\beta^2=0$.
Είναι $\Delta=4\alpha^2-4(\alpha^2-\beta^2)=4\beta^2$, οπότε η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

$$x_1=\frac{-2\alpha-2\beta}{2}=-(\alpha+\beta) \text{ και } x_2=\frac{-2\alpha+2\beta}{2}=\beta-\alpha.$$

10. Έστω x και y οι πλευρές του ορθογωνίου.



Τότε έχουμε $2x+2y=68 \Leftrightarrow x+y=34 \Leftrightarrow y=34-x$ (1)
Από το πυθαγόρειο θεώρημα προκύπτει ότι $x^2+y^2=26^2$, οπότε λόγω της (1) έχουμε

$x^2+(34-x)^2=26^2 \Leftrightarrow x^2+34^2-68x+x^2=26^2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-68x+34^2-26^2=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2-68x+(34-26)(34+26)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 68x + 8 \cdot 60 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 34x + 4 \cdot 60 = 0.$
Είναι $\Delta = 34^2 - 4 \cdot 4 \cdot 60 = 196.$
Επομένως η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1 = \frac{34+14}{2} = 24 \text{ και } x_2 = \frac{34-14}{2} = 10.$$

Οι ρίζες αυτές λόγω και της (1) είναι οι ζητούμενες πλευρές του ορθογωνίου.

11. i) Η εξίσωση γράφεται $|x|^2 - 7|x| + 12 = 0$. Θέτουμε $|x| = \omega$ οπότε η εξίσωση γίνεται $\omega^2 - 7\omega + 12 = 0$ και έχει ρίζες $\omega_1 = 3$ και $\omega_2 = 4$ που είναι δεκτές και οι δύο, οπότε έχουμε $|x| = 3$ ή $|x| = 4$, που σημαίνει ότι $x = 3$ ή $x = -3$ ή $x = 4$ ή $x = -4$.
Επομένως η εξίσωση έχει λύσεις τους αριθμούς 3, –3, 4 και –4.

ii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 + 2|x| - 35 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 + 2\omega - 35 = 0.$$

Είναι $\Delta = 144$.
Η εξίσωση έχει ρίζες 5 και –7. Από αυτές δεκτή είναι μόνο η θετική, αφού $\omega = |x| \geq 0$. Επομένως $|x| = 5$, που σημαίνει $x = 5$ ή $x = -5$.

iii) Θέτουμε $|x| = \omega$, οπότε έχουμε

$$x^2 - 8|x| + 12 = 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 8\omega + 12 = 0,$$

αφού $x^2 = |x|^2$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 6 και 2, που είναι δεκτές και οι δύο. Επομένως $|x| = 6$ ή $|x| = 2$ που σημαίνει ότι $x = 6$ ή $x = -6$ ή $x = 2$ ή $x = -2$.

12. Θέτουμε $|x-1|=\omega$, οπότε έχουμε
$(x-1)^2+4|x-1|-5=0 \Leftrightarrow \omega^2+4\omega-5=0$, αφού

$(x-1)^2=|x-1|^2$.
Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς -5 και 1.
Δεκτή είναι μόνο η θετική $\omega=1$ αφού $\omega=|x-1|\geq 0$.
Επομένως,

$|x-1|=1 \Leftrightarrow x-1=1$ ή $x-1=-1 \Leftrightarrow x=2$ ή $x=0$.
Άρα, η εξίσωση έχει δύο ρίζες, τους αριθμούς 0 και 2.

13. Η εξίσωση ορίζεται για $x\neq 0$. Θέτουμε $x+\dfrac{1}{x}=\omega$
οπότε η εξίσωση γράφεται $\omega^2-5\omega+6=0$. Η εξίσωση αυτή έχει ρίζες του αριθμούς 2 και 3, οπότε έχουμε

$x+\dfrac{1}{x}=2$ ή $x+\dfrac{1}{x}=3$.

Η πρώτη εξίσωση γράφεται
$$x+\frac{1}{x}=2 \Leftrightarrow x^2+1=2x \Leftrightarrow (x-1)^2=0$$
και έχει το 1 διπλή ρίζα.
Η δεύτερη γράφεται
$$x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow x^2+1=3x \Leftrightarrow x^2-3x+1=0$$
και έχει ως ρίζες τους αριθμούς $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.
Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ως ρίζες τους

αριθμούς 1, $\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$.

14. i) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq -1$ και $x \neq 0$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{x}{x+1}+\frac{x+1}{x}=\frac{13}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x(x+1)\frac{x}{x+1}+6x(x+1)\frac{x+1}{x}=6x(x+1)\frac{13}{6} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+6(x+1)^2=13x(x+1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 6x^2+6x^2+12x+6=13x^2+13x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2+x-6=0$$

η οποία έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –3.

ii) Η εξίσωση ορίζεται για $x \neq 0$ και $x \neq 2$. Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$\frac{2}{x}+\frac{2x-3}{x-2}+\frac{2-x^2}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(x-2)\frac{2}{x}+x(x-2)\frac{2x-3}{x-2}+x(x-2)\frac{2-x^2}{x(x-2)}=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-4+2x^2-3x+2-x^2=0 \Leftrightarrow x^2-x-2=0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 2 και –1, οπότε λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x=-1$.

15. i) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $y^2 + 6y - 40 = 0$.
Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = 4$ και $y_2 = -10$.
Επειδή $y = x^2 \geq 0$, δεκτή είναι μόνο η $y_1 = 4$, οπότε έχουμε $x^2 = 4 \Leftrightarrow x = 2$ ή $x = -2$. Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί -2 και 2.

ii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $4y^2 + 11y - 3 = 0$.
Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = \frac{1}{4}$.
Επειδή $y = x^2 \geq 0$ δεκτή είναι μόνο η $y_2 = \frac{1}{4}$, οπότε έχουμε

$$x^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ ή } x = -\frac{1}{2}.$$

Επομένως οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης είναι οι αριθμοί $-\frac{1}{2}$ και $\frac{1}{2}$.

iii) Αν θέσουμε $x^2 = y$ η εξίσωση γίνεται $2y^2 + 7y + 3 = 0$.
Αυτή έχει ρίζες τις $y_1 = -3$ και $y_2 = -\frac{1}{2}$.
Επειδή $y = x^2 \geq 0$ καμία από αυτές δεν είναι δεκτή.
Επομένως η αρχική εξίσωση είναι αδύνατη.
Σχόλιο: Είναι προφανές ότι η εξίσωση είναι αδύνατη, αφού $2x^4 + 7x^2 + 3 > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\Delta = (-2\alpha^3)^2 - 4\alpha^2(\alpha^4 - 1) = 4\alpha^6 - 4\alpha^6 + 4\alpha^2 = 4\alpha^2$.

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{2\alpha^3 + 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 + 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 + 1}{\alpha} \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{2\alpha^3 - 2\alpha}{2\alpha^2} = \frac{2\alpha(\alpha^2 - 1)}{2\alpha^2} = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha}.$$

2. i) Είναι

$$\Delta = \left(5 - \sqrt{2}\right)^2 - 4\left(6 - 3\sqrt{2}\right) =$$

$$= 25 - 10\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 - 24 + 12\sqrt{2} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^2 + 2\sqrt{2} + 1 = \left(\sqrt{2} + 1\right)^2.$$

ii) Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_1 = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{\left(\sqrt{2} + 1\right)^2}}{2} = \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3$$

$$= \frac{5 - \sqrt{2} + \sqrt{2} + 1}{2} = 3 \text{ και}$$

$$x_2 = \frac{5 - \sqrt{2} - \sqrt{2} - 1}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{2} = 2 - \sqrt{2}.$$

3. i) Η εξίσωση έχει διπλή ρίζα αν και μόνο αν $\Delta = 0$. Είναι

$\Delta = (\alpha - 9)^2 - 4 \cdot 2(\alpha^2 + 3\alpha + 4) =$

$= \alpha^2 - 18\alpha + 81 - 8\alpha^2 - 24\alpha - 32 = -7\alpha^2 - 42\alpha + 49$,

οπότε

$\Delta = 0 \Leftrightarrow 7\alpha^2 + 42\alpha - 49 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2 + 6\alpha - 7 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -7$ ή $\alpha = 1$.

Επομένως για $\alpha = -7$ ή $\alpha = 1$ η εξίσωση έχει διπλή ρίζα.

4. Αν το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ισχύει $\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0$. Είναι $\rho \neq 0$, αφού $\gamma \neq 0$, οπότε έχουμε

$$\alpha\rho^2 + \beta\rho + \gamma = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta\frac{1}{\rho} + \gamma\frac{1}{\rho^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma\left(\frac{1}{\rho}\right)^2 + \beta\left(\frac{1}{\rho}\right) + \alpha = 0$$

που σημαίνει ότι το $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$.

