ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 2ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 2ος

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5
ΠΡΟΟΔΟΙ

§ 5.1. Ακολουθίες
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) 3, 5, 7, 9, 11

ii) 2, 4, 8, 16, 32

iii) 2, 6, 12, 20, 30

iv) 0, 1, 2, 3, 4

v) 1, – 0,1, 0,01, – 0,001, 0,0001

vi) $\frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{5}{16}, \frac{33}{32}$

vii) 4, 3, 2, 1, 0

viii) $\frac{\sqrt{2}}{2}, 1, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0, -\frac{\sqrt{2}}{2}$

ix) $2, 1, \frac{8}{9}, 1, \frac{32}{25}$

x) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{5}$

xi) 1, –1, 1, –1, 1.

2. i) $2, \frac{1}{2}, 2, \frac{1}{2}, 2$

ii) 0, 1, 2, 5, 26

iii) 3, 4, 6, 10, 18.

3. i) Έχουμε $\alpha_1 = 6$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = (\nu+1) + 5 - \nu - 5 = 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 6 \\ \alpha_{\nu+1} = 1 + \alpha_\nu \end{cases}$.

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 2$ και $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu} = \dfrac{2^{\nu+1}}{2^\nu} = 2$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 2 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu \end{cases}$.

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 1$ και $\alpha_{\nu+1} = 2^{\nu+1} - 1 = 2 \cdot 2^\nu - 1 =$
$= 2 \cdot (1 + \alpha_\nu) - 1$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \alpha_{\nu+1} = 2\alpha_\nu + 1 \end{cases}$.

iv) Έχουμε $\alpha_1 = 8$ και $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu+1) + 3 - 5\nu - 3 = 5$,

επομένως $\begin{cases} \alpha_1 = 8 \\ \alpha_{\nu+1} = 5 + \alpha_\nu \end{cases}$.

4. i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$

$\alpha_2 = \alpha_1 + 2$

$\alpha_3 = \alpha_2 + 2$

....

$\alpha_\nu = \alpha_{\nu-1} + 2$

Προσθέτουμε τις παραπάνω ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:

$\alpha_\nu = 1 + (\nu - 1)2$ ή $\alpha_\nu = 2\nu - 1$.

ii) $\alpha_1 = 3$

$\alpha_2 = 5\alpha_1$

$\alpha_3 = 5\alpha_2$

....

$\alpha_\nu = 5\alpha_{\nu-1}$

Πολλαπλασιάζουμε τις παραπάνω ισότητες αυτές κατά μέλη και βρίσκουμε:

$\alpha_\nu = 3 \cdot 5^{\nu-1}$

§ 5.2. Αριθμητική πρόοδος

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 7 + (\nu - 1) \cdot 3 = 3\nu + 4$

ii) $\alpha_\nu = 11 + (\nu - 1)2 = 2\nu + 9$

iii) $\alpha_\nu = 5 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu + 8$

iv) $\alpha_\nu = 2 + (\nu - 1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\nu + \frac{3}{2}$

v) $\alpha_\nu = -6 + (\nu - 1)(-3) = -3\nu - 3$.

2. i) $\alpha_{15} = -2 + (15 - 1) \cdot 5 = 68$

ii) $\alpha_{20} = 11 + (20 - 1) \cdot 7 = 144$

iii) $\alpha_{30} = 4 + (30 - 1) \cdot 11 = 323$

iv) $\alpha_{35} = 17 + (35 - 1) \cdot 8 = 289$

v) $\alpha_{50} = 1 + (50 - 1) \cdot \frac{2}{3} = \frac{101}{3}$

vi) $\alpha_{47} = \frac{1}{2} + (47 - 1) \cdot \frac{3}{4} = 35$.

3. i) Έχουμε $\alpha_6 = \alpha_1 + 5\omega$, επομένως $\alpha_1 + 5\omega = 12$ και $\alpha_{10} = \alpha_1 + 9\omega$, επομένως $\alpha_1 + 9\omega = 16$.

Λύνοντας το σύστημα $\begin{cases} \alpha_1 + 5\omega = 12 \\ \alpha_1 + 9\omega = 16 \end{cases}$

βρίσκουμε $\omega = 1$ και $\alpha_1 = 7$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = 14 \\ \alpha_1 + 11\omega = 42 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι $\omega = 4$ και $\alpha_1 = -2$.

iii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 2\omega = 20 \\ \alpha_1 + 6\omega = 32 \end{cases}$

και από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι $\omega = 3$ και $\alpha_1 = 14$.

4. i) Έχουμε το σύστημα

$$\begin{cases} \alpha_1 + 4\omega = -5 \\ \alpha_1 + 14\omega = -2 \end{cases}$$

από τη λύση του συστήματος βρίσκουμε ότι

$$\omega = \frac{3}{10} = 0{,}3 \text{ και } \alpha_1 = -6{,}2$$

Άρα $\alpha_{50} = \alpha_1 + 49\omega = -6{,}2 + 49 \cdot 0{,}3 = 8{,}5$.

ii) Ομοίως έχουμε $\begin{cases} \alpha_1 + 6\omega = 55 \\ \alpha_1 + 21\omega = 145 \end{cases}$

οπότε $\omega = 6$ και $\alpha_1 = 19$

Άρα $\alpha_{18} = \alpha_1 + 17\omega = 19 + 17 \cdot 6 = 121$.

5. i) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$97 = 2 + (\nu - 1)5 \Leftrightarrow 2 + (\nu - 1)5 = 97 \Leftrightarrow 5\nu = 100 \Leftrightarrow \nu = 20.$$

Επομένως ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{20}, δηλαδή ο 20ός.

ii) Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε

$$-97 = 80 + (\nu - 1)(-3) \Leftrightarrow 80 + (\nu - 1)(-3) = -97 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3\nu = -180 \Leftrightarrow \nu = 60$$

Άρα ο ζητούμενος όρος είναι ο α_{60}.

6. i) $\dfrac{10 - 40}{2} = \dfrac{-30}{2} = -15$

ii) $\dfrac{(5x + 1) + 11}{2} = 3x - 2 \Leftrightarrow 5x + 12 = 6x - 4 \Leftrightarrow -x = -16 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 16.$

7. Αν είναι x ο μεγαλύτερος αριθμός και y ο μικρότερος

τότε ισχύει: $\begin{cases} x - y = 10 \\ \dfrac{x + y}{2} = 25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y = 10 \\ x + y = 50 \end{cases}$

Από τη λύση του συστήματος αυτού προκύπτει ότι $x = 30$ και $y = 20$.

8. i) Έχουμε $\alpha_1 = 7$, $\omega = 9 - 7 = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 7 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 92 = \mathbf{1840}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = 0$, $\omega = 2$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 0 + (40 - 1) \cdot 2] = 20 \cdot 78 = \mathbf{1560}$$

iii) Έχουμε $\alpha_1 = 6$, $\omega = 4$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot 6 + (40 - 1) \cdot 4] = 20 \cdot 168 = \mathbf{3360}$$

iv) Έχουμε $\alpha_1 = -7$, $\omega = 5$ και $\nu = 40$, οπότε

$$S = \frac{40}{2} \cdot [2 \cdot (-7) + (40 - 1) \cdot 5] = 20 \cdot 181 = \mathbf{3620}.$$

9. i) Έχουμε $\alpha_1 = 2$, $\omega = -3$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot 2 + (80 - 1)(-3)] = 40 \cdot (-233) = \mathbf{-9320}$$

ii) Έχουμε $\alpha_1 = -\frac{1}{3}$, $\omega = \frac{2}{3}$ και $\nu = 80$, οπότε

$$S = \frac{80}{2} \cdot [2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + (80 - 1) \cdot \frac{2}{3}] = 40 \cdot 52 = \mathbf{2080}.$$

10. Καθένα από τα αθροίσματα είναι άθροισμα διαδοχικών όρων αριθμητικής προόδου.

i) Έχουμε $\alpha_1 = 1$, $\alpha_\nu = 197$ και $\omega = 4$.
Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ οπότε
$197 = 1 + (\nu - 1) \cdot 4$ ή $\nu = 50$.
Επομένως

$$S=\frac{\nu}{2}(\alpha_1+\alpha_\nu)=\frac{50}{2}(1+197)=\mathbf{4950}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_1=9$, $\omega=3$, $\alpha_\nu=90$. Από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ έχουμε $90=9+(\nu-1)\cdot 3$ ή $\nu=28$. Επομένως

$$S_{28}=\frac{28}{2}(9+90)=14\cdot 99=\mathbf{1386}.$$

iii) Έχουμε $\alpha_1=-7$, $\omega=-3$, και $\alpha_\nu=-109$. Από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1+(\nu-1)\omega$ έχουμε
$-109=-7+(\nu-1)(-3)$ ή $\nu=35$.
Επομένως

$$S_{35}=\frac{35}{2}(-7-109)=\frac{35}{2}\cdot(-116)=\mathbf{-2030}.$$

11. i) Έχουμε $\alpha_1=4$, $\omega=4$ και $S_\nu=180$.
Επειδή $S_\nu=\frac{\nu}{2}[2\alpha_1+(\nu-1)\omega]$, έχουμε

$$180=\frac{\nu}{2}[2\cdot 4+(\nu-1)\cdot 4]\Leftrightarrow 180=\frac{\nu}{2}(4\nu+4)\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\nu^2+4\nu=360\Leftrightarrow \nu^2+\nu-90=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu=\frac{-1\pm 19}{2}=\begin{cases}9\\-10\end{cases}$$

Επειδή $\nu\in\mathbb{N}^*$, έπεται ότι $\boldsymbol{\nu=9}$. Άρα πρέπει να πάρουμε τους 9 πρώτους όρους.

ii) Έχουμε $\alpha_1=5$, $\omega=5$ και $S_\nu=180$. Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι $\boldsymbol{\nu=8}$.

12. Έχουμε $\alpha_1=53$, $\omega=-2$ και $\nu=15$.
Επομένως $\alpha_{15}=53+(15-1)(-2)=53-28=\mathbf{25}$

$$S_{15}=\frac{15}{2}(25+53)=\frac{15}{2}\cdot 78=\mathbf{585}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 12 - 4(\nu+1) - 12 + 4\nu$
$= 12 - 4\nu - 4 - 12 + 4\nu = -4.$

Επομένως $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 4$ που σημαίνει ότι η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με διαφορά -4 και $\alpha_1 = 12 - 4 \cdot 1 = \mathbf{8}$.

2. i) Οι περιττοί αριθμοί είναι οι 1, 3, 5, 7 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 1$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{200} = 1 + (200 - 1) \cdot 2 = 399$, οπότε

$$S_{200} - \frac{200}{2} \cdot (1 + 399) = 100 \cdot 400 = \mathbf{40000}.$$

ii) Οι άρτιοι αριθμοί είναι οι 2, 4, 6, 8 ... και αποτελούν αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 2$ και $\omega = 2$.
Έχουμε $\alpha_{300} = 2 + (300 - 1)2 = 600$, οπότε

$$S_{300} - \frac{300}{2} \cdot (2 + 600) = 150 \cdot 602 = \mathbf{90300}.$$

iii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $17 + 19 + ... + 379$ και οι προσθετέοι του, με τη σειρά που είναι γραμμένοι, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 17$, $\omega = 2$ και $\alpha_\nu = 379$.
Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, οπότε $379 = 17 + (\nu - 1)2$ ή $\nu = 182$. Επομένως

$$S_{182} - \frac{182}{2} \cdot (17 + 379) = 91 \cdot 396 = \mathbf{36036}.$$

3. i) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $5 + 10 + 15 + ... + 195$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 5$, $\omega = 5$ και $\alpha_\nu = 195$.
Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε
$195 = 5 + (\nu - 1) \cdot 5 \Leftrightarrow \nu = 39$.
Επομένως

$$S_{39} = \frac{39}{2}(5+195) = 39 \cdot 100 = \mathbf{39000}.$$

ii) Το ζητούμενο άθροισμα είναι το $12 + 15 + ... + 198$ και οι προσθετέοι του είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με $\alpha_1 = 12$, $\omega = 3$ και $\alpha_\nu = 198$.
Από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ έχουμε
$198 = 12 + (\nu - 1) \cdot 3$ ή $\nu = 63$.
Επομένως

$$S_{63} = \frac{63}{2}(12+198) = \frac{63}{2} \cdot 210 = 63 \cdot 105 = \mathbf{6615}.$$

4. i) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = 5(\nu + 1) - 4 - 5\nu + 4 = 5$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu + 5$. Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = 5 \cdot 1 - 4 = 1$, $\omega = 5$ και $\alpha_{30} = 5 \cdot 30 - 4 = 146$, οπότε

$$S_{30} = \frac{30}{2}(1+146) = 15 \cdot 147 = \mathbf{2205}.$$

ii) Έχουμε $\alpha_{\nu+1} - \alpha_\nu = -5(\nu + 1) - 3 + 5\nu + 3$ ή $\alpha_{\nu+1} = \alpha_\nu - 5$. Επομένως η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος με $\alpha_1 = -5 \cdot 1 - 3 = -8$,
$\omega = -5$ και $\alpha_{40} = -5 \cdot 40 - 3 = -203$, οπότε

$$S_{40} = \frac{40}{2}(-8-203) = 20 \cdot (-201) = \mathbf{-4420}.$$

5. Πρέπει από το άθροισμα $1 + 2 + 3 + ... + 200$ να αφαιρέσουμε το άθροισμα $4 + 8 + 12 + ... + 200$ των πολλαπλασίων του 4 και το άθροισμα $9 + 18 + 27 + ... + 198$ των πολλαπλασίων του 9.

Όμως στα πολλαπλάσια του 4 και του 9 περιέχονται και τα πολλαπλάσια του 36 που, με αυτόν τον τρόπο, αφαιρούνται δυο φορές. Πρέπει λοιπόν να προσθέσουμε μια φορά τα πολλαπλάσια του 36 για να βρούμε το πραγματικό άθροισμα. Επομένως

$S = (1 + 2 + 3 + ... + 200)(4 + 8 + 12 + ... + 200) -$
$- (9 + 18 + 27 + ... + 198) + (36 + 72 + ... + 180).$

Κατά τα γνωστά έχουμε:

$$1 + 2 + 3 + ... + 200 = \frac{200}{2}(1 + 200) = 100 \cdot 201 = 20100$$

$$4 + 8 + 12 + ... + 200 = \frac{50}{2}(4 + 200) = 25 \cdot 204 = 5100$$

$$9 + 18 + ... + 198 = \frac{22}{2}(9 + 198) = 11 \cdot 207 = 2277$$

$$36 + 72 + ... + 180 = \frac{5}{2}(36 + 180) = \frac{5}{2} \cdot 216 = 5 \cdot 108 = 540$$

Άρα $S = 20100 - 5100 - 2277 + 540 = \mathbf{13263}$.

6. Το άθροισμα ν όρων της ακολουθίας είναι

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \text{ ή } S_\nu = \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2].$$

Πρέπει $S_\nu > 400 \Leftrightarrow \frac{\nu}{2}[2 \cdot 1 + (\nu - 1) \cdot 2] > 400 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \nu^2 > 400 \Leftrightarrow \nu > 20.$

7. Για την 1η γραμμή του πίνακα έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega = 120 + (12 - 1)(-10) = 120 - 110 = \mathbf{10}$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{12}{2}(120 + 10) = 6 \cdot 130 = \mathbf{780}.$$

Για την 2η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $109 = 5 + (27 - 1)\omega$ ή $\boldsymbol{\omega = 4}$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) = \frac{27}{2}(5 + 109) = \frac{27}{2} \cdot 114 = \mathbf{1539}.$$

Για την 3η γραμμή έχουμε:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\alpha_1 + (\nu - 1)\omega] \text{ ή } 210 = \frac{12}{2}[2\alpha_1 + 11 \cdot 3] \text{ ή } \boldsymbol{\alpha_1 = 1}.$$

$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $\alpha_\nu = 1 + 11 \cdot 3$ ή $\boldsymbol{\alpha_\nu = 34}$.
Για την 4η γραμμή έχουμε:
$\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $-8 = \alpha_1 + 15 \cdot 2$ ή $\boldsymbol{\alpha_1 = -38}$.