5. i) 1ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x + \frac{1}{\alpha} = \alpha + \frac{1}{x} \Leftrightarrow x - \alpha + \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha + \frac{x - \alpha}{\alpha x} = 0 \Leftrightarrow (x - \alpha)\left(1 + \frac{1}{\alpha x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - \alpha)\left(\frac{\alpha x + 1}{\alpha x}\right) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - \alpha = 0 \text{ ή } \alpha x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = \alpha \text{ ή } x = -\frac{1}{\alpha}.$$

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$x+\frac{1}{\alpha}=\alpha+\frac{1}{x} \Leftrightarrow x-\frac{1}{x}+\frac{1}{\alpha}-\alpha=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-1+\left(\frac{1-\alpha^2}{\alpha}\right)x=0 \Leftrightarrow \alpha x^2-\alpha+(1-\alpha^2)x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \alpha x^2-(\alpha^2-1)x-\alpha=0.$$

Είναι $\Delta=(\alpha^2-1)^2-4\alpha(-\alpha)=\alpha^4-2\alpha^2+1+4\alpha^2=$

$=\alpha^4+2\alpha^2+1=(\alpha^2+1)^2$

οπότε η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις

$$x_1=\frac{\alpha^2-1+\alpha^2+1}{2\alpha}=\alpha \text{ και } x_2=\frac{\alpha^2-1-\alpha^2-1}{2\alpha}=-\frac{1}{\alpha}.$$

ii) **1ος τρόπος:**

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{x}{\alpha}-\frac{\beta}{\alpha}=\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\alpha}{x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta)=\alpha\left(\frac{1}{\beta}-\frac{1}{x}\right) \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha}(x-\beta)=\alpha\left(\frac{x-\beta}{\beta x}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-\beta)\left(\frac{1}{\alpha}-\frac{\alpha}{\beta x}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=\beta \text{ ή } \frac{\alpha}{\beta x}=\frac{1}{\alpha} \Leftrightarrow x=\beta \text{ ή } \beta x=\alpha^2 \Leftrightarrow x=\beta \text{ ή } x=\frac{\alpha^2}{\beta}$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς

β και $\dfrac{\alpha^2}{\beta}$.

2ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x\frac{x}{\alpha}+\alpha\beta x\frac{\alpha}{x}=\alpha\beta x\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta x\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2+\alpha^2\beta=\alpha^2 x+\beta^2 x \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2-\beta^2 x+\alpha^2\beta-\alpha^2 x=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta x(x-\beta)+\alpha^2(\beta-x)=0 \Leftrightarrow (x-\beta)(\beta x-\alpha^2)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x=\beta \text{ ή } \beta x=\alpha^2 \Leftrightarrow x=\beta \text{ ή } x=\frac{\alpha^2}{\beta}.$$

Επομένως η εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς β και $\frac{\alpha^2}{\beta}$.

3ος τρόπος:

Η εξίσωση είναι ορισμένη για $x \neq 0$. Με αυτόν τον περιορισμό έχουμε

$$\frac{x}{\alpha}+\frac{\alpha}{x}=\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha\beta x\frac{x}{\alpha}+\alpha\beta x\frac{\alpha}{x}=\alpha\beta x\frac{\alpha}{\beta}+\alpha\beta x\frac{\beta}{\alpha} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \beta x^2+\alpha^2\beta=\alpha^2 x+\beta^2 x \Leftrightarrow \beta x^2-(\alpha^2+\beta^2)x+\alpha^2\beta=0.$$

Είναι $\Delta=(\alpha^2+\beta^2)^2-4\alpha^2\beta^2=\alpha^4+\beta^4+2\alpha^2\beta^2-4\alpha^2\beta^2=$

$$=\alpha^4+\beta^4-2\alpha^2\beta^2=(\alpha^2-\beta^2)^2$$

- **Αν $\alpha \neq \pm\beta$ η εξίσωση έχει δύο ρίζες τις**

$$x_1=\frac{\alpha^2+\beta^2+\alpha^2-\beta^2}{2\beta}=\frac{2\alpha^2}{2\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta} \text{ και}$$

$$x_2=\frac{\alpha^2+\beta^2-\alpha^2+\beta^2}{2\beta}=\frac{2\beta^2}{2\beta}=\beta.$$

- **Αν $\alpha=\beta$ ή $\alpha=-\beta$ τότε η εξίσωση έχει διπλή ρίζα, την**

$$x=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2\beta}=\frac{2\alpha^2}{2\beta}=\frac{\alpha^2}{\beta}=\frac{(\pm\beta)^2}{\beta}=\beta$$

6. i) Έχουμε $\Delta = 4\lambda^2 - 4(-8) = 4\lambda^2 + 32 > 0$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. Αυτό σημαίνει ότι η εξίσωση έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $x_2 = x_1^2$. Από τους τύπους Vieta έχουμε

- $x_1 + x_2 = -2\lambda \Leftrightarrow x_1 + x_1^2 = -2\lambda$ και
- $x_1 \cdot x_2 = -8 \Leftrightarrow x_1^3 = -8 \Leftrightarrow x_1 = -2$, οπότε $x_2 = (-2)^2 = 4$.

Τότε έχουμε

$-2 + 4 = -2\lambda \Leftrightarrow 2\lambda = -2 \Leftrightarrow \lambda = -1$.

7. Έστω $x - 1$, x, $x + 1$ τρεις διαδοχικοί ακέραιοι. Οι αριθμοί αυτοί αποτελούν πλευρές ορθογωνίου τριγώνου αν και μόνο αν ισχύει

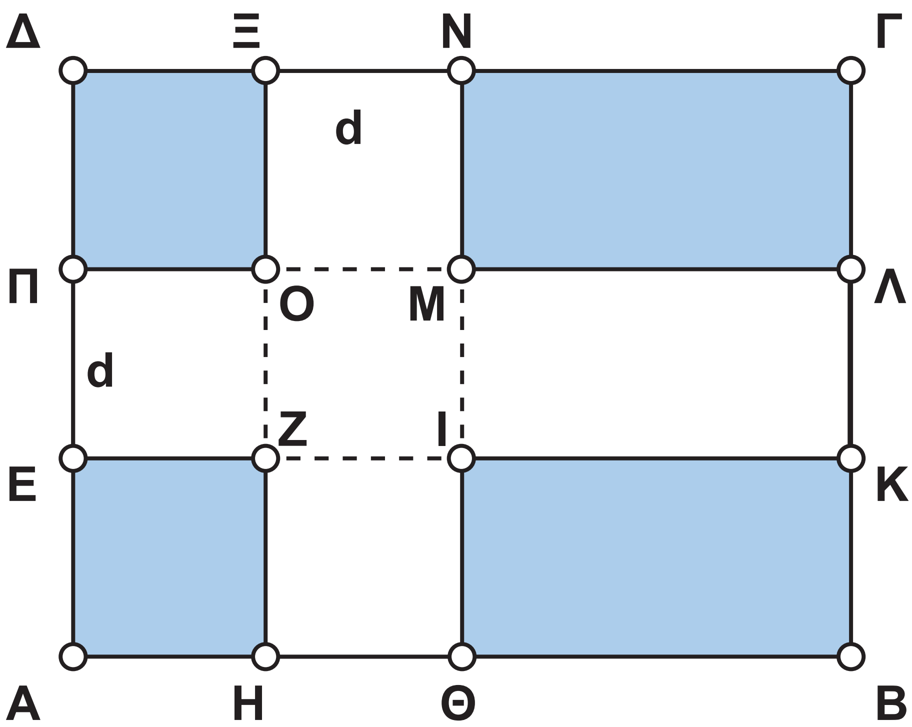
$$(x+1)^2 = x^2 + (x-1)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 + x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x = 4$, αφού $x \neq 0$ ως πλευρά τριγώνου.

Η λύση $x = 4$ της εξίσωσης είναι μοναδική. Επομένως υπάρχει μία μόνο τριάδα διαδοχικών ακεραίων που είναι μήκη πλευρών ορθογωνίου τριγώνου. Οι ακέραιοι αυτοί είναι οι 3, 4 και 5.

8.



Το εμβαδόν E_1 του σταυρού προκύπτει από το άθροισμα των εμβαδών των δύο λευκών λωρίδων της σημαίας από το οποίο όμως πρέπει να αφαιρέσουμε το εμβαδόν του κοινού τετραγώνου (ΟΜΙΖ) πλευράς d. Είναι δηλαδή

$$E_1 = 3 \cdot d + 4 \cdot d - d^2 = 7d - d^2$$

Έστω E_2 το εμβαδόν του υπόλοιπου μέρους της σημαίας. Θα ισχύει $E_1 = E_2$ αν και μόνο αν το E_1 είναι ίσο με το μισό του εμβαδού ολόκληρης της σημαίας. Επομένως έχουμε

$$E_1 = E_2 \Leftrightarrow 7d - d^2 = \frac{3 \cdot 4}{2} \Leftrightarrow d^2 - 7d + 6 = 0 \Leftrightarrow d = 1$$

ή $d = 6$.

Όμως για το d έχουμε τον περιορισμό $0 < d < 3$, οπότε $d = 1$.

9. Αν το μηχάνημα Α χρειάζεται x ώρες για να τελειώσει το έργο, όταν εργάζεται μόνο του, τότε το Β θα χρειάζεται $x+12$ ώρες για το ίδιο έργο. Σε μία ώρα το Α εκτελεί τότε το $\frac{1}{x}$ μέρος του έργου ενώ το Β εκτελεί το $\frac{1}{x+12}$ μέρος του έργου. Αν τα δύο μηχανήματα εργαστούν μαζί για 8 ώρες, τότε το Α εκτελεί το $8\frac{1}{x}=\frac{8}{x}$ μέρος του έργου, ενώ το Β εκτελεί το $8\cdot\frac{1}{x+12}=\frac{8}{x+12}$ μέρος του έργου.

Αν προσθέσουμε τα δύο αυτά μέρη του έργου θα έχουμε ολόκληρο το έργο δηλαδή το 1 έργο. Έτσι έχουμε την εξίσωση του προβλήματος

$$\frac{8}{x}+\frac{8}{x+12}=1 \Leftrightarrow 8(x+12)+8x=x(x+12) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8x+96+8x=x^2+12x \Leftrightarrow x^2-4x-96=0.$$

Είναι $\Delta=16-4(-96)=400$, οπότε

$$x=\frac{4+20}{2}=12 \text{ ή } x=\frac{4-20}{2}=-8.$$

Είναι δηλαδή $x=12$, αφού $x>0$. Επομένως το μηχάνημα Α χρειάζεται 12 ώρες για να τελειώσει το έργο μόνο του, ενώ το Β χρειάζεται 24 ώρες.

10. Ο αριθμός 1 είναι ρίζα αν και μόνο αν επαληθεύει την εξίσωση, δηλαδή αν και μόνο αν ισχύει

$1^4-10\cdot 1^2+\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=9$.

Για $\alpha=9$ η εξίσωση γίνεται $x^4-10x^2+9=0$.

Αν θέσουμε $x^2=y$ η εξίσωση γίνεται $y^2-10y+9=0$.

Αυτή έχει ρίζες τους αριθμούς 9 και 1 οπότε έχουμε $x^2=9$ ή $x^2=1 \Leftrightarrow x=3$ ή $x=-3$ ή $x=1$ ή $x=-1$. Επομένως η αρχική εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς 3, –3, 1, –1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

§ 4.1. Ανισώσεις 1ου βαθμού
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\frac{x-1}{2}+\frac{2x+3}{4}<\frac{x}{6} \Leftrightarrow 6(x-1)+3(2x+3)<2x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 6x-6+6x+9<2x \Leftrightarrow 6x+6x-2x<6-9 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10x<-3 \Leftrightarrow x<-\frac{3}{10}$.

ii) $\frac{x-12}{2}+\frac{x}{2}+\frac{3}{4}>x \Leftrightarrow 2(x-12)+2x+3>4x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x-24+2x+3>4x \Leftrightarrow 2x+2x-4x>24-3 \Leftrightarrow$

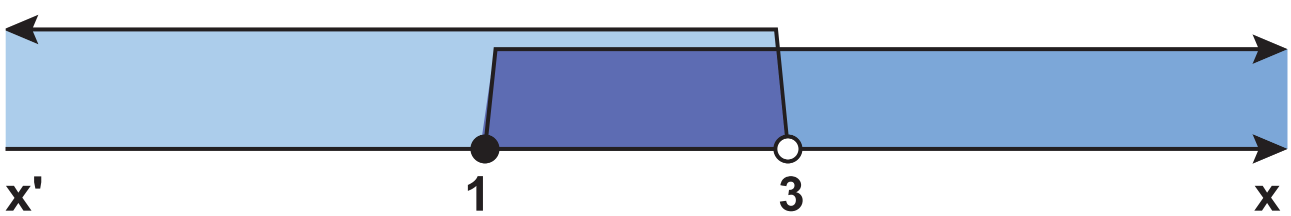
$\Leftrightarrow 2x+2x-4x>24-3 \Leftrightarrow 0x>21$ αδύνατη.

iii) $\frac{x-2}{2}+\frac{1-2x}{5}<\frac{x}{10}-\frac{2}{5} \Leftrightarrow 5x-10+2-4x<x-4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5x-4x-x<10-2-4 \Leftrightarrow 0x<4$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

2. • $3x-1<x+5 \Leftrightarrow 3x-x<1+5 \Leftrightarrow 2x<6 \Leftrightarrow x<3$.

• $2-\frac{x}{2} \leq x+\frac{1}{2} \Leftrightarrow 4-x \leq 2x+1 \Leftrightarrow -3x \leq -3 \Leftrightarrow x \geq 1$.

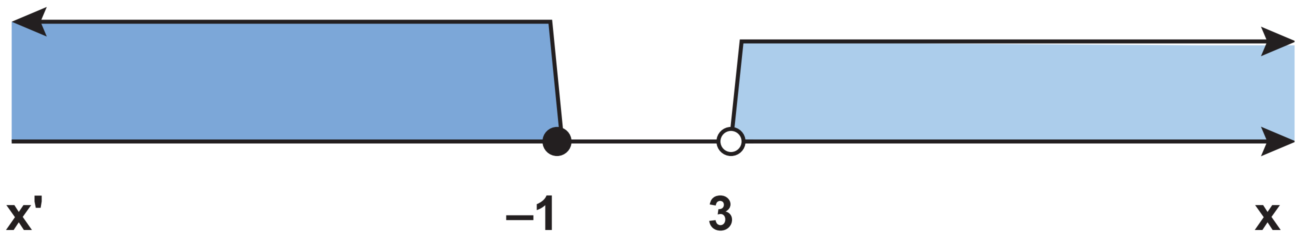


Άρα $1 \leq x < 3$.

3. • $x - \frac{1}{2} > \frac{x}{2} + 1 \Leftrightarrow 2x - 1 > x + 2 \Leftrightarrow 2x - x > 1 + 2 \Leftrightarrow x > 3.$

• $x - \frac{1}{3} \leq \frac{x}{3} - 1 \Leftrightarrow 3x - 1 \leq x - 3 \Leftrightarrow 3x - x \leq 1 - 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \leq -2 \Leftrightarrow x \leq -1.$



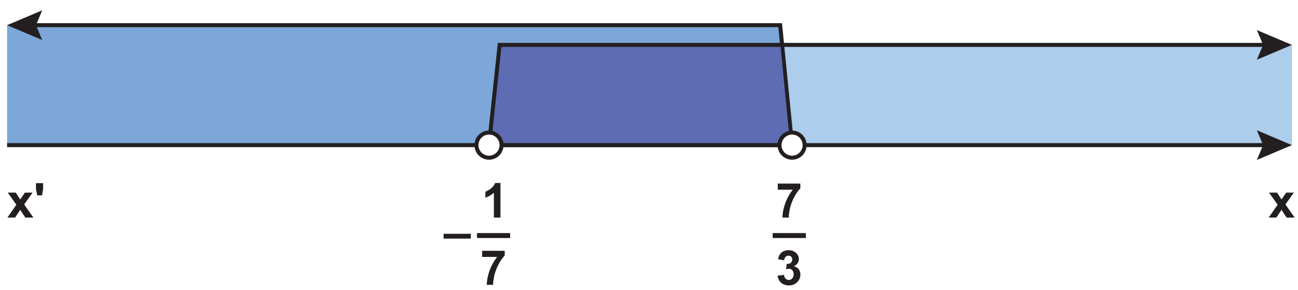
Άρα **δεν** υπάρχουν τιμές του x για τις οποίες **συναληθεύουν** οι ανισώσεις.

4. • $2x - \frac{x-1}{8} > x \Leftrightarrow 16x - x + 1 > 8x \Leftrightarrow 16x - x - 8x > -1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 7x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{7}.$

• $x - 4 + \frac{x+1}{2} < 0 \Leftrightarrow 2x - 8 + x + 1 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x + x < 8 - 1 \Leftrightarrow 3x < 7 \Leftrightarrow x < \frac{7}{3}.$



Οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in \left(-\frac{1}{7}, \frac{7}{3}\right)$.

Οι ακέραιες τιμές του x στο διάστημα αυτό είναι οι 0, 1, 2.

5. i) $|x|<3 \Leftrightarrow -3<x<3$. Άρα $x \in (-3,3)$.

ii) $|x-1| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x-1 \le 4 \Leftrightarrow 1-4 \le x \le 1+4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3 \le x \le 5$. Άρα $x \in [-3,5]$.

iii) $|2x+1|<5 \Leftrightarrow -5<2x+1<5 \Leftrightarrow -5-1<2x<5-1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -6<2x<4 \Leftrightarrow -3<x<2$.

Άρα $x \in (-3,2)$.

6. i) $|x| \ge 3 \Leftrightarrow x \le -3$ ή $x \ge 3$. Άρα $x \in (-\infty,-3] \cup [3,+\infty)$.

ii) $|x-1|>4 \Leftrightarrow x-1<-4$ ή $x-1>4 \Leftrightarrow x<-3$ ή $x>5$.

Άρα $x \in (-\infty,-3) \cup (5,+\infty)$.

iii) $|2x+1| \ge 5 \Leftrightarrow 2x+1 \le -5$ ή $2x+1 \ge 5 \Leftrightarrow 2x \le -6$ ή $2x \ge 4$

$\Leftrightarrow x \le -3$ ή $x \ge 2$.