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}(\alpha_1 + \alpha_\nu) \text{ ή } S_\nu = \frac{16}{2}(-38 - 8) = 8 \cdot (-46) = \mathbf{-368}.$$

8. Τις πρώτες 12 ώρες το πλήθος των κτύπων είναι

$$1 + 2 + 3 + \ldots + 12 = \frac{12}{2}(1 + 12) = 6 \cdot 13 = 78,$$

άρα συνολικά ακούγονται $2 \cdot 78 = 156$ κτυπήματα.

9. Το πλήθος των θέσεων κάθε σειράς καθισμάτων σχηματίζει αριθμητική πρόοδο με $\alpha_1 = 800$ και $\alpha_{33} = 4160$. Επομένως, λόγω της $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$, είναι $4160 = 800 + (33 - 1) \cdot \omega$ ή $\omega = 105$. Το στάδιο έχει συνολικά:

$$S_{33} = \frac{33}{2}(800 + 4160) = \frac{33}{2} \cdot 4960 = 33 \cdot 2480 = \mathbf{81840}$$

θέσεις.
Η μεσαία σειρά, δηλαδή η 17η σειρά έχει
$\alpha_{17} = 800 + (17 - 1) \cdot 105 = 800 + 16 \cdot 105 = \mathbf{2480}$ θέσεις.

I_a_algevra_lisis_b_63-120_18b_v1.indd 15 5/27/17 12:24 AM

10. Οι όροι της ακολουθίας διαδοχικά θα είναι

$3, x_1, x_2, \dots, x_{10}, 80$ συνολικά 12 όροι.

Ισχύει $\alpha_\nu = \alpha_1 + (\nu - 1)\omega$ ή $80 = 3 + 11\omega$ ή $\omega = 7$, οπότε οι ζητούμενοι αριθμοί είναι

10, 17, 24, 31, 38, 45, 52, 59, 66, 73.

11. Έχουμε

$$1+\frac{\nu-1}{\nu}+\frac{\nu-2}{\nu}+\frac{\nu-3}{\nu}+\dots+\frac{1}{\nu}=$$

$$=\frac{\nu+(\nu-1)+(\nu-2)+\dots+1}{\nu}=\frac{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}{\nu}=\frac{\nu+1}{2}.$$

12. Το 1ο μέτρο θα κοστίσει 20€.

Το 2ο μέτρο θα κοστίσει 25€.

Το 3ο μέτρο θα κοστίσει 30€. κ.τ.λ.

Αν λοιπόν η γεώτρηση πάει ν μέτρα βάθος, τότε το συνολικό κόστος, σύμφωνα με τον τύπο

$S_\nu = \dfrac{(2\alpha_1+(\nu-1)\omega)\nu}{2}$, θα είναι ίσο με:

$$S_\nu = \frac{\nu}{2}[2\cdot 20+(\nu-1)5].$$

Πρέπει επομένως

$$\frac{\nu}{2}[2\cdot 20+(\nu-1)5] \le 4.700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 20\nu + 2{,}5\nu(\nu-1) \le 4.700 \Leftrightarrow 8\nu+\nu(\nu-1) \le 1880 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \nu^2+7\nu-1880 \le 0 \Leftrightarrow (\nu-40)(\nu+47) \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -47 \le \nu \le 40$$

Άρα η γεώτρηση μπορεί να πάει 40m βάθος.

§ 5.3. Γεωμετρική πρόοδος
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) $\alpha_\nu = 3 \cdot 2^{\nu-1}$,

ii) $\alpha_\nu = \frac{2}{3} \cdot 3^{\nu-1} = 2 \cdot 3^{\nu-2}$,

iii) $\alpha_\nu = 9 \cdot 3^{\nu-1} = 3^{\nu+1}$,

iv) $\alpha_\nu = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = \frac{1}{2^{\nu+1}}$,

v) $\alpha_\nu = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} = 2^4 \cdot \frac{1}{2^{\nu-1}} = \frac{1}{2^{\nu-5}}$,

vi) $\alpha_\nu = 18 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{\nu-1} = 2 \cdot 3^2 \cdot \frac{1}{3^{\nu-1}} = \frac{2}{3^{\nu-3}}$,

vii) $\alpha_\nu = 1 \cdot (0{,}4)^{\nu-1} = 0{,}4^{\nu-1}$,

viii) $\alpha_\nu = (-2) \cdot (-2)^{\nu-1} = (-2)^\nu$,

ix) $\alpha_\nu = (-3) \cdot (-3)^{\nu-1} = (-3)^\nu$.

2. i) $\alpha_9 = \frac{1}{4} \cdot 2^8 = 64$,

ii) $\alpha_7 = 2 \cdot 3^6 = 1458$,

iii) $\alpha_8 = 729 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^7 = \frac{1}{3}$,

iv) $\alpha_{10} = 1 \cdot (-2)^9 = -512$,

v) $\alpha_9 = \frac{8}{27} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^8 = \frac{2^3}{3^3} \cdot \frac{3^8}{2^8} = \frac{3^5}{2^5} = \left(\frac{3}{2}\right)^5$.

3. i) $\dfrac{32}{3}=\alpha_1\cdot 2^5$ ή $\alpha_1=\dfrac{32}{3\cdot 2^5}=\dfrac{1}{3}$,

ii) $\dfrac{27}{128}=\alpha_1\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^3$ ή $\dfrac{3^3}{2^7}=\alpha_1\cdot\dfrac{3^3}{2^6}$, άρα $\alpha_1=\dfrac{1}{2}$.

4. i) $\begin{cases}12=\alpha_1\cdot\lambda^2\\96=\alpha_1\cdot\lambda^5\end{cases}$, άρα $\dfrac{\alpha_1\lambda^5}{\alpha_1\lambda^2}=\dfrac{96}{12}$ ή $\lambda^3=8$, άρα $\boldsymbol{\lambda=2}$.

ii) $\begin{cases}\dfrac{8}{3}=\alpha_1\cdot\lambda\\\dfrac{64}{81}=\alpha_1\cdot\lambda^4\end{cases}$, άρα $\dfrac{\alpha_1\lambda^4}{\alpha_1\lambda}=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$ ή $\lambda^3=\left(\dfrac{2}{3}\right)^3$, άρα $\boldsymbol{\lambda=\dfrac{2}{3}}$.

5. i) $\begin{cases}125=\alpha_1\cdot\lambda^3\\\dfrac{125}{64}=\alpha_1\cdot\lambda^9\end{cases}$, άρα $\dfrac{\alpha_1\lambda^9}{\alpha_1\lambda^3}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$, ή $\lambda^6=\left(\dfrac{1}{2}\right)^6$,

άρα $\lambda=\pm\dfrac{1}{2}$.

Για $\lambda=\dfrac{1}{2}$ έχουμε $125=\alpha_1\cdot\dfrac{1}{2^3}$ ή $\alpha_1=125\cdot 2^3=1000$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{14}=1000\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^{13}=\dfrac{1000}{8192}$.

Για $\lambda=-\dfrac{1}{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

ii) $\begin{cases}\sqrt{2}=\alpha_1\cdot\lambda^{12}\\32\sqrt{2}=\alpha_1\cdot\lambda^{22}\end{cases}$, άρα $\dfrac{\alpha_1\lambda^{22}}{\alpha_1\lambda^{12}}=\dfrac{32\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ ή $\lambda^{10}=2^5$

ή $\lambda = \pm\sqrt{2}$.

Για $\lambda = \sqrt{2}$ έχουμε $\sqrt{2} = \alpha_1 \cdot 2^6$ ή $\alpha_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6}$.

Έχουμε τώρα $\alpha_{21} = \dfrac{\sqrt{2}}{2^6} \cdot 2^{10} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$.

Για $\lambda = -\sqrt{2}$ εργαζόμαστε ομοίως.

6. Έστω α_ν ο όρος που ισούται με 768. Τότε $768 = 3 \cdot 2^{\nu-1}$ ή $2^{\nu-1} = 256$ ή $2^{\nu-1} = 2^8$, οπότε $\nu - 1 = 8$, άρα $\boldsymbol{\nu = 9}$.

7. i) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 4 \cdot 2^{\nu-1}$.
Αν $4 \cdot 2^{\nu-1} > 2000$, τότε $2^{\nu+1} > 2000$.
Έχουμε $2^{10} = 1024$ και $2^{11} = 2048$.
Άρα πρέπει $\nu + 1 > 10$ ή $\nu > 9$.
Επομένως ο πρώτος όρος που υπερβαίνει το 2000 είναι ο 10ος όρος.

ii) Ο νος όρος της προόδου είναι $\alpha_\nu = 128 \cdot \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\nu-1}$.

Αν $128 \cdot \dfrac{1}{2^{\nu-1}} < 0{,}25$, τότε $2^{\nu-1} > \dfrac{128}{0{,}25}$ ή $2^{\nu-1} > 512$.

Έχουμε $2^8 = 256$ και $2^9 = 512$. Άρα πρέπει $\nu - 1 > 9$ ή $\nu > 10$. Επομένως ο πρώτος όρος που είναι μικρότερος του 512 είναι ο 11ος.

8. i) $\sqrt{5\cdot 20}=\sqrt{100}=\mathbf{10}$, $\sqrt{\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{3}}=\sqrt{1}=\mathbf{1}$.

ii) Ισχύει $(x+1)^2=(x-4)(x-19)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2+2x+1=x^2-23x+76\ \Leftrightarrow 25x=75\Leftrightarrow \mathbf{x=3}$.

9. i) $S_{10}=1\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=\mathbf{1023}$.

ii) $S_{10}=3\cdot\frac{3^{10}-1}{3-1}=3\cdot\frac{59048}{2}=3\cdot 29524=\mathbf{88572}$.

iii) $S_{10}=-4\cdot\frac{(-2)^{10}-1}{-2-1}=-4\cdot\frac{1023}{-3}=4\cdot 341=\mathbf{1364}$.

10. i) Από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε $8192=2\cdot 4^{\nu-1}$ ή $4^{\nu-1}=4096=4^6$, άρα $\nu-1=6$ ή $\nu=7$.
Επομένως

$$S_7=2\cdot\frac{4^7-1}{4-1}=2\cdot\frac{16383}{3}=2\cdot 5461=\mathbf{10922}.$$

ii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu=\alpha_1\lambda^{\nu-1}$ έχουμε

$$\frac{1}{512}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1} \text{ ή } \left(\frac{1}{2}\right)^{\nu-1}=\frac{1}{2048}=\left(\frac{1}{2}\right)^{11},$$

άρα $\nu-1=11$ ή $\nu=12$.
Επομένως

$$S_{12}=4\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{12}-1}{\frac{1}{2}-1}=4\cdot\frac{\frac{1}{4096}-1}{-\frac{1}{2}}=$$

$$= 4 \cdot \frac{\frac{4095}{4096}}{\frac{1}{2}} = 4 \cdot \frac{2 \cdot 4095}{4096} = \frac{4095}{512} \approx 8.$$

iii) Ομοίως από τον τύπο $\alpha_\nu = \alpha_1 \lambda^{\nu-1}$ έχουμε $256 = 1 \cdot (-2)^{\nu-1}$ ή $(-2)^8 = (-2)^{\nu-1}$, άρα $\nu - 1 = 8$ ή $\nu = 9$. Επομένως

$$S_9 = 1 \cdot \frac{(-2)^9 - 1}{-2 - 1} = \frac{-513}{-3} = \mathbf{171}.$$

11. Έχουμε $\alpha_1 = 3$ και,

σε 1 ώρα	$\alpha_2 = 3 \cdot 2$
σε 2 ώρες	$\alpha_3 = 3 \cdot 2^2$
σε 3 ώρες	$\alpha_4 = 3 \cdot 2^3$ κτλ. και,
σε 12 ώρες	$\alpha_{13} = 3 \cdot 2^{12} =$ **12288** βακτηρίδια.

12. Έχουμε $\alpha_1 = 60$ και,

μετά την 1η αναπήδηση $\alpha_2 = 60 \cdot \frac{1}{3}$

μετά την 2η αναπήδηση $\alpha_3 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2$

μετά την 3η αναπήδηση $\alpha_4 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3$

μετά την 4η αναπήδηση

$$\alpha_5 = 60 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = \frac{60}{81} = \frac{20}{27} \approx 0{,}74 \text{ m}.$$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Έχουμε $\dfrac{\alpha_{\nu+1}}{\alpha_\nu}=\dfrac{\dfrac{2^{\nu+1}}{3^{\nu+2}}}{\dfrac{2^\nu}{3^{\nu+1}}}=\dfrac{2^{\nu+1}\cdot 3^{\nu+1}}{2^\nu\cdot 3^{\nu+2}}=\dfrac{2}{3}$ ή $\alpha_{\nu+1}=\alpha_\nu\cdot\dfrac{2}{3}$.

Επομένως η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με $\lambda=\dfrac{2}{3}$ και $\alpha_1=\dfrac{2}{9}$.

2. Πρέπει

$$\left(\sqrt[4]{10\nu+4}^{\,2}\right)=\sqrt{\nu-5}\cdot\sqrt{\nu+2}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{10\nu+4}=\sqrt{(\nu-5)(\nu+2)}\Leftrightarrow(\nu-5)(\nu+2)=10\nu+4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\nu^2-13\nu-14=0\Leftrightarrow\nu=\frac{13\pm\sqrt{225}}{2}=\frac{13\pm15}{2}=\begin{cases}14\\-1\end{cases}$$

Με δοκιμή βρίσκουμε ότι μόνο η τιμή $\nu=14$ είναι δεκτή.

3. i) Έστω μια γεωμετρική πρόοδος με πρώτο όρο α_1 και λόγο λ. Τότε οι όροι της προόδου είναι:

$\alpha_1,\ \alpha_1\lambda,\ \alpha_1\lambda^2,\ \alpha_1\lambda^3,\ ....,\ \alpha_1\lambda^\nu,\ ...$

και τα τετράγωνα των όρων αυτών είναι:

$\alpha_1^2,\ \alpha_1^2\lambda^2,\ \alpha_1^2\lambda^4,\ \alpha_1^2\lambda^6,\ ....,\ \alpha_1^2\lambda^{2\nu}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^2 και λόγο λ^2.

ii) Αν υψώσουμε τους όρους της προόδου στην k έχουμε:

$\alpha_1^k,\ \alpha_1^k\lambda^k,\ \alpha_1^k\lambda^{2k},\ \alpha_1^k\lambda^{3k},\ ....,\ \alpha_1^k\lambda^{\nu k}$.

Παρατηρούμε ότι η ακολουθία αυτή είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο α_1^k και λόγο λ^k.

4. i) Έχουμε $\alpha_1+\alpha_1\lambda=3+\sqrt{3}$ (1)

και $\alpha_1\cdot\dfrac{\lambda^4-1}{\lambda-1}=4\left(3+\sqrt{3}\right)$ (2).

Οι (1) και (2) σχηματίζουν το σύστημα

$$\begin{cases}\alpha_1(\lambda+1)=3+\sqrt{3}\\ \alpha_1(\lambda^3+\lambda^2+\lambda+1)=4\left(3+\sqrt{3}\right)\end{cases}.$$

Με διαίρεση κατά μέλη των εξισώσεων του συστήματος προκύπτει

$\lambda^3+\lambda^2-3\lambda-3=0\Leftrightarrow\lambda^2(\lambda+1)-3(\lambda+1)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow(\lambda+1)(\lambda^2-3)=0\Leftrightarrow\lambda=-1$ ή $\lambda=\sqrt{3}$ ή $\lambda=-\sqrt{3}$.

Αντικαθιστούμε τις τιμές αυτές του λ στην (1) και έχουμε

Για $\lambda=-1$, $\quad\alpha_1\cdot 0=3+\sqrt{3}$ (αδύνατο)

Για $\lambda=\sqrt{3}$, $\quad\alpha_1\left(\sqrt{3}+1\right)=3+\sqrt{3}$ ή $\alpha_1=\sqrt{3}$

Για $\lambda=-\sqrt{3}$, $\alpha_1=\left(1-\sqrt{3}\right)=3+\sqrt{3}$ ή $\alpha_1=-\left(3+2\sqrt{3}\right)$.