Άρα $x \in (-\infty,-3] \cup [2,+\infty)$.

7. i) Από τον ορισμό της απόλυτης τιμής έχουμε

$|\alpha| = \alpha \Leftrightarrow \alpha \ge 0$.

Επομένως

$|2x-6| = 2x-6 \Leftrightarrow 2x-6 \ge 0 \Leftrightarrow 2x \ge 6 \Leftrightarrow x \ge 3$.

ii) $|3x-1| = 1-3x \Leftrightarrow 3x-1 \le 0 \Leftrightarrow 3x \le 1 \Leftrightarrow x \le \dfrac{1}{3}$.

8.i) $\frac{|x-1|-4}{2}+\frac{5}{3}<\frac{|x-1|}{3} \Leftrightarrow 3\left(|x-1|-4\right)+10<2|x-1| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x-1|-12+10<2|x-1| \Leftrightarrow |x-1|<2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2<x-1<2 \Leftrightarrow -1<x<3$. Άρα $x \in (-1,3)$.

ii) $\frac{|x|+1}{2}-\frac{2|x|}{3}>\frac{1-|x|}{3} \Leftrightarrow 3\left(|x|+1\right)-4|x|>2\left(1-|x|\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3|x|+3-4|x|>2-2|x| \Leftrightarrow 3|x|-4|x|+2|x|>2-3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|>-1$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

9. $\sqrt{x^2-6x+9} \le 5 \Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2} \le 5 \Leftrightarrow |x-3| \le 5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -5 \le x-3 \le 5 \Leftrightarrow 3-5 \le x \le 5+3 \Leftrightarrow -2 \le x \le 8$.

Άρα $x \in [-2,8]$.

10. Το κέντρο του διαστήματος $(-7, 3)$ είναι το $\frac{-7+3}{2}=-2$.

Έχουμε $x \in (-7,3) \Leftrightarrow -7<x<3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7-(-2)<x-(-2)<3-(-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -7+2<x+2<3+2 \Leftrightarrow -5<x+2<5 \Leftrightarrow |x+2|<5$.

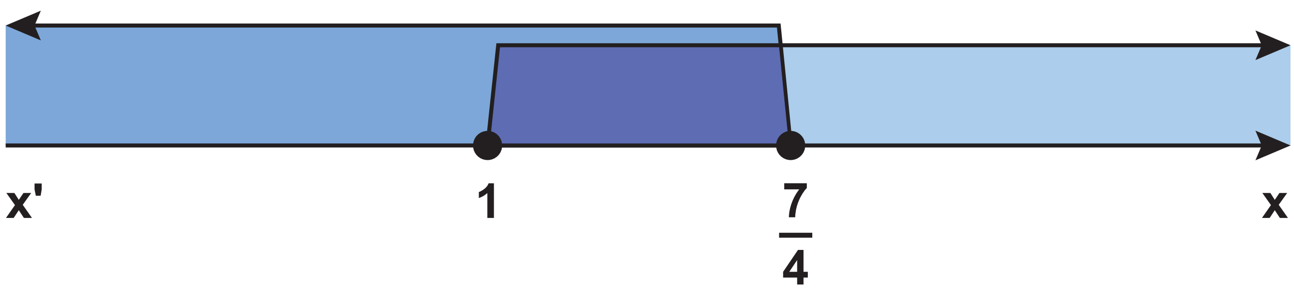
11. $41 \le \frac{9}{5}C+32 \le 50 \Leftrightarrow 41-32 \le \frac{9}{5}C \le 50-32 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9 \le \frac{9}{5}C \le 18 \Leftrightarrow 5 \le C \le 10$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $3 \le 4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$. Ζητάμε επομένως τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι ανισώσεις $3 \le 4x - 1$ και $4x - 1 \le 6$.

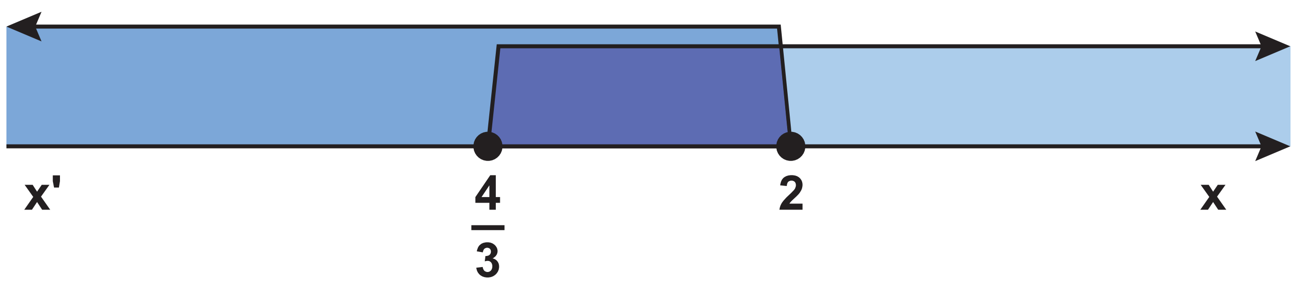
- $3 \le 4x - 1 \Leftrightarrow 4 \le 4x \Leftrightarrow 4x \ge 4 \Leftrightarrow x \ge 1$.
- $4x - 1 \le 6 \Leftrightarrow 4x \le 7 \Leftrightarrow x \le \frac{7}{4}$.



Άρα $x \in \left[1, \frac{7}{4}\right]$.

ii) $-4 \le 2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -4 \le 2 - 3x$ και $2 - 3x \le -2$.

- $-4 \le 2 - 3x \Leftrightarrow 3x \le 6 \Leftrightarrow x \le 2$.
- $2 - 3x \le -2 \Leftrightarrow -3x \le -4 \Leftrightarrow x \ge \frac{4}{3}$.



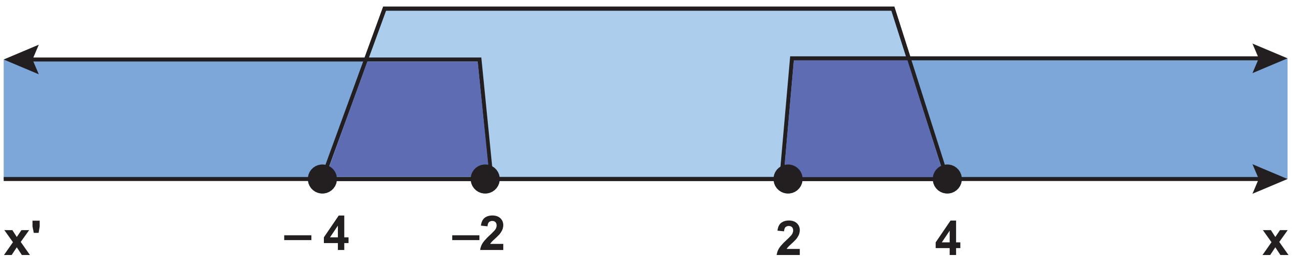
Άρα $x \in \left[\frac{4}{3}, 2\right]$.

I_a_algevra_lisis_a_1-62_18b_v1.indd 75 5/27/17 12:57 AM

2. i) $2 \le |x| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x|$ και $|x| \le 4$.

• $2 \le |x| \Leftrightarrow |x| \ge 2 \Leftrightarrow x \le -2$ ή $x \ge 2$.

• $|x| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x \le 4$.



Άρα $x \in [-4,-2] \cup [2,4]$.

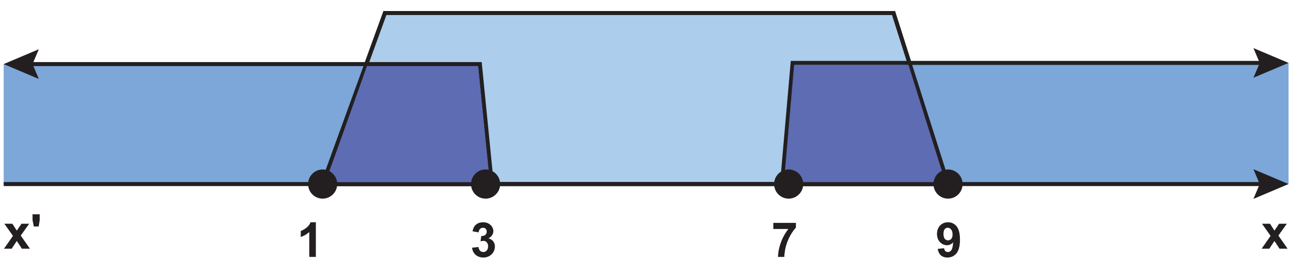
ii) $2 \le |x-5| \le 4 \Leftrightarrow 2 \le |x-5|$ και $|x-5| \le 4$.

• $2 \le |x-5| \Leftrightarrow |x-5| \ge 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x-5 \le -2$ ή $x-5 \ge 2 \Leftrightarrow x \le 3$ ή $x \ge 7$.

• $|x-5| \le 4 \Leftrightarrow -4 \le x-5 \le 4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 5-4 \le x \le 5+4 \Leftrightarrow 1 \le x \le 9$.



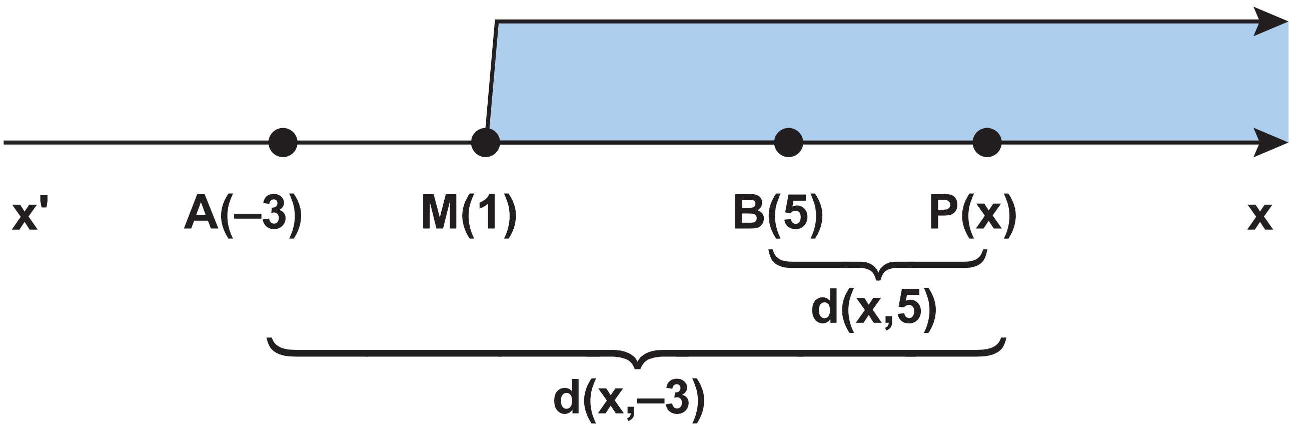
Άρα $x \in [1,3] \cup [7,9]$.

3. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{-3+5}{2} = 1$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί σε λύση της ανίσωσης, τότε:

$$|x-5| \le |x+3| \Leftrightarrow d(x,5) \le d(x,-3) \Leftrightarrow PA \le PB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Ρ βρίσκεται προς τα δεξιά του μέσου Μ του ΑΒ. Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in [1,+\infty)$.

iii) Έχουμε:

$$|x-5| \le |x+3| \Leftrightarrow |x-5|^2 \le |x+3|^2 \Leftrightarrow$$

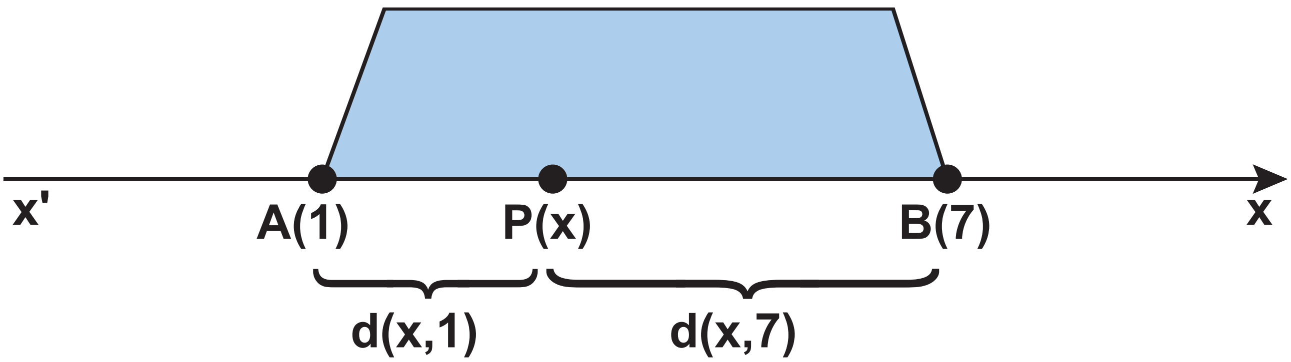
$$\Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 \le x^2 + 6x + 9 \Leftrightarrow -16x \le -16 \Leftrightarrow x \ge 1.$$

4. i) Ο αριθμός που αντιστοιχεί στο μέσο Μ του ΑΒ είναι ο:

$$x_0 = \frac{1+7}{2} = 4$$

ii) Αν Ρ είναι το σημείο του x΄x που αντιστοιχεί στη λύση x της εξίσωσης, τότε έχουμε

$$|x-1|+|x-7| = 6 \Leftrightarrow d(x,1)+d(x,7) = 6 \Leftrightarrow PA+PB = AB.$$



Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Ρ είναι σημείο του τμήματος ΑΒ. Επομένως, οι λύσεις της εξίσωσης είναι τα $x \in [1,7]$.

iii) Σχηματίζουμε τον πίνακα προσήμου των παραστάσεων x – 1 και x – 7.

x	$-\infty$		1		7		$+\infty$
x − 1		−	0	+		+	
x − 7		−		−	0	+	

Διακρίνουμε τώρα τις ακόλουθες περιπτώσεις:

• Αν $x \in (-\infty, 1)$, τότε:

$$|x-1|+|x-7| = 6 \Leftrightarrow (1-x)+(7-x) = 6 \Leftrightarrow x = 1,$$

που απορρίπτεται διότι $1 \notin (-\infty, 1)$.

• Αν $x \in [1,7)$, τότε:

$|x-1|+|x-7| = 6 \Leftrightarrow (x-1)+(7-x) = 6 \Leftrightarrow 0x = 0$, που ισχύει για κάθε $x \in [1,7)$.

• Αν $x \in [7,+\infty)$, τότε:

$|x-1|+|x-7|=6 \Leftrightarrow (x-1)+(x-7)=6 \Leftrightarrow x=7$,

που είναι δεκτή διότι $7 \in [7,+\infty)$.

Επομένως, η εξίσωση αληθεύει για $x \in [1,7]$.

§ 4.2. Ανισώσεις 2ου βαθμού

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Οι ρίζες του τριωνύμου $x^2 - 3x + 2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 3x + 2 = 0$.

Έχουμε: $x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm1}{2} \Leftrightarrow x=1$ ή $x=2$.

Άρα $x^2 - 3x + 2 = (x - 1)(x - 2)$.

ii) Έχουμε: $2x^2-3x-2=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{3\pm5}{4} \Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$ ή $x=2$.

Επομένως

$$2x^2-3x-2=2\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-2)=(2x+1)(x-2).$$

2. i) Είναι: $\dfrac{x^2-3x+2}{2x^2-3x-2}=\dfrac{(x-1)(x-2)}{(2x+1)(x-2)}=\dfrac{x-1}{2x+1}$, $x\neq 2$,

$x\neq -\dfrac{1}{2}$.

ii) Έχουμε: $2x^2+8x-42=0 \Leftrightarrow x^2+4x-21=0$.
Επειδή $\Delta=4^2-4(-21)=100$, θα είναι

$$x_{1,2}=\frac{-4\pm 10}{2} \begin{cases} 3 \\ -7 \end{cases}$$

Επομένως $2x^2+8x-42=2(x+7)(x-3)$.

Άρα: $\dfrac{2x^2+8x-42}{x^2-49}=\dfrac{2(x+7)(x-3)}{(x+7)(x-7)}=\dfrac{2(x-3)}{x-7}$, $x\neq\pm 7$.

iii) • Για την εξίσωση $4x^2-12x+9=0$, έχουμε

$\Delta=12^2-4\cdot 4\cdot 9=144-144=0$, $x_{1,2}=\dfrac{12}{8}=\dfrac{3}{2}$ (διπλή).

Επομένως $4x^2-12x+9=4\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2=(2x-3)^2$

• Για την $2x^2-5x+3=0$, $\Delta=25-24=1$,

$$x_{1,2}=\frac{5\pm 1}{4} \begin{cases} 1 \\ \dfrac{3}{2} \end{cases}$$

Επομένως

$2x^2-5x+3=2\left(x-\dfrac{3}{2}\right)(x-1)=(2x-3)(x-1)$.

Άρα $\dfrac{4x^2-12x+9}{2x^2-5x+3}=\dfrac{(2x-3)^2}{(2x-3)(x-1)}=\dfrac{2x-3}{x-1}$, $x\neq 1$, $x\neq\dfrac{3}{2}$.