5. Έχουμε $\alpha_1\lambda+\alpha_1\lambda^5=34\Leftrightarrow\alpha_1\lambda(\lambda^4+1)=34$ (1)

και $\alpha_1\lambda^2+\alpha_1\lambda^6=68\Leftrightarrow\alpha_1\lambda^2(\lambda^4+1)=68$ (2)

Με διαίρεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε $\lambda=2$, οπότε με αντικατάσταση στην (1) βρίσκουμε $\alpha_1=1$.

Άρα $S_{10}=1\cdot\dfrac{2^{10}-1}{2-1}=1024-1=\mathbf{1023}$.

6. Αν $α_ν$ είναι ο πληθυσμός της χώρας ύστερα από ν χρόνια από σήμερα, τότε τον επόμενο χρόνο, δηλαδή ύστερα από ν + 1 χρόνια από σήμερα, θα είναι (σε εκατομμύρια).

$$α_{ν+1} = α_ν + \frac{2}{100} \cdot α_ν = 1,02 \cdot α_ν .$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$\boldsymbol{α_{ν+1} = 1,02 \cdot α_ν}$.

Επειδή $α_1 = 90 \cdot 1,02$ και $α_{ν+1} = 1,02 \cdot α_ν$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $α_1 = 90 \cdot 1,02$ και λόγο $λ = 1,02$, επομένως

$α_ν = 90 – 1,02 \cdot 1,02^{ν-1}$ ή $\boldsymbol{α_ν = 90 \cdot 1,02^ν}$.

Ύστερα από 10 χρόνια ο πληθυσμός της χώρας θα είναι $α_{10} = 90 \cdot 1,02^{10} \approx 90 \cdot 1,22$ ή 109800000 κάτοικοι.

7. Αν $I_ν$ είναι η ένταση του φωτός αφού διέλθει μέσα από ν φίλτρα, τότε η έντασή του αφού διέλθει και μέσα από το επόμενο φίλτρο, δηλαδή αφού διέλθει συνολικά μέσα από ν + 1 φίλτρα θα είναι

$$I_{ν+1} = I_ν - \frac{10}{100} I_ν = 0,9 I_ν .$$

Άρα ο αναδρομικός τύπος της ακολουθίας είναι

$I_{ν+1} = 0,9I_ν$.

Επειδή $I_1 = I_0 \cdot 0,9$ και $I_{ν+1} = 0,9 \cdot I_ν$ η ακολουθία είναι γεωμετρική πρόοδος με 1ο όρο $I_0 \cdot 0,9$ και λόγο $λ = 0,9$, άρα $I_ν = I_0 \cdot 0,9 \cdot 0,9^{ν-1}$ ή

$\boldsymbol{I_ν = I_0 \cdot 0,9^ν}$.

Για ν = 10 έχουμε $I_{10} = I_0 \cdot 0,9^{10} \approx 0,35 \cdot I_0$.

8. i) Οι 11 ενδιάμεσοι τόνοι με τους δύο ακραίους C΄ και C΄΄ θα σχηματίζουν γεωμετρική πρόοδο με $\alpha_1 = 261$ και $\alpha_{13} = 522$.
Επειδή $\alpha_{13} = \alpha_1 \cdot \lambda^{12}$ έχουμε $522 = 261 \cdot \lambda^{12}$ και επομένως $\lambda = \sqrt[12]{2}$.

ii) Η συχνότητα του 5ου τόνου θα είναι

$$\alpha_5 = \alpha_1 \cdot \lambda^5 = 261 \cdot \sqrt[12]{2^5}.$$

9. i) Αν D_ν είναι η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αφού εφαρμόσουμε τη διαδικασία ν φορές, τότε η ποσότητα του νερού στο ψυγείο, αν εφαρμόσουμε τη διαδικασία μια ακόμα φορά, δηλαδή ν + 1 συνολικά φορές θα είναι

$$D_{\nu+1} = D_\nu - \frac{D_\nu}{40} \cdot 4 = D_\nu - 0{,}1 \cdot D_\nu = (1 - 0{,}1)D_\nu = 0.9D_\nu.$$

Επομένως $D_{\nu+1} = 0{,}9\, D_\nu$ και $D_1 = 36$ όσο το νερό που μένει την 1η φορά. Βλέπουμε ότι η ακολουθία D_ν είναι γεωμετρική πρόοδος με $D_1 = 36$ και λόγο $\lambda = 0{,}9$, άρα $D_\nu = 36 \cdot 0{,}9^{\nu-1}$.

ii) $D_7 = 36 \cdot 0{,}9^6 \approx 19{,}13$, οπότε η ποσότητα του αντιπηκτικού είναι περίπου $40 - 19{,}13 = 20{,}87\ell$.

10. Αφού διπλασιάζουμε κάθε φορά τον ρυθμό των κόκκων του ρυζιού έχουμε $\alpha_{\nu+1} = 2 \cdot \alpha_\nu$. Επειδή στο 1ο τετραγωνάκι βάζουμε 1 κόκκο ρύζι έχουμε $\alpha_1 = 1$.
Επομένως η ακολουθία α_ν, είναι γεωμετρική πρόοδος με $\alpha_1 = 1$ και λόγο $\lambda = 2$, άρα
$\alpha_\nu = 1 \cdot 2^{\nu-1}$ ή $\alpha_\nu = 2^{\nu-1}$.
Συνολικά σε όλα τα τετραγωνάκια πρέπει να μπουν

$$S_{64} = 1 \cdot \frac{2^{64}-1}{2-1} = 2^{64}-1 \text{ κόκκοι ρύζι.}$$

Το ρύζι αυτό είναι περίπου σε κιλά

$$\frac{2^{64}-1}{20000} \cong \frac{1{,}8447 \cdot 10^{19}}{2 \cdot 10^4} = 0{,}9223 \cdot 10^{15} = 9{,}223 \cdot 10^{14} \text{ κιλά}$$

$$= 9{,}223 \cdot 10^{11} \text{ τόνοι.}$$

11. i) Έχουμε $S_1 = 3$

$S_2 = 3 \cdot 4 = 12$

$S_3 = 12 \cdot 4 = 48$

Παρατηρούμε ότι το πλήθος των πλευρών κάθε σχήματος προκύπτει από το πλήθος των πλευρών του προηγούμενου σχήματος με πολλαπλασιασμό επί 4.
Επομένως $S_{\nu+1} = 4 \cdot S_\nu$, οπότε

$S_1 = 3$

$S_2 = 4S_1$

$S_3 = 4S_2$

....

$S_\nu = 4S_{\nu-1}$

Πολλαπλασιάζουμε τις ισότητες αυτές κατά μέλη και έχουμε $S_\nu = 3 \cdot 4^{\nu-1}$

ii) Έχουμε $U_1 = 3 \cdot 1 = 3$

$$U_2 = 3 \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} = 3 \cdot \frac{4}{3} = 4$$

$$U_3 = 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot \frac{1}{9} = 4 \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{3}$$

$$U_{\nu+1} = U_\nu \cdot \frac{4}{3}.$$

Εργαζόμενοι όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι

$$U_\nu = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^{\nu-1}.$$

§ 5.4. Ανατοκισμός - Ίσες καταθέσεις

1. $\alpha_5 = 5.000\left(1 + \frac{20}{100}\right)^5 = 5.000 \cdot (1{,}05)^5 = 5.000 \cdot 1{,}27628 =$

$= 6381{,}4$ €.

2. $\alpha_{10} = \alpha(1+\tau)^{10} \Leftrightarrow 50.000 = \alpha\left(1 + \frac{3}{100}\right)^{10} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}03^{10} = 50.000 \Leftrightarrow \alpha \cdot 1{,}34391 = 50.000 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha = \frac{50}{1{,}34391} = 37.204{,}87$€.

3. $\alpha_5 = (1+\tau)^5 \Leftrightarrow 12.762 = 10.000(1+\tau)^5 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\tau)^5 = \frac{12.762}{10.000} \Leftrightarrow (1+\tau)^5 = 1{,}2762 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1 + \tau = 1{,}05 \Leftrightarrow \tau = 0{,}05 = 5\%.$

4. $$\sum = 5.000\left(1+\frac{3}{100}\right)\cdot\frac{\left(1+\left(\frac{3}{100}\right)\right)^5-1}{\frac{3}{100}} =$$

$$= 5.000\cdot 1{,}03\cdot\frac{1{,}03^5-1}{\frac{3}{100}} = 5.000\cdot 1{,}03\cdot\frac{0{,}159274}{0{,}03} \approx$$

$$\approx 27.342{,}05€.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6
ΒΑΣΙΚΕΣ ΕΝΝΟΙΕΣ ΤΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 6.1. Η έννοια της συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Πρέπει $x-1 \neq 0$, δηλαδή $x \neq 1$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $\mathbb{R}-\{1\}=(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

ii) Πρέπει $x^2-4x \neq 0 \Leftrightarrow x(x-4)\neq 0 \Leftrightarrow x \neq 0$ και $x \neq 4$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το: $\mathbb{R}-\{0,4\}=(-\infty,0)\cup(0,4)\cup(4,+\infty)$.

iii) Πρέπει $x^2+1 \neq 0$ που ισχύει πάντοτε. Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι όλο το $\mathbb{R}$.

iv) Πρέπει $|x|+x \neq 0 \Leftrightarrow |x| \neq -x \Leftrightarrow x>0$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(0,+\infty)$.

2. i) Πρέπει: $x-1 \geq 0$ και $2-x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \leq x \leq 2$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1,2]$.

ii) Πρέπει $x^2-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq -2$ ή $x \geq 2$ αφού οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4 είναι οι αριθμοί -2 και 2.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$.

iii) Ομοίως, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[1,3]$ αφού οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί 1 και 3.

iv) Πρέπει $\sqrt{x}-1 \neq 0 \Leftrightarrow \sqrt{x} \neq 1 \Leftrightarrow x \geq 0$ και $x \neq 1$.
Άρα, το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το σύνολο $[0,+\infty)-\{1\}=[0,1)\cup(1,+\infty)$.

3. Είναι

$f(-5)=(-5)^3=-125.$

$f(0)=2\cdot 0+3=3.$

$f(6)=2\cdot 6+3=15.$

4. i) Έστω x ο ζητούμενος φυσικός αριθμός. Τότε, ο τύπος της συνάρτησης θα προκύψει ως εξής:

$$x\xrightarrow{+1}x+1\xrightarrow{\cdot 4}(x+1)\cdot 4\xrightarrow{+x^2}(x+1)4+x^2.$$

Επομένως, θα είναι

$f(x)=(x+1)4+x^2=x^2+4x+4=(x+2)^2$

δηλαδή $f(x)=(x+2)^2,\ x\in\mathbb{N}.$ (1)

Έτσι θα έχουμε $f(0)=2^2=4$, $f(1)=3^2=9$,

$f(2)=4^2=16$ και $f(3)=5^2=25$.

ii) Επειδή $x>0$, έχουμε:

✔ $f(x)=36\Leftrightarrow(x+2)^2=6^2\Leftrightarrow x+2=6\Leftrightarrow x=4.$

✔ $f(x)=49\Leftrightarrow(x+2)^2=7^2\Leftrightarrow x=5.$

✔ $f(x)=100\Leftrightarrow(x+2)^2=10^2\Leftrightarrow x=8.$

✔ $f(x)=144\Leftrightarrow(x+2)^2=12^2\Leftrightarrow x=10.$

5. i) Για $x\neq 1$ έχουμε:

$$f(x)=7\Leftrightarrow\frac{4}{x-1}+5=7\Leftrightarrow\frac{4}{x-1}=2$$

$$\Leftrightarrow 2(x-1)=4\Leftrightarrow x-1=2\Leftrightarrow x=3.$$

ii) Για $x\neq 0,\ 4$ έχουμε:

$$g(x)=2\Leftrightarrow\frac{x^2-16}{x^2-4x}=2\Leftrightarrow\frac{(x-4)(x+4)}{x(x-4)}=2$$

$$\Leftrightarrow\frac{x+4}{x}=2\Leftrightarrow x+4=2x\Leftrightarrow x=4,\text{ αδύνατη.}$$

iii) Για $x\in\mathbb{R}$ έχουμε:

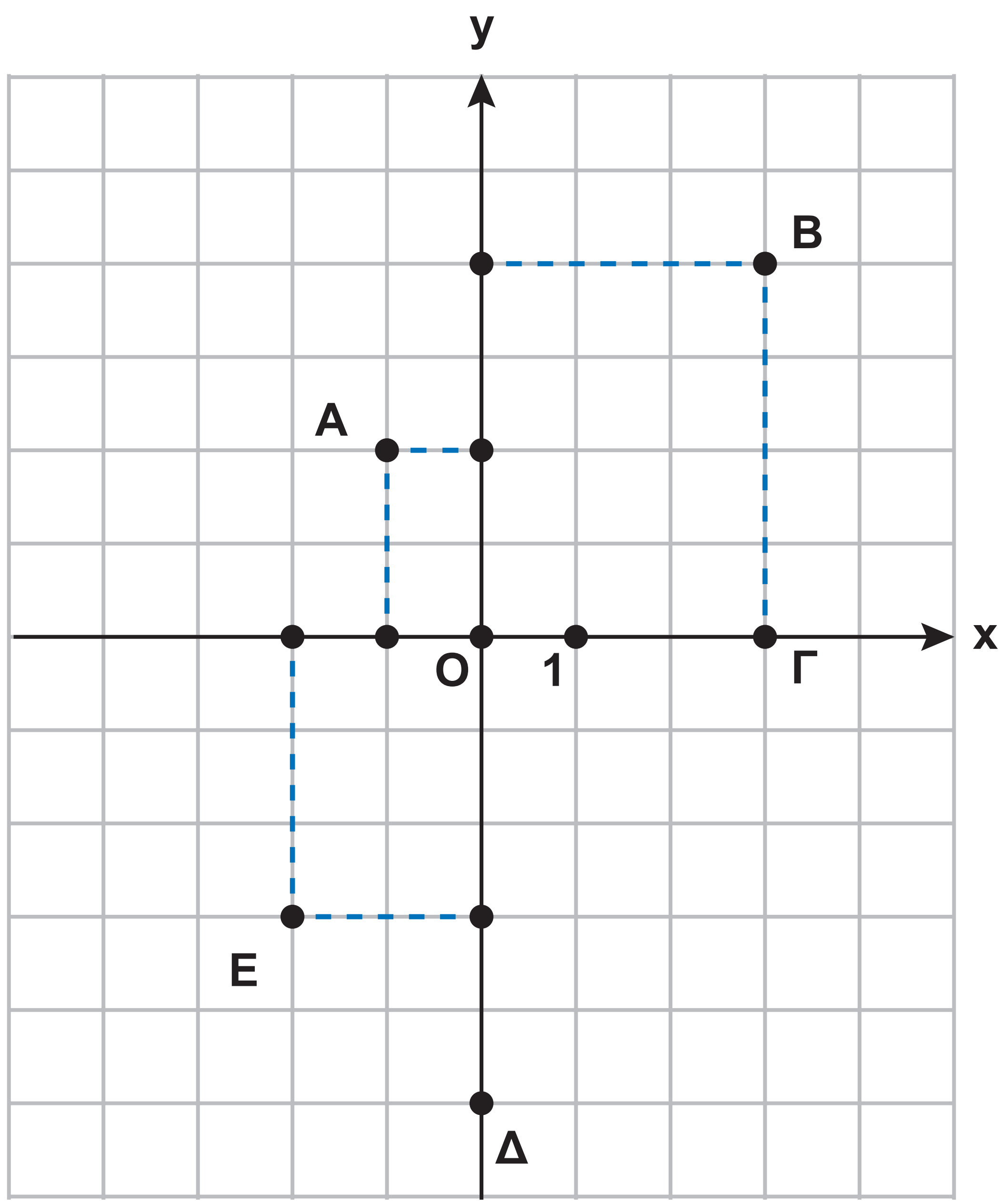
$$h(x)=\frac{1}{5}\Leftrightarrow\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{5}\Leftrightarrow x^2+1=5\Leftrightarrow x^2=4\Leftrightarrow x=2$$

ή $x=-2$.