3. i) $x^2 - 2x - 15 = 0$, $\Delta = 64$, $x_{1,2} = \dfrac{2 \pm 8}{2} \begin{cases} 5 \\ -3 \end{cases}$

x	$-\infty$		-3		5		$+\infty$
$x^2 - 2x - 15$		$+$	0	$-$	0	$+$	

ii) $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$4x^2 - 4x + 1$		$+$	0	$+$	

iii) $x^2 - 4x + 13 = 0$, $\Delta = 16 - 4 \cdot 13 = 16 - 52 < 0$, $\alpha = 1 > 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$x^2 - 4x + 13$		$+$	

4. i) Το τριώνυμο $-x^2 + 4x - 3$ έχει $\alpha = -1$ και ρίζες τις ρίζες της εξίσωσης

$$-x^2 + 4x - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2} \begin{cases} 3 \\ 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x^2 + 4x - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ii) Έχουμε $-9x^2 + 6x - 1 = -(9x^2 - 6x + 1) = -(3x - 1)^2$.
Επομένως

x	$-\infty$		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$-9x^2 + 6x - 1$		$-$	0	$-$	

iii) Το τριώνυμο $-x^2 + 2x - 2$ έχει
$\Delta = 2^2 - 4(-1)(-2) = 4 - 8 = -4 < 0$ και $\alpha = -1 < 0$.

x	$-\infty$		$+\infty$
$-x^2 + 2x - 2$		$-$	

5. i) Είναι: $5x^2 \leq 20x \Leftrightarrow 5x^2 - 20x \leq 0 \Leftrightarrow 5x(x - 4) \leq 0$.
Το τριώνυμο $5x^2 - 20x$ έχει $\alpha = 5 > 0$ και ρίζες $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$5x^2 - 10x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x \in [0, 4]$.

ii) Είναι: $x^2 + 3x \leq 4 \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 \leq 0$.
Το τριώνυμο $x^2 + 3x - 4$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 1$,

$x_2 = -4$.

x	$-\infty$		-4		1		$+\infty$
x^2+3x-4		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in [-4, 1]$.

6. i) Το τριώνυμο $x^2 - x - 2$ έχει $\alpha = 1 > 0$ και ρίζες $x_1 = 2$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in (-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$.

ii) Το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 5$ έχει $\alpha = 2 > 0$ και ρίζες $x_1 = \frac{5}{2}$, $x_2 = -1$.

x	$-\infty$		-1		$\frac{5}{2}$		$+\infty$
$2x^2-3x-5$		+	0	−	0	+	

Άρα $x \in \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

7. i) Είναι: $x^2+4>4x \Leftrightarrow x^2-4x+4>0 \Leftrightarrow (x-2)^2>0$ που αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ με $x \neq 2$.

ii) Είναι:
$x^2+9 \leq 6x \Leftrightarrow x^2-6x+9 \leq 0 \Leftrightarrow (x-3)^2 \leq 0 \Leftrightarrow x=3$.

8. i) Το τριώνυμο x^2+3x+5 έχει $\alpha=1>0$ και $\Delta=-11<0$. Άρα είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και η ανίσωση $x^2+3x+5\leq 0$ είναι αδύνατη.

ii) Το τριώνυμο $2x^2-3x+20$ έχει $\alpha=2>0$ και $\Delta=-151<0$. Άρα η ανίσωση $2x^2-3x+20>0$ αληθεύει για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

9. Έχουμε $-\frac{1}{4}(x^2-4x+3)>0\Leftrightarrow x^2-4x+3<0$.

Το τριώνυμο x^2-4x+3 έχει $\alpha=1>0$ και ρίζες $x_1=1$, $x_2=3$.

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(1,3)$.

10. Έχουμε $2x-1<x^2-4<12\Leftrightarrow 2x-1<x^2-4$ και $x^2-4<12$.

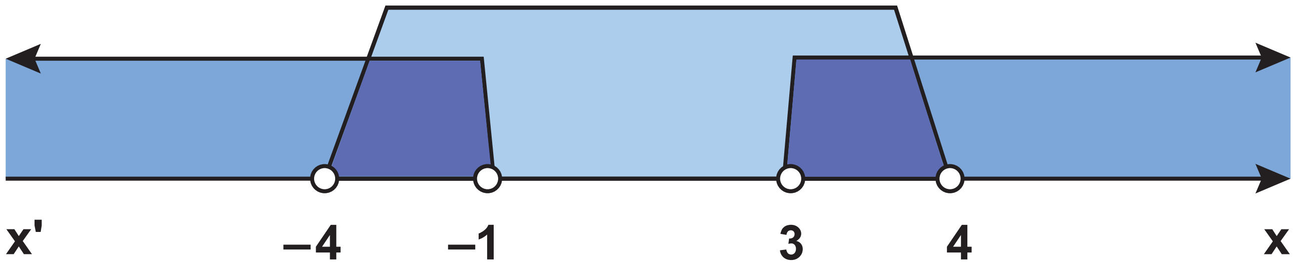
- Είναι: $2x-1<x^2-4\Leftrightarrow x^2-2x-3>0$.
  Το τριώνυμο x^2-2x-3 έχει $\alpha=1>0$ και ρίζες $x_1=3$, $x_2=-1$.

x	$-\infty$		-1		3		$+\infty$
x^2-2x-3		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Επομένως $x^2-2x-3>0\Leftrightarrow x\in(-\infty,-1)\cup(3,+\infty)$.
- Είναι: $x^2-4<12\Leftrightarrow x^2-16<0$.
  Το τριώνυμο x^2-16 έχει $\alpha=1>0$ και ρίζες $x_1=4$, $x_2=-4$.

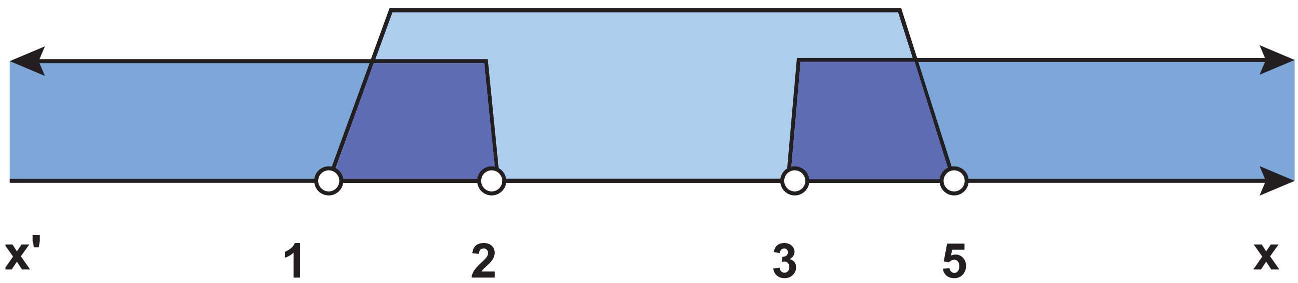
x	$-\infty$ $\quad$ -4 $\quad$ 4 $\quad$ $+\infty$
x^2-16	$+$ $\quad 0 \quad$ $-$ $\quad 0 \quad$ $+$

Επομένως $x^2-16<0 \Leftrightarrow x \in (-4,4)$.



Οι δύο ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-4,-1) \cup (3,4)$.

11. **Έχουμε $x^2-6x+5<0 \Leftrightarrow x \in (1,5)$ και $x^2-5x+6>0 \Leftrightarrow x \in (-\infty,2) \cup (3,+\infty)$.**



Άρα $x \in (1,2) \cup (3,5)$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παράσταση $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=\alpha^2+\beta\cdot\alpha-2\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\cdot1(-2\beta^2)=9\beta^2\geq0$ και ρίζες

$$\alpha_{1,2}=\frac{-\beta\pm3\beta}{2}\left\langle\begin{array}{l}\beta\\-2\beta\end{array}\right.$$

Επομένως $\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2=(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)$.

- Ομοίως η παράσταση $\alpha^2-\alpha\beta-6\beta^2=\alpha^2-\beta\cdot\alpha-6\beta^2$ είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή το α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta=\beta^2-4\cdot1(-6\beta^2)=25\beta^2$

  και ρίζες $\alpha_{3,4}=\dfrac{\beta\pm5\beta}{2}\left\langle\begin{array}{l}3\beta\\-2\beta\end{array}\right.$

  Επομένως $\alpha^2-\alpha\beta-6\beta^2=(\alpha+2\beta)(\alpha-3\beta)$.

ii) $\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta-2\beta^2}{\alpha^2-\alpha\beta-6\beta^2}=\dfrac{(\alpha+2\beta)(\alpha-\beta)}{(\alpha+2\beta)(\alpha-3\beta)}=\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha-3\beta}$, $\alpha\neq3\beta$,

$\alpha\neq-2\beta$.

2. $2x^2+(2\beta-\alpha)x-\alpha\beta=0$.

$\Delta=(2\beta-\alpha)^2-4\cdot2(-\alpha\beta)=4\beta^2-4\alpha\beta+\alpha^2+8\alpha\beta=$
$=4\beta^2+4\alpha\beta+\alpha^2=(2\beta+\alpha)^2\geq0$.

Οι ρίζες της εξίσωσης είναι

$$x_{1,2}=\frac{-(2\beta-\alpha)\pm(2\beta+\alpha)}{4}\left\langle\begin{array}{l}\dfrac{\alpha}{2}\\-\beta\end{array}\right.$$

Άρα $2x^2+(2\beta-\alpha)x-\alpha\beta=$

$$=2\left(x-\frac{\alpha}{2}\right)(x+\beta)=(2x-\alpha)(x+\beta).$$

3. • Έχουμε

$x^2-\alpha x+\beta x-\alpha\beta=x(x-\alpha)+\beta(x-\alpha)=(x-\alpha)(x+\beta)$.