§ 6.2. Γραφική παράσταση συνάρτησης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Τα σημεία είναι αποτυπωμένα στο παρακάτω σχήμα.



2. Πρέπει $2 < x < 5$ και $1 < y < 6$.

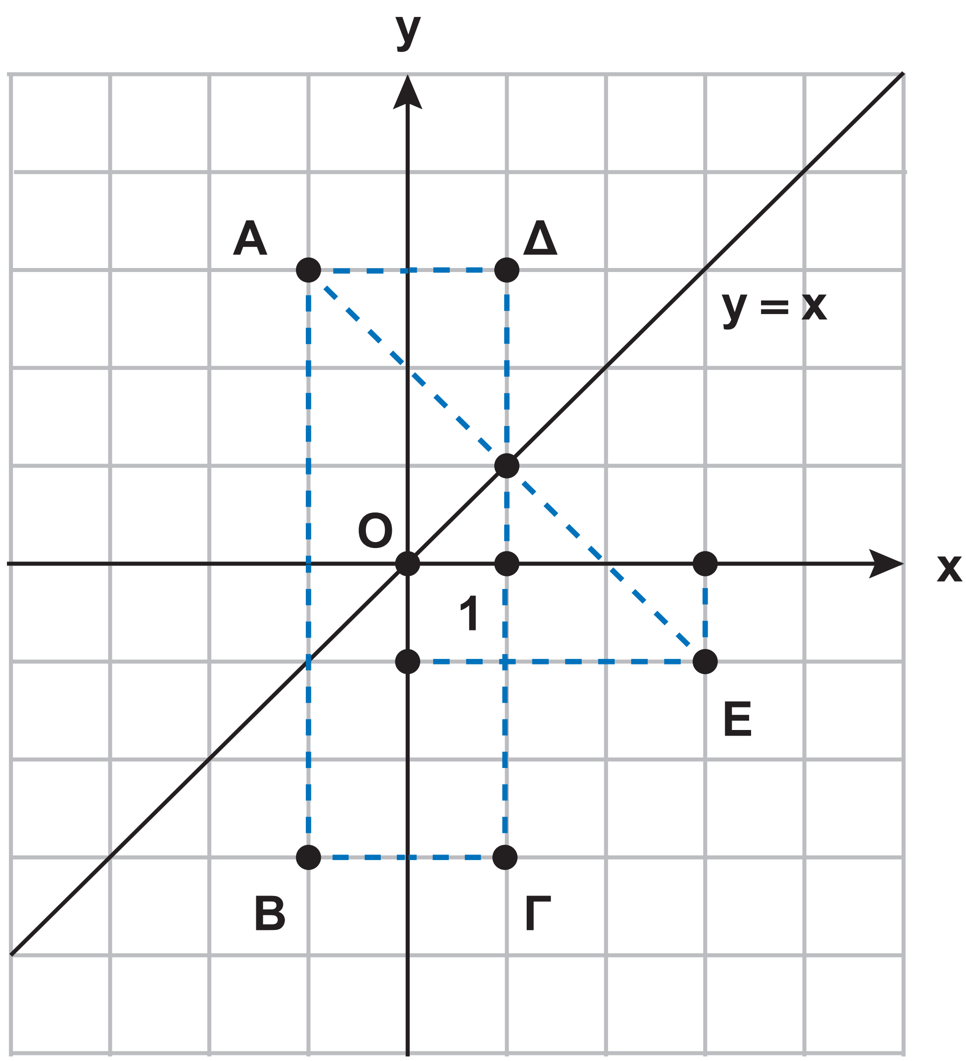
3. Το συμμετρικό του Α(–1, 3),

i) ως προς τον άξονα x΄x είναι το Β(–1, –3)

ii) ως προς τον άξονα y΄y είναι το Δ(1, 3)

iii) ως προς τη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$ είναι το Ε(3, –1)

iv) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το Γ(1, –3).



4. Με βάση τον τύπο $(AB)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ της απόστασης των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$, έχουμε

i) $(OA)=\sqrt{4^2+(-2)^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

ii) $(AB)=\sqrt{(3+1)^2+(4-1)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=\sqrt{25}=5$.

iii) $(AB)=\sqrt{(1+3)^2+0^2}=4$.

iv) $(AB)=\sqrt{0^2+(4+1)^2}=5$.

5. i) Είναι

$$(AB)=\sqrt{(4-1)^2+(-2-2)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5.$$

$$(A\Gamma)=\sqrt{(-3-1)^2+(5-2)^2}=\sqrt{4^2+3^2}=5.$$

$$(B\Gamma)=\sqrt{(-3-4)^2+(5+2)^2}=\sqrt{2\cdot 7^2}=7\sqrt{2}.$$

Άρα $(AB)=(A\Gamma)$, οπότε το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ισοσκελές με κορυφή το A.

ii) Είναι

$$(AB)=\sqrt{(-1-1)^2+(1+1)^2}=\sqrt{2\cdot 2^2}=2\sqrt{2},$$

οπότε $(AB)^2=8$.

$$(A\Gamma)=\sqrt{(4-1)^2+(2+1)^2}=\sqrt{2\cdot 3^2}=3\sqrt{2},$$

οπότε $(A\Gamma)^2=18$.

$(B\Gamma)=\sqrt{(4+1)^2+(2-1)^2}=\sqrt{26}$, οπότε $(B\Gamma)^2=26$.

Παρατηρούμε ότι $(B\Gamma)^2=(AB)^2+(A\Gamma)^2$. Άρα το τρίγωνο $\overset{\triangle}{AB\Gamma}$ είναι ορθογώνιο, με ορθή γωνία την A.

6. Είναι $(AB)=\sqrt{(5-2)^2+(1-5)^2}=5.$

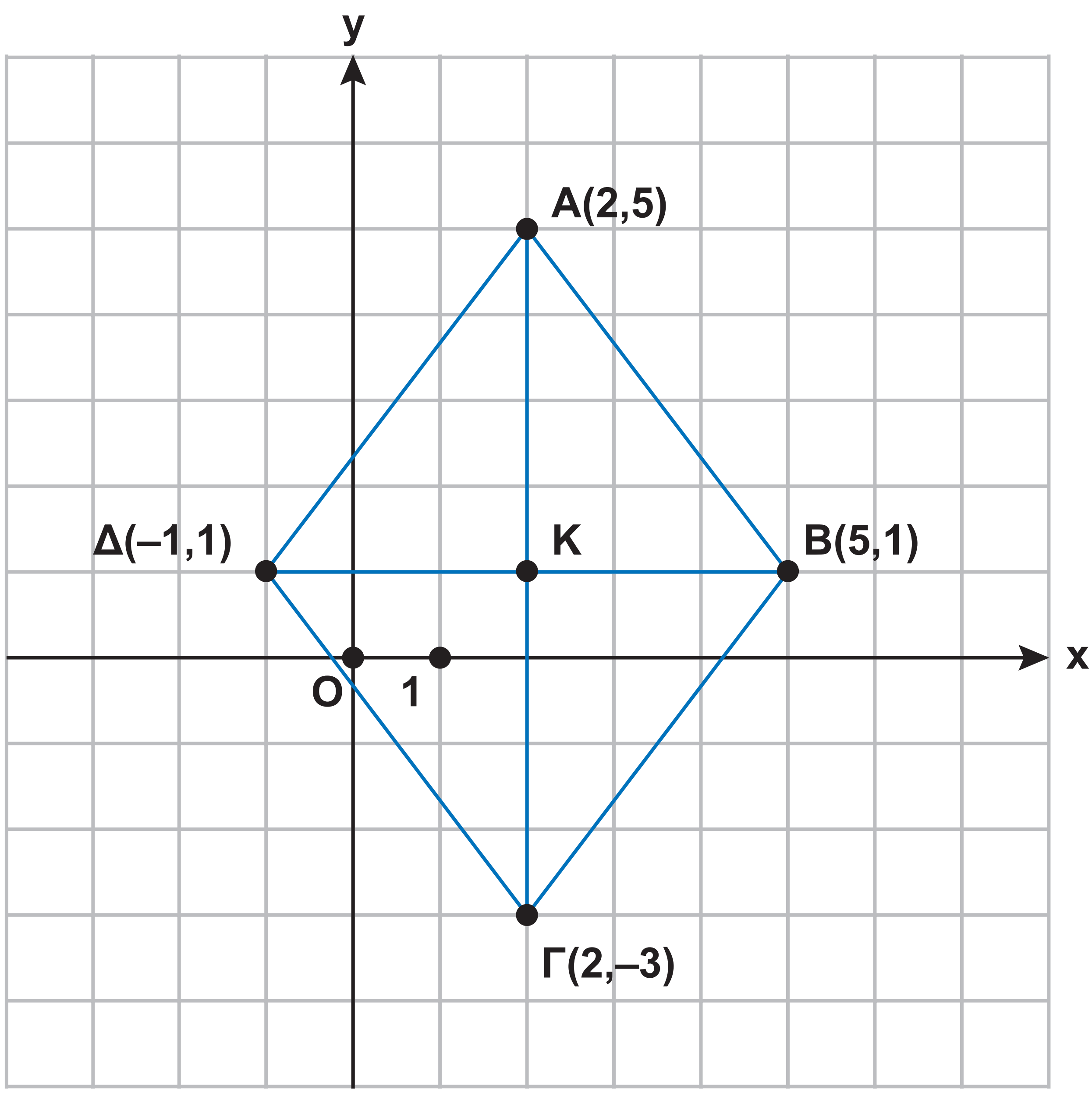
$$(B\Gamma)=\sqrt{(2-5)^2+(-3-1)^2}=5.$$

$$(\Gamma\Delta)=\sqrt{(-1-2)^2+(1+3)^2}=5.$$

$$(\Delta A)=\sqrt{(2+1)^2+(5-1)^2}=5$$

Άρα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ έχει όλες τις πλευρές του ίσες, οπότε είναι ρόμβος.

Σχόλιο: Άμεσα προκύπτει ότι το ΑΒΓΔ είναι ρόμβος, αφού οι διαγώνιές του τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.



7. Πρέπει

i) $f(2)=6 \Leftrightarrow 2^2+k=6 \Leftrightarrow k=2$.

ii) $g(-2)=8 \Leftrightarrow k(-2)^3=8 \Leftrightarrow k=-1$.

iii) $h(3)=8 \Leftrightarrow k\sqrt{4}=8 \Leftrightarrow k=4$.

8. i)Το πεδίο ορισμού της f είναι όλο το $\mathbb{R}$.

- Για $y=0$ έχουμε $x=4$, οπότε η $y=f(x)$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $A(4, 0)$.
- Για $x=0$ έχουμε $y=-4$, οπότε η $y=f(x)$ τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $B(0, -4)$.

Ομοίως

ii) Η g έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και τέμνει

- τον άξονα $x'x$ στα σημεία $A_1(2, 0)$ και $A_2(3, 0)$ και
- τον άξονα $y'y$ στα σημεία $B(0, 6)$.

iii) Η h έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- έχει με τον άξονα $x'x$ κοινό σημείο το $A(1, 0)$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο το $B(0, 1)$.

iv) Η q έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$ και

- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $x'x$.
- τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $B(0, 1)$.

v) Η φ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $[1,+\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ ένα μόνο κοινό σημείο το $A(1, 0)$ και
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

vi) Η ψ έχει πεδίο ορισμού το σύνολο $(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$, οπότε

- έχει με τον άξονα $x'x$ δύο κοινά σημεία, τα $A_1(-2, 0)$ και $A_2(2, 0)$.
- δεν έχει κοινά σημεία με τον άξονα $y'y$.

9. i) Για $x=0$ έχουμε $f(0)=-1$. Άρα η C_f τέμνει τον $y'y$ στο σημείο $A(0,-1)$.

Για $y=0$ έχουμε $x^2-1=0 \Leftrightarrow x=-1$ ή $x=1$.

Άρα η C_f τέμνει τον $x'x$ στα σημεία $B_1(-1, 0)$ και $B_2(1, 0)$.

ii) $f(x)>0 \Leftrightarrow x^2-1>0 \Leftrightarrow (x+1)(x-1)>0 \Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.

10. i) $f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-5x+4=2x-6 \Leftrightarrow x^2-7x+10=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{9}}{2}=\frac{7\pm 3}{2} \Leftrightarrow$$

Άρα $x=5$ ή $x=2$.

Για $x=2$, $g(2)=4-6=-2$.

Για $x=5$, $g(5)=4$.

Άρα τα κοινά σημεία των C_f και C_g είναι τα $A(2,-2)$ και $B(5, 4)$.

ii) $f(x)<g(x) \Leftrightarrow x^2-5x+4<2x-6 \Leftrightarrow x^2-7x+10<0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x-2)(x-5)<0 \Leftrightarrow 2<x<5$.

§ 6.3. Η συνάρτηση $f(x)=\alpha x+\beta$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Όπως είναι γνωστό, για το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας $y=\alpha x+\beta$ ισχύει: $\alpha=\varepsilon\varphi\omega$, όπου ω είναι η γωνία που σχηματίζει η $y=\alpha x+\beta$ με τον άξονα $x'x$. Επομένως, θα έχουμε

i) $\varepsilon\varphi\omega=1$, οπότε $\omega=45^\circ$.

ii) $\varepsilon\varphi\omega=\sqrt{3}$, οπότε $\omega=60^\circ$.

iii) $\varepsilon\varphi\omega=-1$, οπότε $\omega=135^\circ$.

iv) $\varepsilon\varphi\omega=-\sqrt{3}$, οπότε $\omega=120^\circ$.

2. Αν θέσουμε $\Delta x = x_2 - x_1$ και $\Delta y = y_2 - y_1$, έχουμε:

i) $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{3-2}{2-1} = 1.$

ii) $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-2}{2-1} = -1.$

iii) $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-1}{-1-2} = 0.$

iv) $\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{1-3}{2-1} = \dfrac{-2}{1} = -2.$

3. Σε όλες τις περιπτώσεις η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$.

i) Επειδή $\alpha = -1$ και $\beta = 2$, η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = -x + 2$.

ii) Επειδή $\alpha = \text{εφ}\, 45^\circ = 1$ και $\beta = 1$, η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = x + 1$.

iii) Επειδή η ευθεία είναι παράλληλη με την $y = 2x - 3$ θα έχει ίδια κλίση με αυτή, οπότε θα είναι $\alpha = 2$. Άρα η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής: $y = 2x + \beta$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο Α(1, 1) θα ισχύει $1 = 2 \cdot 1 + \beta$ οπότε θα έχουμε $\beta = -1$. Επομένως, η εξίσωση της ευθείας είναι $y = 2x - 1$.

4. Όπως είδαμε στην άσκηση 2, σε όλες τις περιπτώσεις η ευθεία έχει συντελεστή διεύθυνσης, οπότε έχει εξίσωση της μορφής $y = αx + β$.

i) Επειδή $α = 1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = x + β$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $Α(1, 2)$ θα ισχύει $2 = 1 + β$ οπότε θα είναι $β = 1$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι $y = x + 1$.

ii) Επειδή $α = – 1$, η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $y = – x + β$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $Α(1, 2)$ θα ισχύει $2 = – 1 + β$ οπότε θα είναι $β = 3$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = – x + 3$.

iii) Επειδή $α = 0$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = β$ και επειδή η ευθεία διέρχεται από το σημείο $Α(2, 1)$, η ζητούμενη εξίσωση είναι $y = 1$.

iv) Επειδή $α = – 2$, η εξίσωση της ευθείας είναι της μορφής $y = – 2x + β$ και επειδή διέρχεται από το σημείο $Α(1, 3)$ θα ισχύει $3 = – 2 + β$ οπότε θα είναι $β = 5$. Επομένως η εξίσωση της ευθείας είναι: $y = – 2x + 5$.

5. Η ζητούμενη εξίσωση είναι της μορφής $C = \alpha \cdot F + \beta$ επειδή το νερό παγώνει στους 0°C ή στους 32°F, θα ισχύει $0 = \alpha \cdot 32 + \beta$. (1)

Επειδή, επιπλέον, το νερό βράζει στους 100°C ή στους 212°F, θα ισχύει $100 = \alpha \cdot 212 + \beta$. (2)

Αν αφαιρέσουμε κατά μέλη τις (1) και (2) βρίσκουμε

$100 = \alpha \cdot 180$, οπότε $\alpha = \frac{5}{9}$ και επομένως $\beta = -\frac{5}{9} \cdot 32$.

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι

$$C = \frac{5}{9}F - \frac{5}{9} \cdot 32 \Leftrightarrow C = \frac{5}{9}(F - 32).$$

Αν υπάρχει θερμοκρασία που να εκφράζεται και στις δύο κλίμακες με τον αριθμό T, τότε θα ισχύει

$$T = \frac{5}{9}(T - 32) \Leftrightarrow 9T = 5T - 5 \cdot 32 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4T = -5 \cdot 32 \Leftrightarrow T = -40.$$

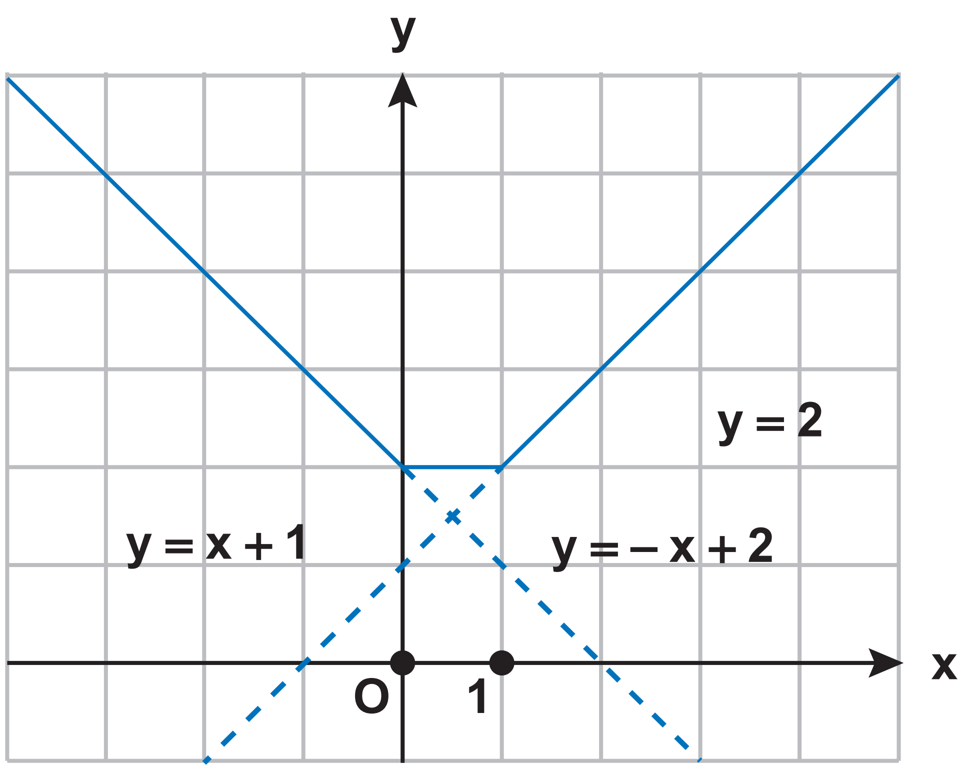
Άρα οι −40°F αντιστοιχούν στους −40°C.

6. Η γραφική παράσταση της f αποτελείται:

✔ Από το τμήμα της ευθείας $y = -x + 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in (-\infty, 0]$.

✔ Από το τμήμα της ευθείας $y = 2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [0, 1]$ και

✔ Από το τμήμα της ευθείας $y = x + 1$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη $x \in [1, +\infty)$.



7. i) Οι ρίζες εξίσωσης $f(x) = 1$ είναι οι τετμημένες κοινών σημείων της $y = f(x)$ και της ευθείας $y = 1$, δηλαδή οι αριθμοί -1 και 1. Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = x$ είναι τετμημένες των κοινών σημείων της $y = f(x)$ και της ευθείας $y = x$, δηλαδή οι αριθμοί -2, 0 και 1.

ii) Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) < 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = f(x)$ τα οποία βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 1$, δηλαδή οι αριθμοί $x \in (-\infty, 1) - \{-1\}$. Οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \geq x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y = f(x)$ τα οποία βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y = x$ ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα σημεία $x \in [-2, 0] \cup [1, +\infty)$.

8. i) Οι γραφικές παραστάσεις των $f(x)=|x|$ και $g(x)=1$ δίνονται στο παρακάτω σχήμα.

✔ Οι λύσεις της ανίσωσης $|x|\leq 1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y=|x|$ που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y=1$ ή στην ευθεία αυτή, δηλαδή τα $x\in[-1,1]$.

✔ Οι λύσεις ανίσωσης $|x|>1$ είναι οι τετμημένες των σημείων της $y=|x|$ που βρίσκονται πάνω από την ευθεία $y=1$, δηλαδή τα $x\in(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$.

ii) Από τη θεωρία γνωρίζουμε ότι για $\rho>0$ ισχύει

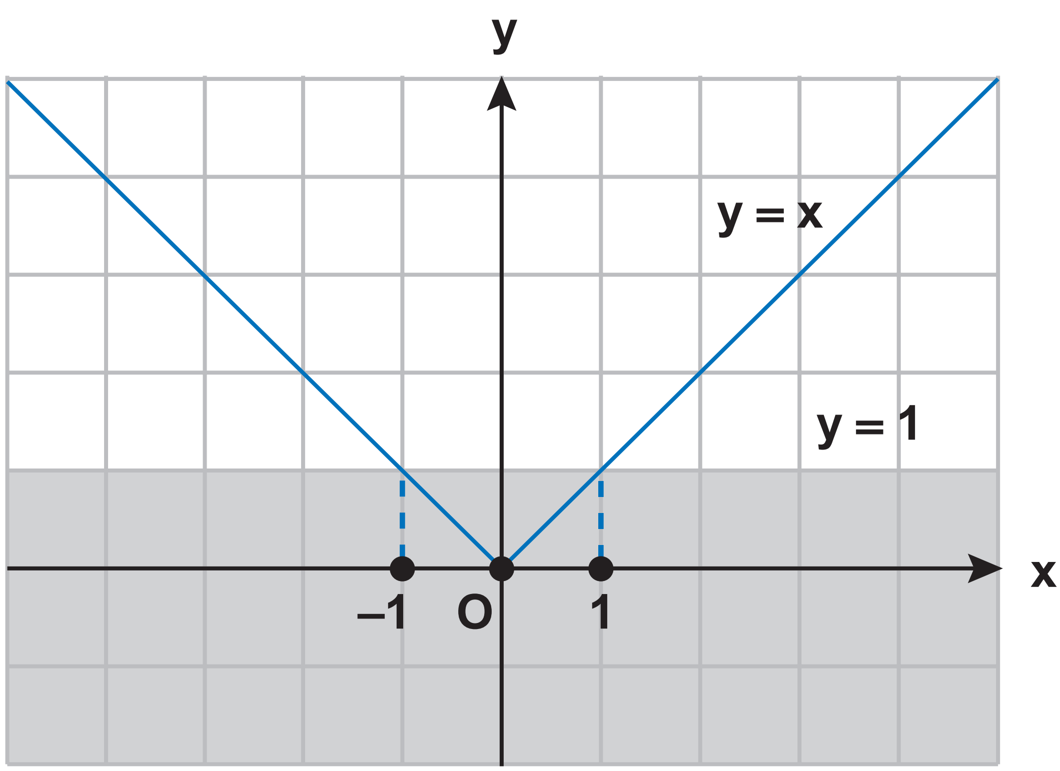
$|x|\leq\rho\Leftrightarrow-\rho\leq x\leq\rho$.

$|x|>\rho\Leftrightarrow x<-\rho$ ή $x>\rho$.

Επομένως

$|x|\leq 1\Leftrightarrow-1\leq x\leq 1$.

$|x|>1\Leftrightarrow x<-1$ ή $x>1$.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Είναι

$f(-6)=1,\ f(-5)=\frac{1}{2},\ f(-4)=0,\ f(-3)=-\frac{1}{2},\ f(-2)=-1,$
$f(-1)=0.$

$f(0)=1,\ f(1)=1,\ f(2)=1,\ f(3)=0,\ f(4)=-1,\ f(5)=-2.$

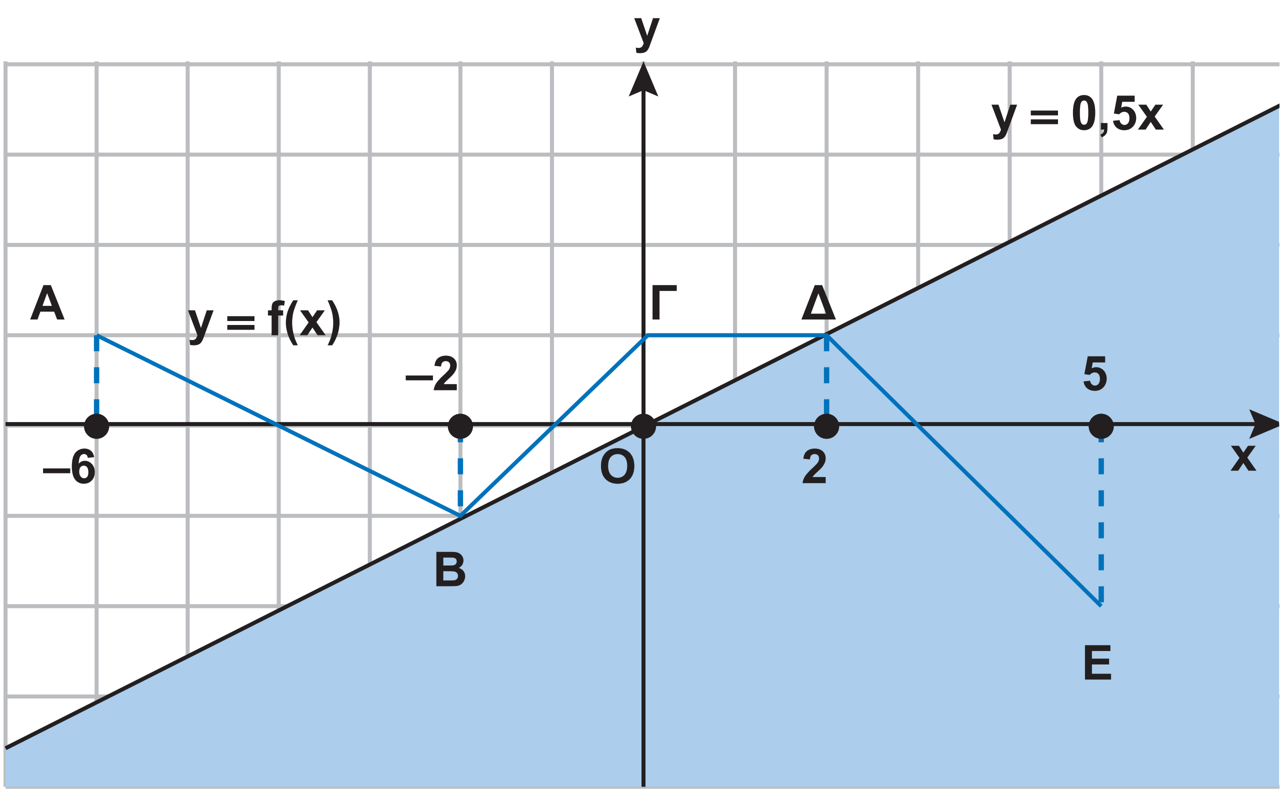
ii) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x)=\alpha$ είναι οι τετμημένες του σημείου της C_f που έχουν τεταγμένη α. Επομένως

✔ Οι ρίζες της $f(x)=0$ είναι οι αριθμοί -4, -1 και 3.

✔ Οι ρίζες της $f(x)=-1$ είναι οι αριθμοί -2 και 4.

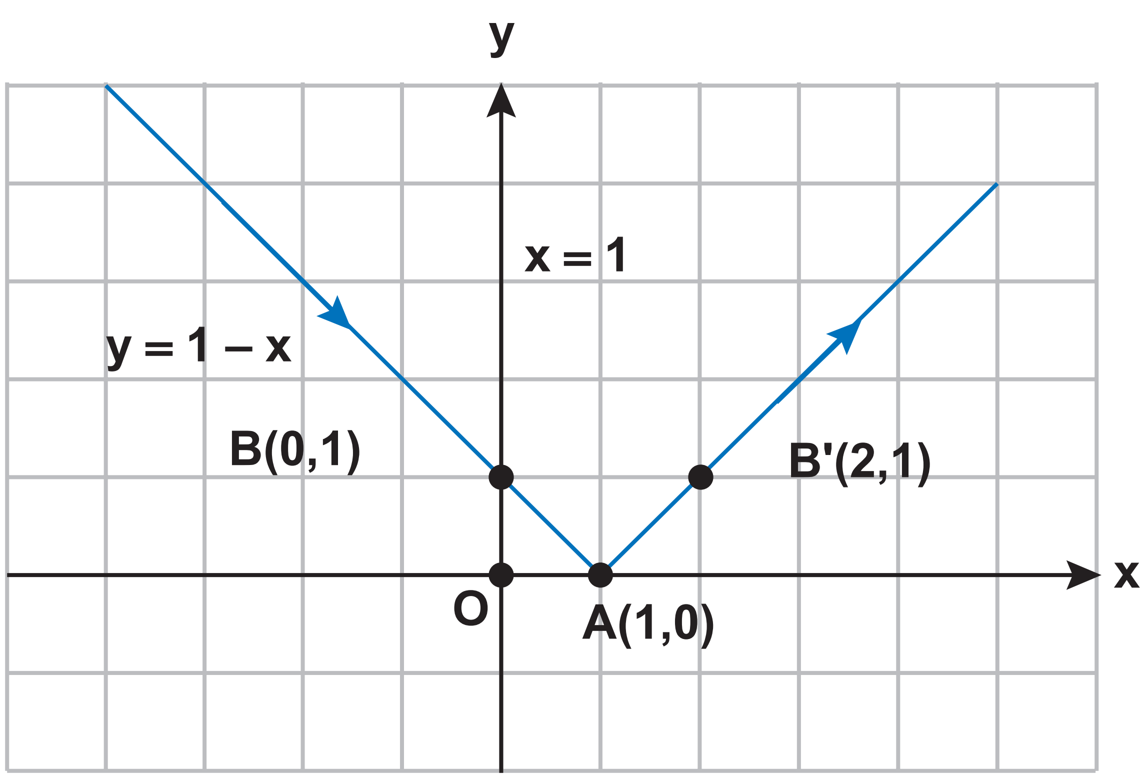
✔ Οι ρίζες της $f(x)=1$ είναι ο αριθμός -6 και όλοι οι αριθμοί του κλειστού διαστήματος $[0, 2]$.

iii) Η ευθεία ΒΔ είναι εξίσωση της μορφής $y=\alpha x+\beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία $B(-2, -1)$ και $\Delta(2,1)$ θα ισχύει $-1=\alpha(-2)+\beta$ και $1=\alpha\cdot 2+\beta$.
Οπότε, με πρόσθεση των εξισώσεων αυτών κατά μέλη, βρίσκουμε ότι $\beta=0$ και επομένως θα έχουμε $\alpha=0{,}5$.
Άρα η εξίσωση της ευθείας ΒΔ θα είναι η $y=0{,}5x$.



Επομένως, οι λύσεις της ανίσωσης $f(x) \leq 0,5x$ είναι οι τετμημένες των σημείων της γραφικής παράστασης της f που βρίσκονται κάτω από την ευθεία $y = 0,5x$, ή πάνω σ' αυτή. Είναι δηλαδή όλα τα $x \in [2,5] \cup \{-2\}$.