• Το τριώνυμο $x^2-3\alpha x+2\alpha^2$ έχει ρίζες $x_1=\alpha$ και $x_2=2\alpha$ οπότε $x^2-3\alpha x+2\alpha^2=(x-\alpha)(x-2\alpha)$.

Επομένως

$$\frac{x^2-\alpha x+\beta x-\alpha\beta}{x^2-3\alpha x+2\alpha^2}=\frac{(x-\alpha)(x+2\beta)}{(x-\alpha)(x-2\alpha)}=\frac{x+\beta}{x-2\alpha},\ \text{με } x\neq\alpha,$$

$x\neq 2\alpha$.

4. Η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι

$\Delta=9\lambda^2-4\cdot\lambda\cdot(\lambda+5)=9\lambda^2-4\lambda^2-20\lambda=5\lambda^2-20\lambda$.

Η διακρίνουσα είναι ένα τριώνυμο με μεταβλητή λ, $\alpha=5>0$ και ρίζες $\lambda_1=0$ και $\lambda_2=4$.

λ	$-\infty$		0		4		$+\infty$
$5\lambda^2-20\lambda$		+	0	−	0	+	

Επομένως η δοθείσα εξίσωση

i) έχει ρίζες ίσες, αν $\lambda=4$, διότι $\lambda\neq 0$.

ii) έχει ρίζες άνισες αν $\lambda\neq-2$ με $\lambda<0$ ή $\lambda>4$.

iii) είναι αδύνατη αν $0<\lambda<4$.

5. Το τριώνυμο $x^2+3\lambda x+\lambda$ έχει $\alpha=1>0$ και $\Delta=9\lambda^2-4\lambda$.

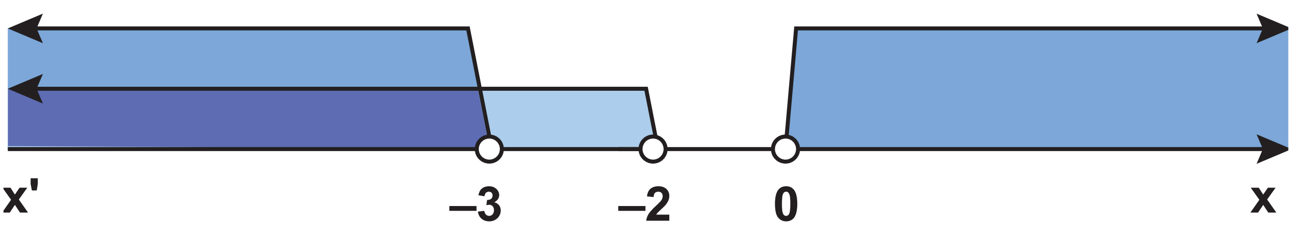
Για να είναι $x^2+3\lambda x+\lambda>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, πρέπει $\Delta<0$.

Έχουμε

$$\Delta<0\Leftrightarrow 9\lambda^2-4\lambda<0\Leftrightarrow\lambda(9\lambda-4)<0\Leftrightarrow\lambda\in\left(0,\frac{4}{9}\right).$$

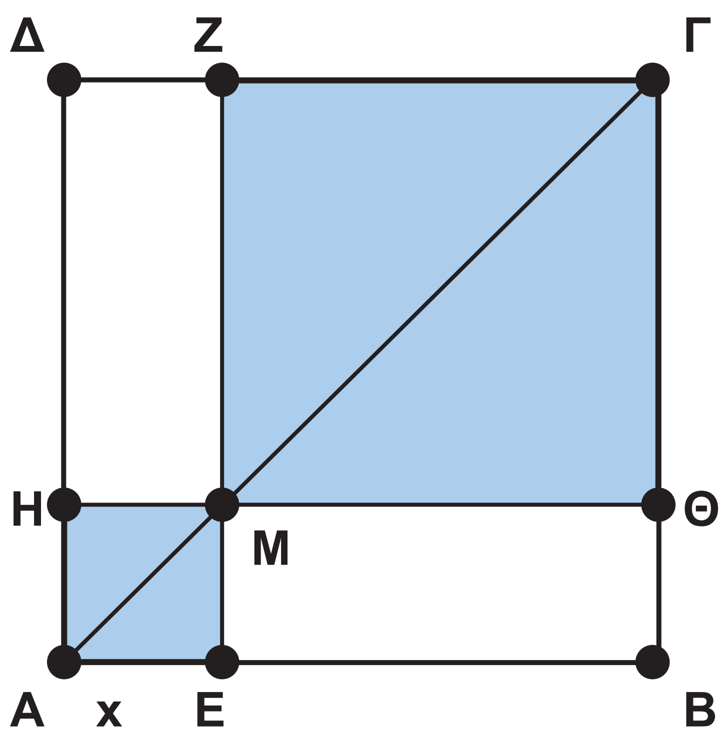
6. i) $\Delta = (-2\lambda)^2 - 4\cdot 3\lambda\cdot(\lambda+2) =$
$= 4\lambda^2 - 12\lambda^2 - 24\lambda = -8\lambda^2 - 24\lambda$.
$\Delta < 0 \Leftrightarrow -8\lambda^2 - 24\lambda < 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 8\lambda^2 + 24\lambda > 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 3\lambda > 0$
$\Leftrightarrow \lambda(\lambda+3) > 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$.

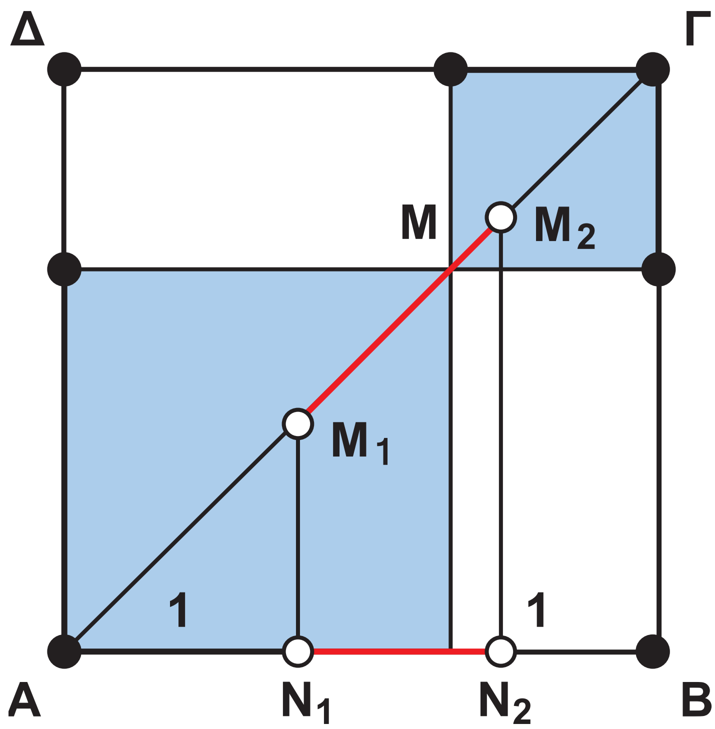
ii) Η ανίσωση $(\lambda+2)x^2 - 2\lambda x + 3\lambda < 0,\ \lambda \neq -2$ αληθεύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν και μόνο αν $\Delta < 0$ και $\lambda + 2 < 0 \Leftrightarrow \lambda < -3$ ή $\lambda > 0$ και $\lambda < -2$.



Άρα $\lambda < -3$.

7. Αν x είναι η πλευρά του ενός τετραγώνου, τότε η πλευρά του άλλου θα είναι $3 - x$ και άρα το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων θα είναι ίσο με $x^2 + (3-x)^2 = 2x^2 - 6x + 9$.





Επομένως, για να είναι το άθροισμα των εμβαδών των σκιασμένων τετραγώνων μικρότερο από 5 θα πρέπει να ισχύει:

$2x^2 - 6x + 9 < 5 \Leftrightarrow 2x^2 - 6x + 4 < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 2$.

Άρα το Μ θα πρέπει να βρίσκεται ανάμεσα στα σημεία M_1 και M_2, τα οποία χωρίζουν τη διαγώνιο ΑΓ σε τρία ίσα μέρη.

8. i) Η παράσταση $\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2 = \alpha^2 - \beta - \alpha + \beta^2$ είναι τριώνυμο ως προς α. Το τριώνυμο αυτό έχει διακρίνουσα $\Delta = (-\beta)^2 - 4 \cdot 1 \cdot \beta^2 = -3\beta^2 \leq 0$. Ο συντελεστής του α^2 είναι $1 > 0$. Άρα $\alpha^2 - \beta \cdot \alpha + \beta^2 \geq 0$, για όλα τα α, $\beta \in \mathbb{R}$.

ii) Έχουμε $A = \dfrac{\alpha}{\beta} + \dfrac{\beta}{\alpha} - 1 = \dfrac{\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2}{\alpha\beta}$.

Επομένως

- Αν α, β ομόσημοι, τότε $A > 0$.
- Αν α, β ετερόσημοι, τότε $A < 0$.