2. Η ανάκλαση γίνεται στο σημείο Α(1, 0) και η ανακλωμένη είναι συμμετρική της ημιευθείας ΑΒ (σχ.) ως προς άξονα την ευθεία $x = 1$. Επομένως, η ανακλώμενη θα είναι η ημιευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α(1, 0) και Β'(2, 1), όπου Α η αρχή της.
Αν $y = \alpha x + \beta$, $x \geq 1$ είναι η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας, τότε αυτή θα επαληθεύεται από τα ζεύγη (1, 0) και (2, 1). Δηλαδή θα ισχύουν $0 = \alpha + \beta$ και $1 = 2\alpha + \beta$, από τις οποίες βρίσκουμε $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.
Επομένως η εξίσωση της ανακλώμενης ακτίνας είναι: $y = x - 1$, $x \geq 1$.



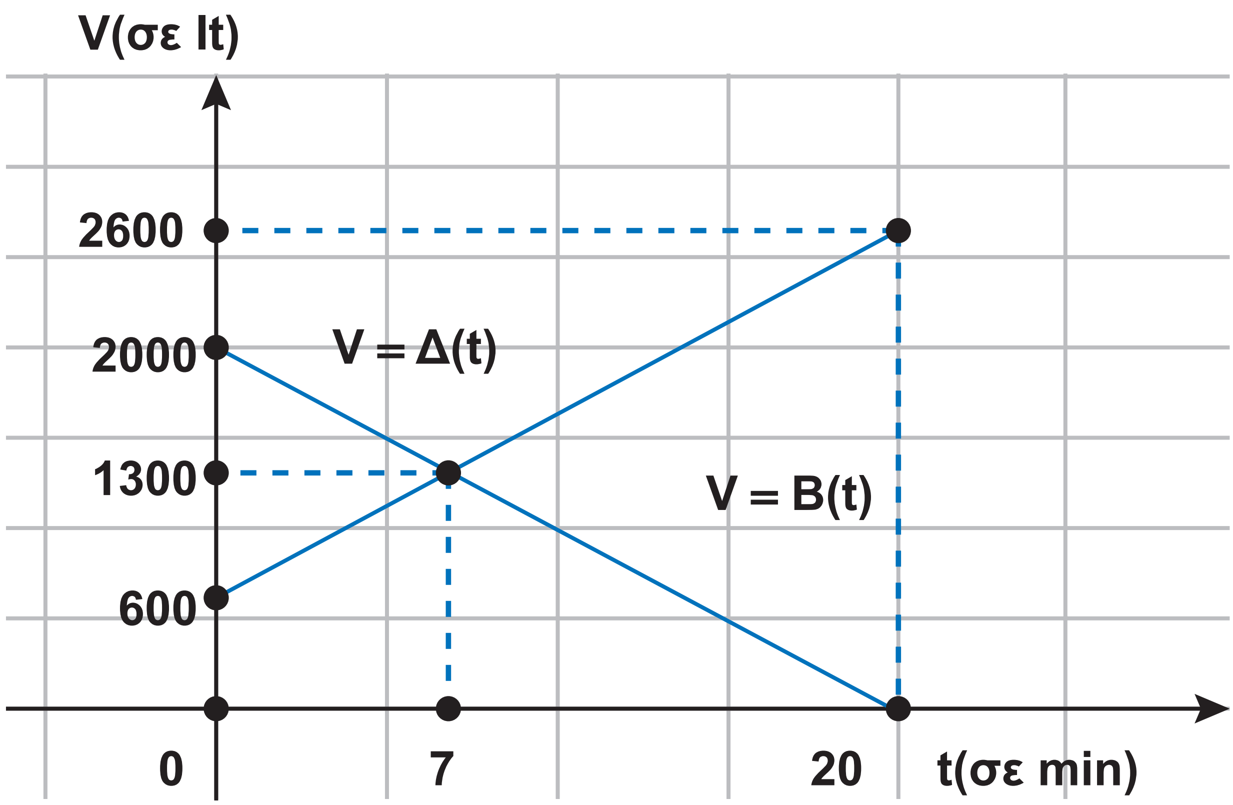
3. i) α) Αν $B(t)$ είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στο βυτιοφόρο κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $B(t) = 2000 - 100t$ και επειδή πρέπει $B(t) \geq 0$ θα ισχύει $2000 - 100t \geq 0 \Leftrightarrow t \leq 20$.

Επομένως, θα έχουμε $B(t) = 2000 - 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

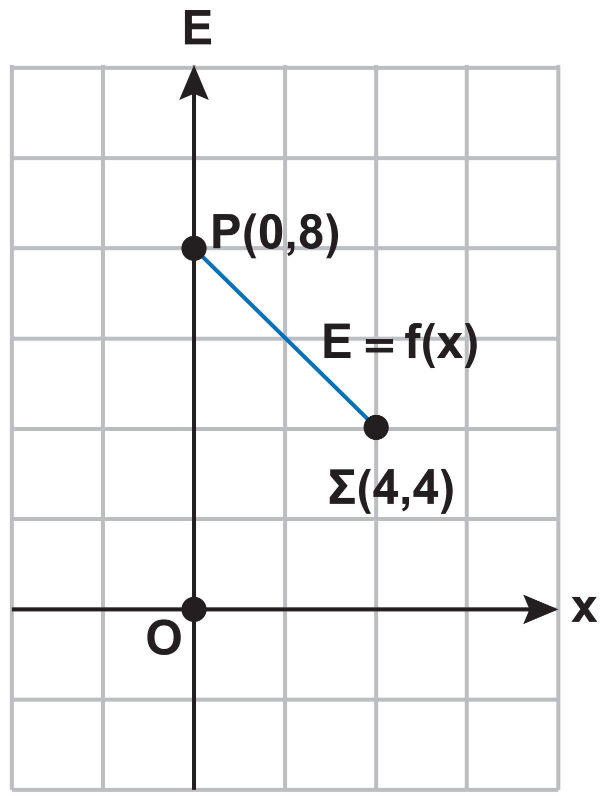
β) Αν $\Delta(t)$ είναι η ποσότητα σε λίτρα της βενζίνης στη δεξαμενή κατά τη χρονική στιγμή t, τότε θα ισχύει $\Delta(t) = 600 + 100t$, $0 \leq t \leq 20$.

ii) Οι γραφικές παραστάσεις της παραπάνω συνάρτησης είναι τα ευθύγραμμα τμήματα του παρακάτω σχήματος. Η χρονική στιγμή κατά την οποία οι δύο ποσότητες είναι ίσες είναι η λύση της εξίσωσης $B(t) = \Delta(t)$, η οποία γράφεται $2000 - 100t = 600 + 100t \Leftrightarrow 200t = 1400 \Leftrightarrow t = 7$.

Άρα η ζητούμενη χρονική στιγμή είναι η $t = 7$ min.



4. Για να βρούμε το εμβαδόν του τριγώνου $M\overset{\triangle}{\Gamma}\Delta$ αφαιρούμε από το εμβαδόν του τραπεζίου ΑΒΓΔ το άθροισμα των εμβαδών των ορθογώνιων τριγώνων $A\overset{\triangle}{M}\Delta$ και $B\overset{\triangle}{M}\Gamma$.



Έτσι έχουμε

$$E_{M\Gamma\Delta} = E_{AB\Gamma\Delta} - E_{AM\Delta} - E_{BM\Gamma} =$$

$$= \frac{4+2}{2}\cdot 4 - \frac{x\cdot 4}{2} - \frac{(4-x)\cdot 2}{2} = 12 - 2x - (4-x) = -x+8.$$

Επομένως, η συνάρτηση f έχει τύπο $f(x) = -x+8$, με $0 \le x \le 4$.

Άρα, η γραφική της παράσταση είναι το ευθ. τμήμα με άκρα τα σημεία Ρ(0, 8) και Σ(4, 4).

5. i) Το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση της μορφής $h = \alpha t + \beta$ και επειδή διέρχεται από τα σημεία Α(3, 0) και Γ(0, 20) θα ισχύει $0 = 3\alpha + \beta$ και $20 = \beta$, οπότε θα είναι $\alpha = -\frac{20}{3}$ και $\beta = 20$. Επομένως, το ευθ. τμήμα k_1 έχει εξίσωση

$$h = -\frac{20}{3}t + 20,\ 0 \le t \le 3.$$

Άρα η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_1 είναι η

$$h_1(t) = -\frac{20}{3}t + 20,\ 0 \le t \le 3. \qquad (1)$$

Ομοίως, βρίσκουμε ότι η αντίστοιχη συνάρτηση του ύψους του κεριού K_2 είναι η

$$h_2(t) = -5t + 20,\ 0 \le t \le 4. \qquad (2)$$

ii) Το κερί k_2 είχε διπλάσιο ύψος από το κερί k_1 τη χρονική στιγμή κατά την οποία ισχύει $h_2(t) = 2h_1(t)$. Έχουμε λοιπόν:

$$h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\cancel{20}}{4}t + \cancel{20} = 2\left(-\frac{\cancel{20}}{3}t + \cancel{20}\right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = 2\left(-\frac{1}{3}t + 1\right) \Leftrightarrow -\frac{1}{4}t + 1 = -\frac{2}{3}t + 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -3t + 12 = -8t + 24 \Leftrightarrow 5t = 12 \Leftrightarrow t = 2{,}4.$$

Άρα, το k_2 είχε το διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t = 2{,}4$h.

iii) Αν εργαστούμε όπως στο ερώτημα i) θα βρούμε ότι

$$h_1(t) = -\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon,\ 0 \le t \le 3.$$

$$h_2(t) = -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon,\ 0 \le t \le 4.$$

οπότε, $h_2(t) = 2h_1(t) \Leftrightarrow -\frac{\upsilon}{4}t + \upsilon = 2\left(-\frac{\upsilon}{3}t + \upsilon\right) \Leftrightarrow$

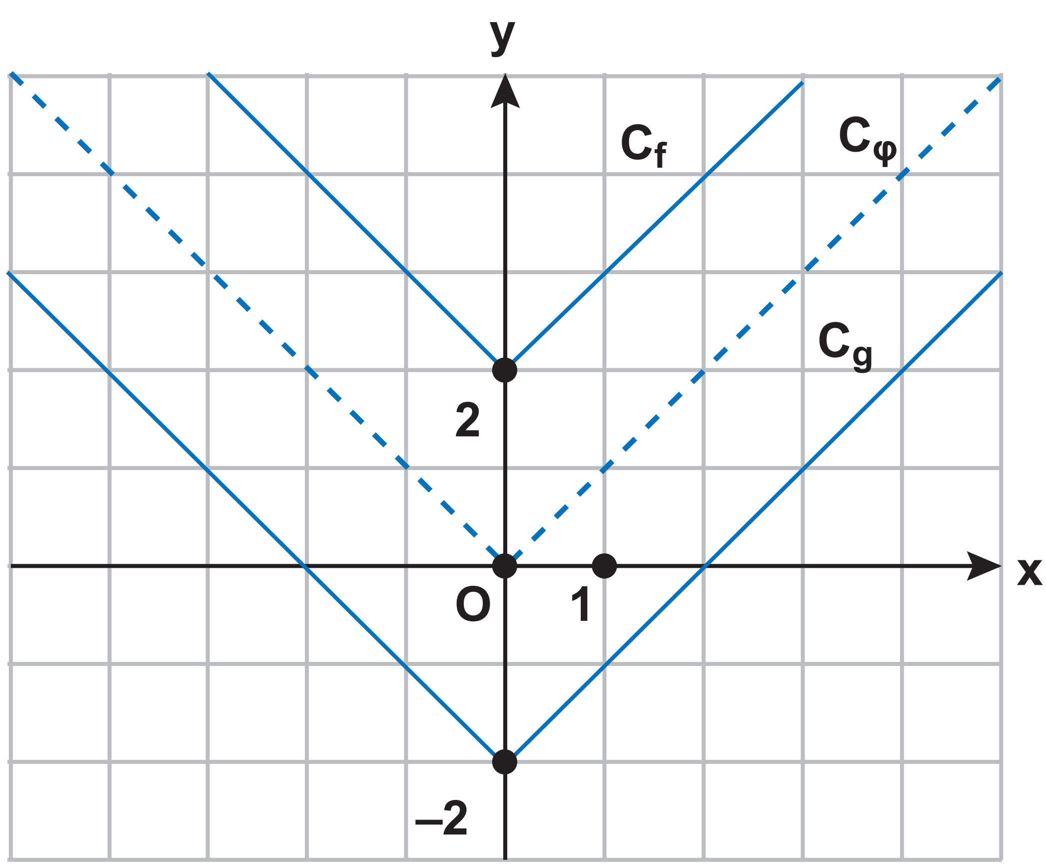
$$\Leftrightarrow -\frac{1}{4}t+1=2\left(-\frac{1}{3}t+1\right)\Leftrightarrow t=2{,}4.$$

Παρατηρούμε δηλαδή ότι το k_2 θα έχει διπλάσιο ύψος από το k_1 τη χρονική στιγμή $t=2{,}4h$, ανεξάρτητα του αρχικού ύψους υ των κεριών k_1 και k_2.

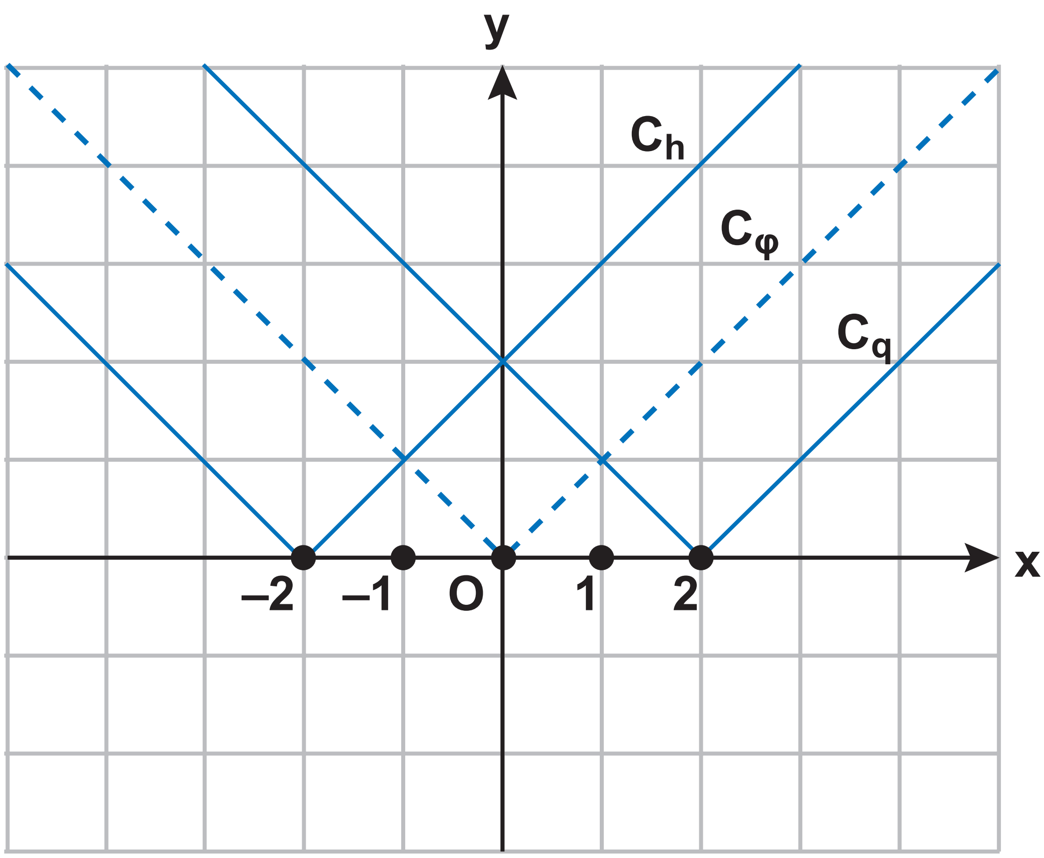
§ 6.4. Κατακόρυφη - Οριζόντια μετατόπιση καμπύλης