§ 4.3. Ανισώσεις γινόμενο και ανισώσεις πηλίκο
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε:

- $2-3x \geq 0 \Leftrightarrow 2 \geq 3x \Leftrightarrow 3x \leq 2 \Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3}$.
- $x^2-x-2 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2-x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = 1-4 = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-1		$\frac{2}{3}$		2		$+\infty$
$2-3x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
x^2-x-2		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
x^2-x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

2. Έχουμε:

- $-x^2+4 \geq 0 \Leftrightarrow x^2-4 \leq 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-2) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 2$.
- $x^2-3x+2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ ή $x \geq 2$.
- $x^2+x+1 \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$ (αφού $\Delta = -3 < 0$).

x	$-\infty$		-2		1		2		$+\infty$
$-x^2+4$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x^2-3x+2		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	

3. Έστω $P(x) = (x-1)(x^2+2)(x^2-9)$. Έχουμε:

- $x-1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$.
- $x^2+2 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.
- $x^2-9 \geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 3$.

x	$-\infty$		-3		1		3		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+2		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2-9		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $(x-1)(x^2+2)(x^2-9) > 0 \Leftrightarrow x \in (-3,1) \cup (3,+\infty)$.

4. Έστω $P(x) = (3-x)(2x^2+6x)(x^2+3)$. Έχουμε:

- $3-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 3$.
- $2x^2+6x \geq 0 \Leftrightarrow x^2+3x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+3) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -3$ ή $x \geq 0$.
- $x^2+3 > 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		0		3		$+\infty$
$3-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$2x^2+6x$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
x^2+3		$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(3-x)(2x^2+6x)(x^2+3) \leq 0 \Leftrightarrow x \in [-3,0] \cup [3,+\infty)$.

5. Έστω $P(x) = (2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1)$. Έχουμε:

- $2 - x - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + x - 2 \leq 0 \Leftrightarrow$
  $\Leftrightarrow (x+2)(x-1) \leq 0 \Leftrightarrow -2 \leq x \leq 1$.
- $x^2 + 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$, οπότε $(x + 1)^2 > 0$, για $x \neq -1$ και $(x + 1)^2 = 0$ για $x = -1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		$+\infty$
$2 - x - x^2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x^2 + 2x + 1$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(2 - x - x^2)(x^2 + 2x + 1) \leq 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -2] \cup \{-1\} \cup [1, +\infty)$.

6. Έστω $P(x) = (x-3)(2x^2+x-3)(x-1-2x^2) > 0$.

Έχουμε:

- $x-3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 3$.
- $2x^2+x-3 \geq 0 \Leftrightarrow 2\left(x+\dfrac{3}{2}\right)(x-1) \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -\dfrac{3}{2}$ ή $x \geq 1$.
- $x-1-2x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -2x^2+x-1 \geq 0$, που είναι αδύνατη, αφού $\Delta = -7 < 0$, $\alpha = -2 < 0$.

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		3		$+\infty$
$x-3$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x-3$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$x-1-2x^2$		$-$		$-$		$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

Άρα $(x-3)(2x^2+x-3)(x-1-2x^2) > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in \left(-\infty, -\dfrac{3}{2}\right) \cup (1,3)$.

7. i) $\dfrac{x-2}{x+1} > 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2) > 0 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 2$.

ii) $\dfrac{2x+1}{x-3} \leq 0 \Leftrightarrow (2x+1)(x-3) \leq 0$, με $x \neq 3 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} \leq x < 3$.

8. $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\le 0 \Leftrightarrow (x^2-x-2)(x^2+x-2)\le 0,$

με $x^2+x-2\neq 0$.

Έστω $P(x)=(x^2-x-2)(x^2+x-2)$. Έχουμε:

• $x^2-x-2\ge 0 \Leftrightarrow (x+1)(x-2)\ge 0 \Leftrightarrow x\le -1$ ή $x\ge 2$.

• $x^2+x-2\ge 0 \Leftrightarrow (x+2)(x-1)\ge 0 \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x\ge 1$.

x	$-\infty$		-2		-1		1		2		$+\infty$
x^2-x-2		+		+	0	−		−	0	+	
x^2+x-2		+	0	−		−	0	+		+	
$P(x)$		+	0	−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $\dfrac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\le 0 \Leftrightarrow x\in(-2,-1]\cup(1,2]$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\dfrac{2x+3}{x-1}>4 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3}{x-1}-4>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+3-4x+4}{x-1}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-2x+7}{x-1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x-7}{x-1}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2x-7)(x-1)<0 \Leftrightarrow 1<x<\dfrac{7}{2}$.

ii) $\dfrac{x-2}{3x+5}\le 4 \Leftrightarrow \dfrac{x-2}{3x+5}-4\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-2-12x-20}{3x+5}\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-11x-22}{3x+5}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{11x+22}{3x+5}\ge 0 \Leftrightarrow 11(x+2)(3x+5)\ge 0,$

με $x\neq -\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow x\le -2$ ή $x>-\dfrac{5}{3}$.

Άρα $x\in(-\infty,-2]\cup\left(-\dfrac{5}{3},+\infty\right)$.

2. $\dfrac{x^2-3x-10}{x-1}+2\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-3x-10+2x-2}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-12}{x-1}\le 0 \Leftrightarrow (x^2-x-12)(x-1)\le 0$, με $x\neq 1$.

Έστω $P(x)=(x^2-x-12)(x-1)$. Έχουμε:

- $x^2-x-12\ge 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-4)\ge 0 \Leftrightarrow x\le -3$ ή $x\ge 4$.
- $x-1\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 1$.

x	$-\infty$		-3		1		4		$+\infty$
x^2-x-12		+	0	−	0	−	0	+	
$x-1$		−		−	0	+		+	
$P(x)$		−	0	+	0	−	0	+	

Άρα $x\in(-\infty,-3]\cup(1,4]$.

3. i) $\dfrac{x}{3x-5}\le\dfrac{2}{x-1}\Leftrightarrow \dfrac{x}{3x-5}-\dfrac{2}{x-1}\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x(x-1)-2(3x-5)}{(3x-5)(x-1)}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2-x-6x+10}{(3x-5)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^2-7x+10}{(3x-5)(x-1)}\le 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)\le 0$, με $x\neq 1$, $x\neq\dfrac{5}{3}$.

Έστω $P(x)=(3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)$. Έχουμε:

- $3x-5\ge 0\Leftrightarrow x\ge\dfrac{5}{3}$.

• $x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1$.
• $x^2-7x+10\geq 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-5)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq 2$ ή $x\geq 5$.

x	$-\infty$		1		$\frac{5}{3}$		2		5		$+\infty$
$3x-5$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$x^2-7x+10$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $\frac{x}{3x-5}\leq\frac{2}{x-1} \Leftrightarrow (3x-5)(x-1)(x^2-7x+10)\leq 0$,

$x\neq 1,\ x\neq\frac{5}{3} \Leftrightarrow x\in\left(1,\frac{5}{3}\right)\cup[2,5]$.

ii) $\frac{x}{2x-1}\geq\frac{3}{x+2} \Leftrightarrow \frac{x}{2x-1}-\frac{3}{x+2}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x^2+2x-6x+3}{(2x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4x+3}{(2x-1)(x+2)}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)\geq 0$, με $x\neq -2,\ x\neq\frac{1}{2}$.
Έστω $P(x)=(x^2-4x+3)(2x-1)(x+2)$.

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{2}$		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Άρα $x\in(-\infty,-2)\cup\left(\frac{1}{2},1\right]\cup[3,+\infty)$.

4. Έχουμε: $\left|\dfrac{x+1}{x}\right|>2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}<-2$ ή $\dfrac{x+1}{x}>2,\ x\neq 0.$

- $\dfrac{x+1}{x}<-2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}+2<0 \Leftrightarrow \dfrac{3x+1}{x}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (3x+1)x<0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{3}<x<0.$

- $\dfrac{x+1}{x}>2 \Leftrightarrow \dfrac{x+1}{x}-2>0 \Leftrightarrow \dfrac{-x+1}{x}>0 \Leftrightarrow \dfrac{x-1}{x}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-1)<0 \Leftrightarrow 0<x<1.$

Άρα $x \in \left(-\dfrac{1}{3},0\right)\cup(0,1).$

5. Για να έχει η εταιρεία κέρδος πρέπει τα έσοδα να είναι περισσότερα από το κόστος:

$E>K \Leftrightarrow 5x-x^2>7-x \Leftrightarrow 5x-x^2-7+x>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -x^2+6x-7>0 \Leftrightarrow x^2-6x+7<0.$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι $x_1=3-\sqrt{2}$ και $x_2=3+\sqrt{2}.$

Επομένως $x^2-6x+7<0 \Leftrightarrow 3-\sqrt{2}<x<3+\sqrt{2}.$

ή, προσεγγιστικά, $1{,}59<x<4{,}41.$

6. Έχουμε: $\dfrac{20t}{t^2+4}>4 \Leftrightarrow \dfrac{20t}{t^2+4}-4>0 \Leftrightarrow \dfrac{20t-4t^2-16}{t^2+4}>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{-4t^2+20t-16}{t^2+4}>0 \Leftrightarrow \dfrac{4t^2-20t+16}{t^2+4}<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4(t^2-5t+4)(t^2+4)<0 \Leftrightarrow 1<t<4.$