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

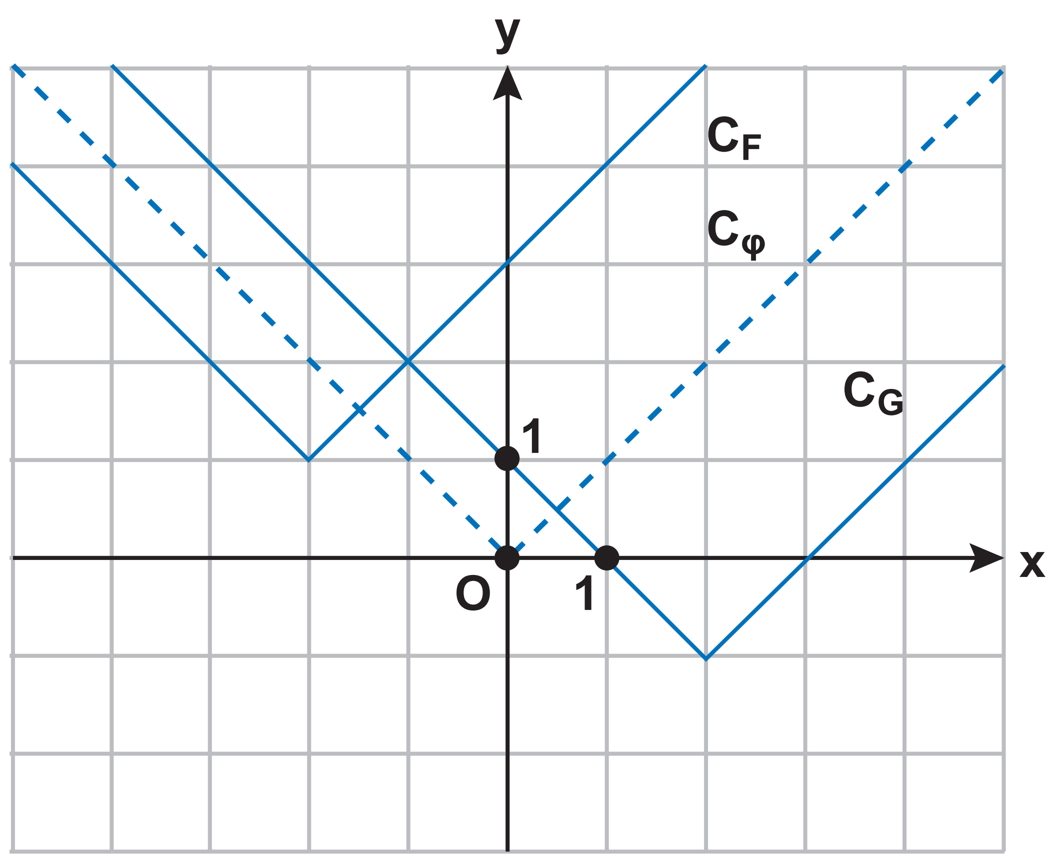
1. Όπως είδαμε στην §4.3, η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=|x|$, αποτελείται από τις διχοτόμους των γωνιών $x\hat{O}y$ και $x'\hat{O}y$. Η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|+2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, ενώ η γραφική παράσταση της $f(x)=|x|-2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω (σχήμα).



2. Η γραφική παράσταση της $h(x)=|x+2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά, ενώ η γραφική παράσταση της $q(x)=|x-2|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά (σχήμα).

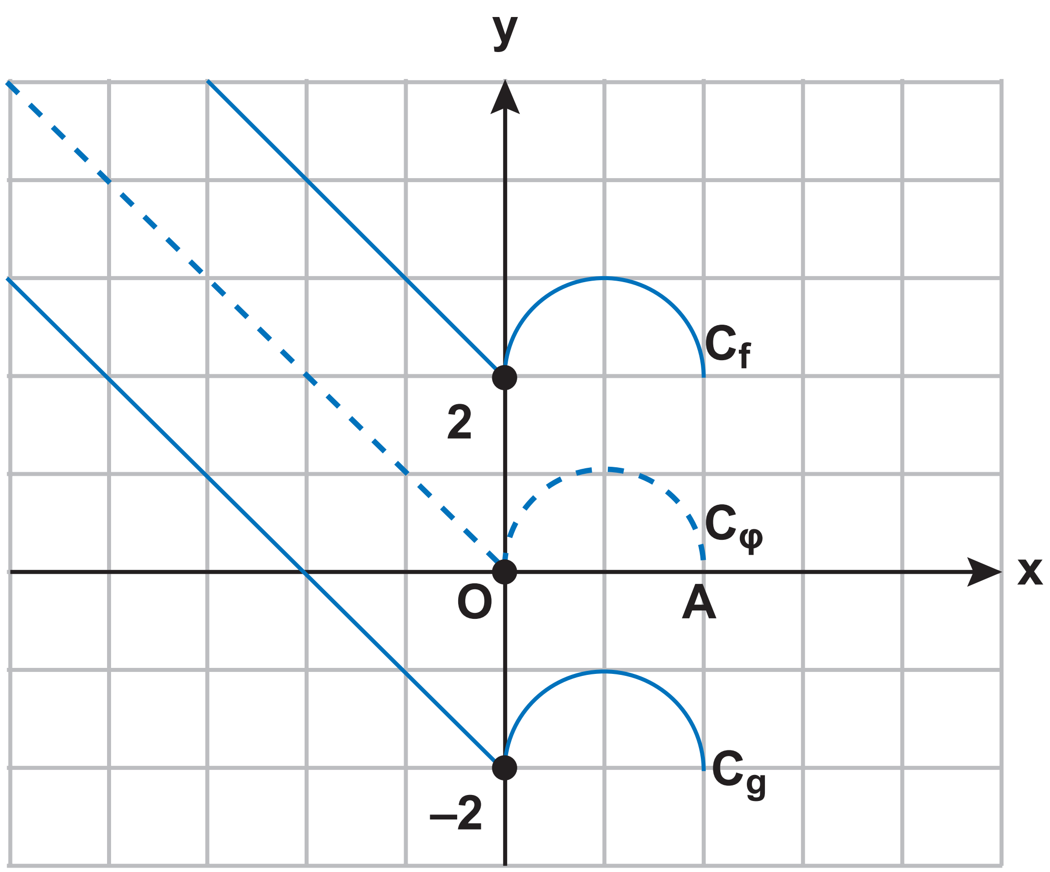


3. Αρχικά χαράσσουμε την $y=|x+2|$, που, όπως είδαμε στην προηγούμενη άσκηση, προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$ κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά. Στη συνέχεια χαράσσουμε την $y=|x+2|+1$, που, όπως γνωρίζουμε, προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της γραφικής παράστασης της $y=|x+2|$ κατά 1 μονάδα προς τα πάνω. Επομένως, η γραφική παράσταση της $F(x)=|x+2|+1$ προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα πάνω (σχήμα).

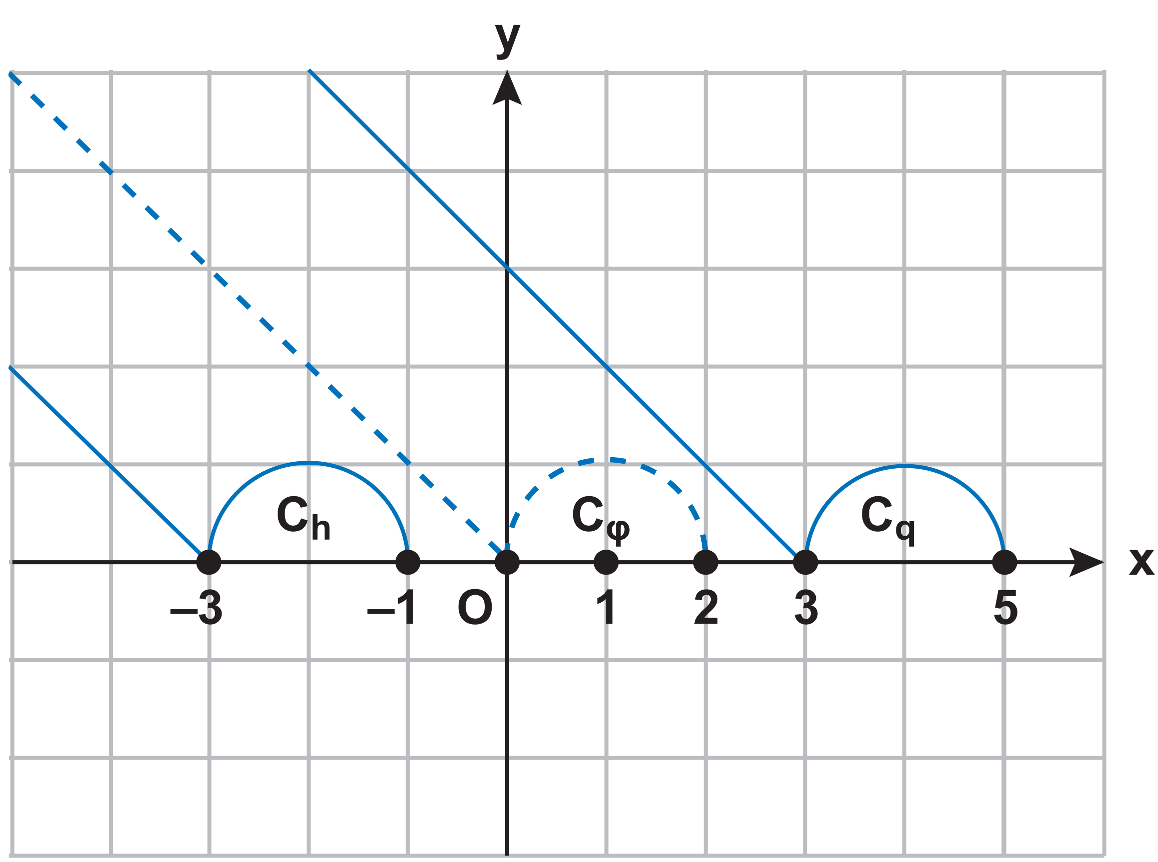


Ομοίως, η γραφική παράσταση της $G(x)=|x-2|-1$, προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της $y=|x|$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω (σχήμα).

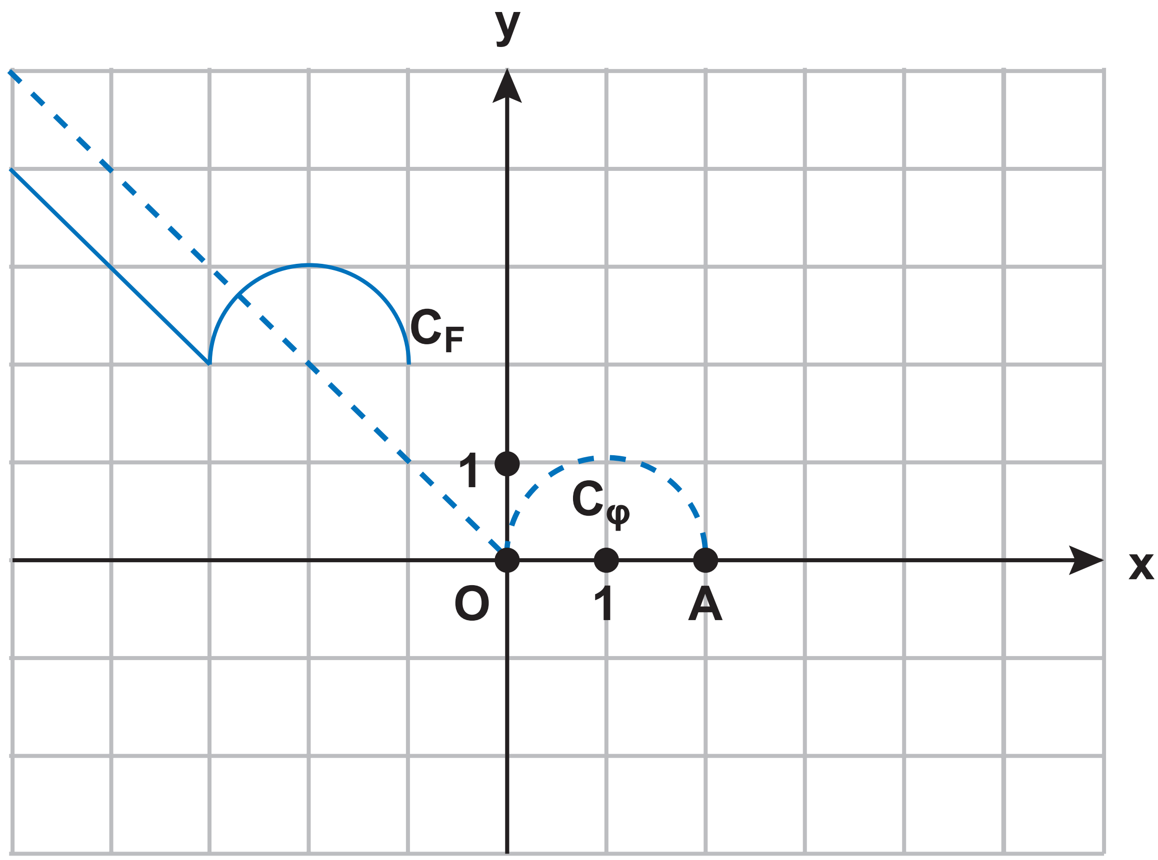
4. i)

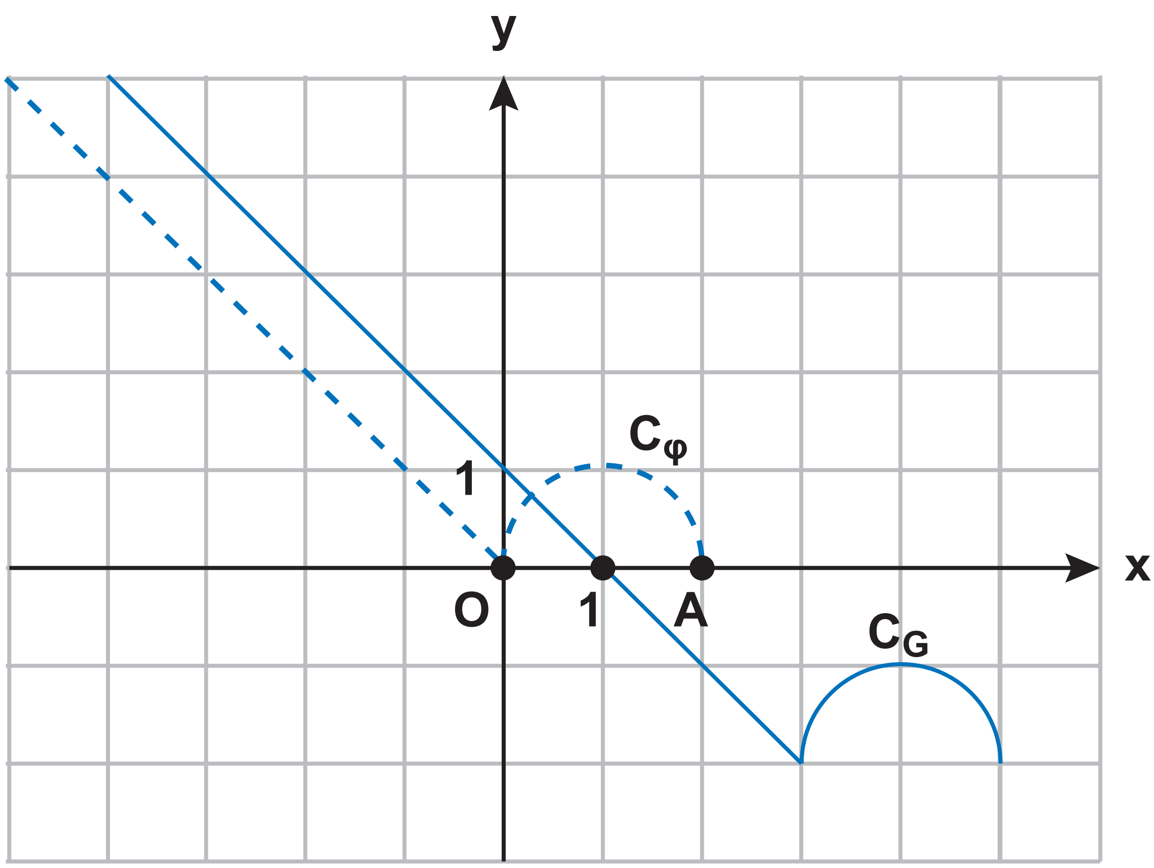


ii)



iii)





5. i) $f(x) = 2(x-2)^2 - 1 + 1 = 2(x-2)^2$.

ii) $f(x) = 2(x-3)^2 - 1 - 2 = 2(x-3)^2 - 3$.

iii) $f(x) = 2(x+2)^2 - 1 + 1 = 2(x+2)^2$.

iv) $f(x) = 2(x+3)^2 - 1 - 2 = 2(x+3)^2 - 3$.

§ 6.5. Μονοτονία - Ακρότατα - Συμμετρίες συνάρτησης
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1.
- Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.
- Η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 2]$ και γνησίως αύξουσα στο $[2, +\infty)$.
- Η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$, γνησίως αύξουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως φθίνουσα στο $[0, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$.

2.
- Η f παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = 1$, το $f(1) = -1$ και δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.
- Η g δεν παρουσιάζει ούτε ολικό μέγιστο ούτε ολικό ελάχιστο.
- Η h παρουσιάζει ολικό ελάχιστο για $x = -1$ και για $x = 1$ το $h(-1) = \ = h(1) = -2$, ενώ δεν παρουσιάζει ολικό μέγιστο.

3. i) Αρκεί να δείξουμε τα $f(x) \geq f(3)$. Έχουμε

$$f(x) \geq f(3) \Leftrightarrow x^2 - 6x + 10 \geq 3^2 - 6 \cdot 3 + 10 \Leftrightarrow (x-3)^2 \geq 0,$$

που ισχύει.

ii) Αρκεί να δείξουμε ότι $g(x) \leq g(1)$. Έχουμε

$$g(x) \leq g(1) \Leftrightarrow \frac{2x}{x^2+1} \leq \frac{2 \cdot 1}{1^2+1} \Leftrightarrow 2x \leq x^2 + 1 \Leftrightarrow 0 \leq (x-1)^2,$$

που ισχύει.

4. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f_1(-x) = 3(-x)^2 + 5(-x)^4 = 3x^2 + 5x^4$, άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f_2(-x) = 3|-x| + 1 = 3|x| + 1$, άρα η f_2 είναι άρτια.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f_3(-x) = |-x+1|$, οπότε δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή, αφού $f_3(-1) \neq \pm f_3(1)$.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f_4(-x) = (-x)^3 - 3(-x)^5 = -(x^3 - 3x^5) = -f_4(-x)$, άρα η f_4 περιττή.

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το 0.
Άρα, η f_5 δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

$f_5(-x) = \dfrac{(-x^2)}{1-x} = \dfrac{x^2}{1-x}$, άρα ούτε άρτια, ούτε περιττή.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_6(-x) = \frac{-2x}{(-x)^2+1} = \frac{-2x}{x^2+1} = -\frac{2x}{x^2+1} = -f_6(x),$$

άρα f_6 είναι περιττή.

5. i) Η f_1 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^* = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει

$$f_1(-x) = \frac{1}{|-x|} = \frac{1}{|x|} = f_1(x).$$

Άρα η f_1 είναι άρτια.

ii) Η f_2 έχει πεδίο ορισμού το $[2, +\infty)$ που δεν έχει κέντρο συμμετρίας το Ο. Άρα δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

iii) Η f_3 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f_3(-x) = |-x-1| - |-x+1| = |x+1| - |x-1| = -f_3(x).$$

Άρα η f_3 είναι περιττή.

iv) Η f_4 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}^*$ και είναι περιττή, διότι ισχύει

$$f_4(x) = \frac{\frac{x^2+1}{x}}{x^2+1} = \frac{1}{x}$$

Τέλος, αν εργαστούμε όπως στην i), θα αποδείξουμε ότι:

v) Η f_5 έχει πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και είναι άρτια, διότι $f_5(-x) = f_5(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

vi) Η f_6 έχει πεδίο ορισμού το $[-1, 1]$ και είναι άρτια, διότι $f_6(-x) = f_6(x)$, για κάθε $x \in [-1, 1]$.

6. i) Η C_f έχει κέντρο συμμετρίας το Ο(0, 0). Άρα η f είναι περιττή.

ii) Η C_g έχει άξονα συμμετρίας τον y΄y. Άρα η g είναι άρτια.

iii) Η C_h δεν έχει ούτε άξονα συμμετρίας τον y΄y, ούτε κέντρο συμμετρίας το Ο(0, 0). Άρα η h δεν είναι ούτε άρτια ούτε περιττή.

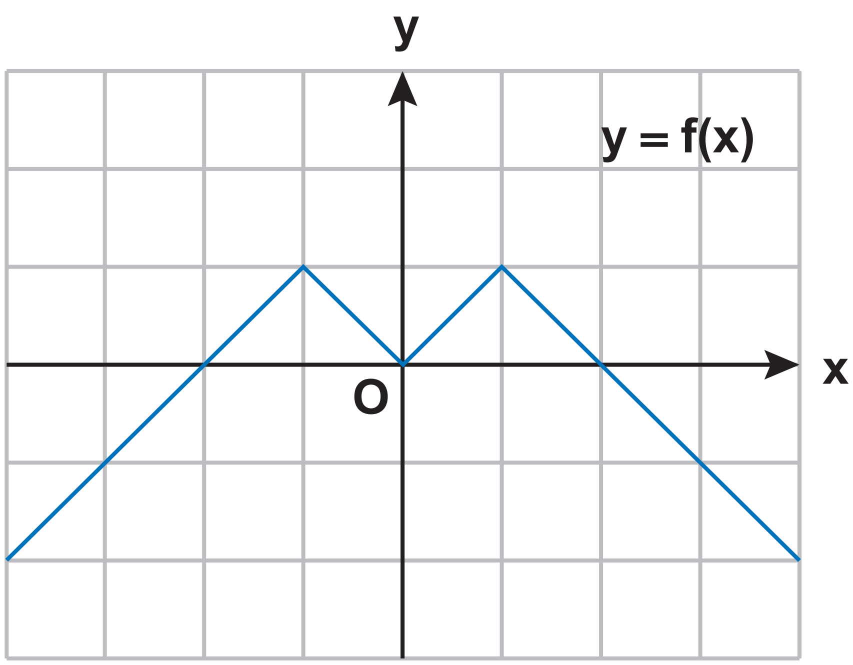
7. Ομοίως

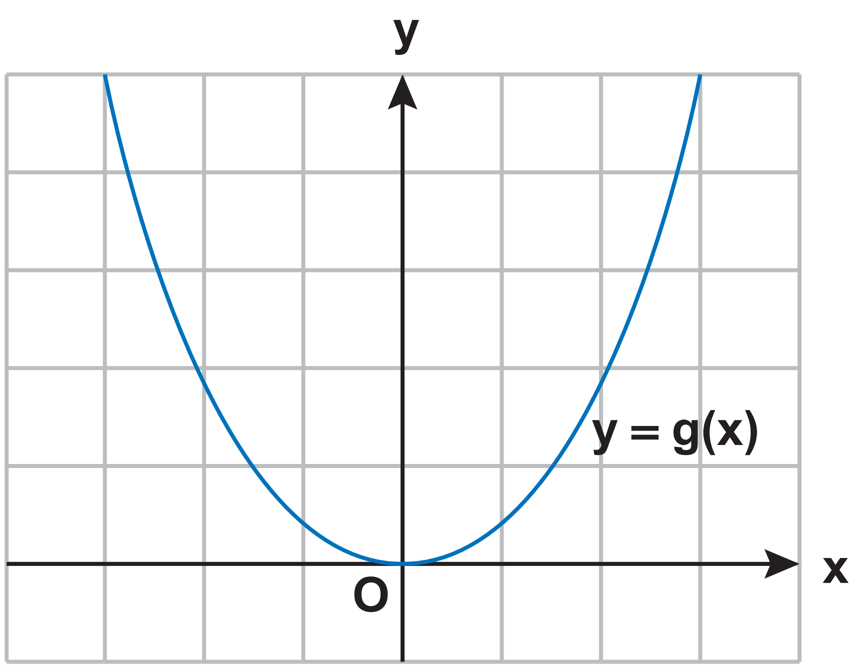
i) Η f είναι άρτια.

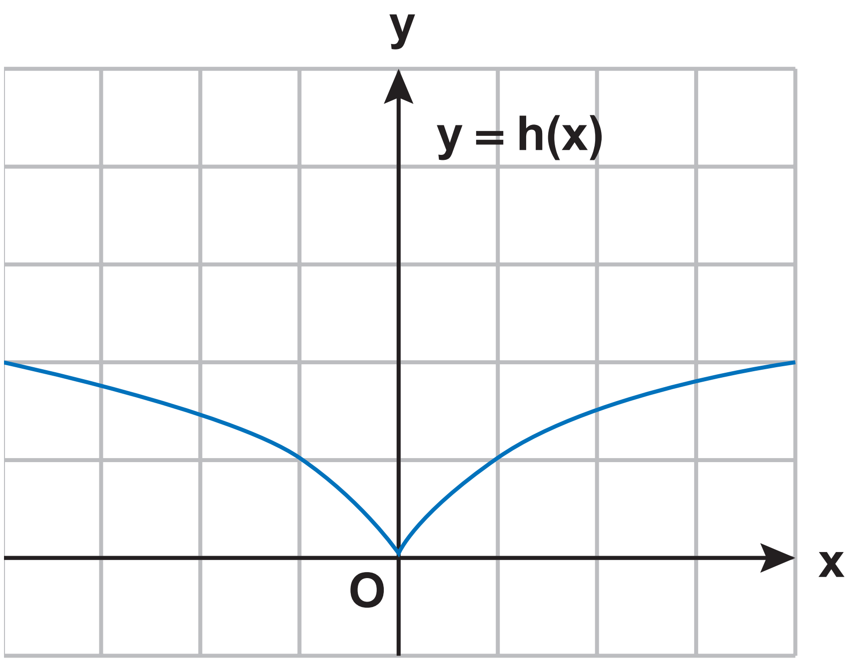
ii) Η g είναι περιττή.

iii) Η h δεν είναι ούτε άρτια, ούτε περιττή.

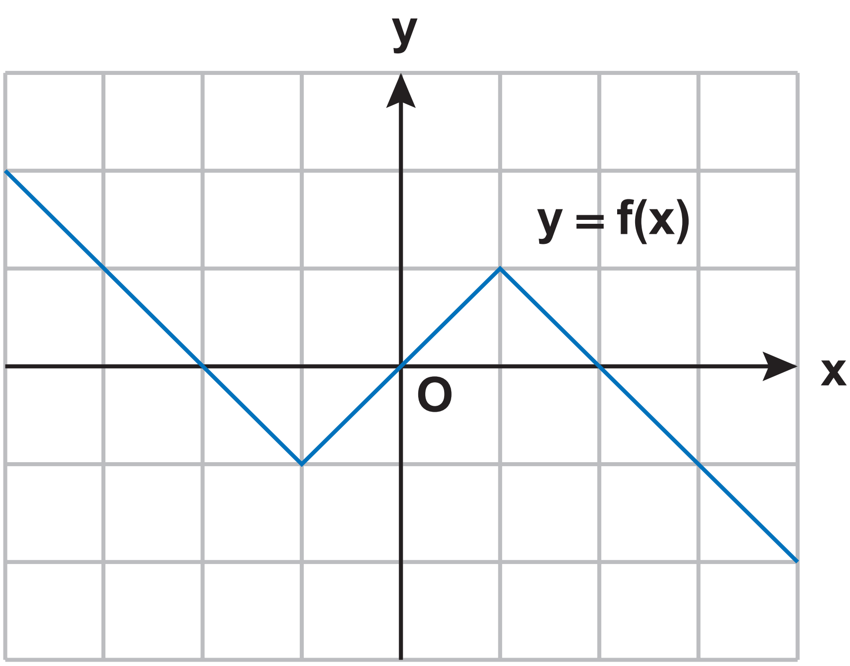
8. α) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς τον άξονα y΄y.

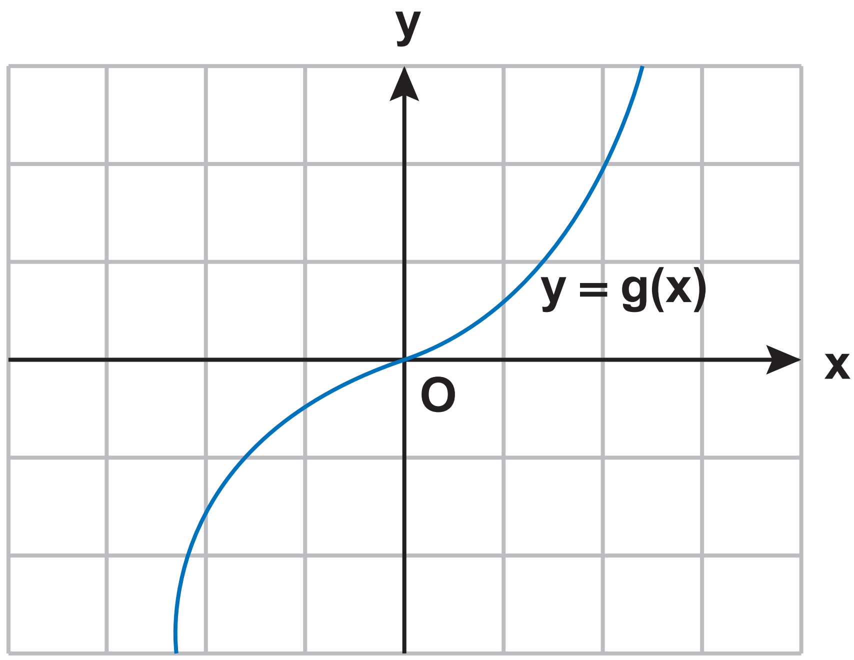


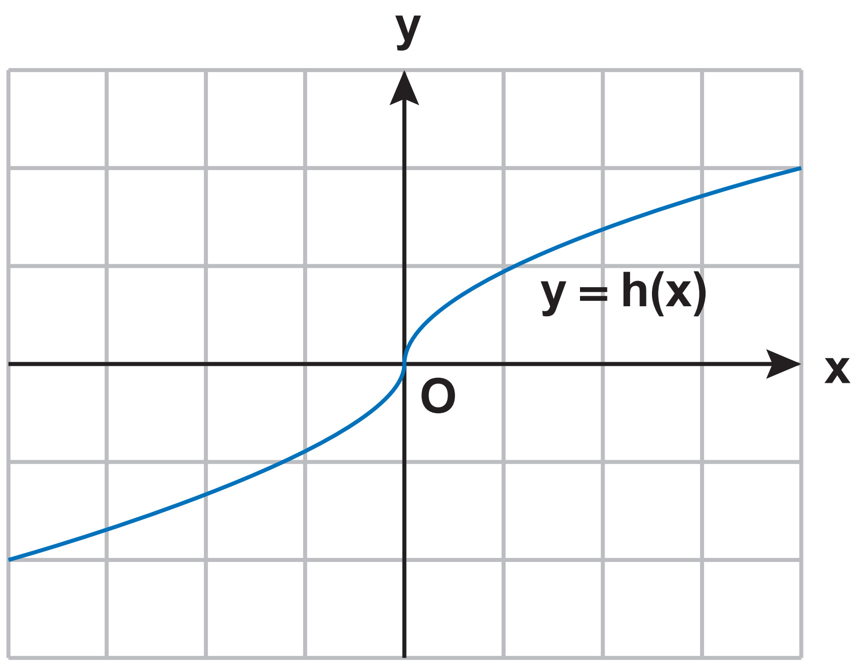




β) Παίρνουμε τις συμμετρικές των C_1, C_2 και C_3 ως προς την αρχή των αξόνων.




y
y = g(x)
x
O

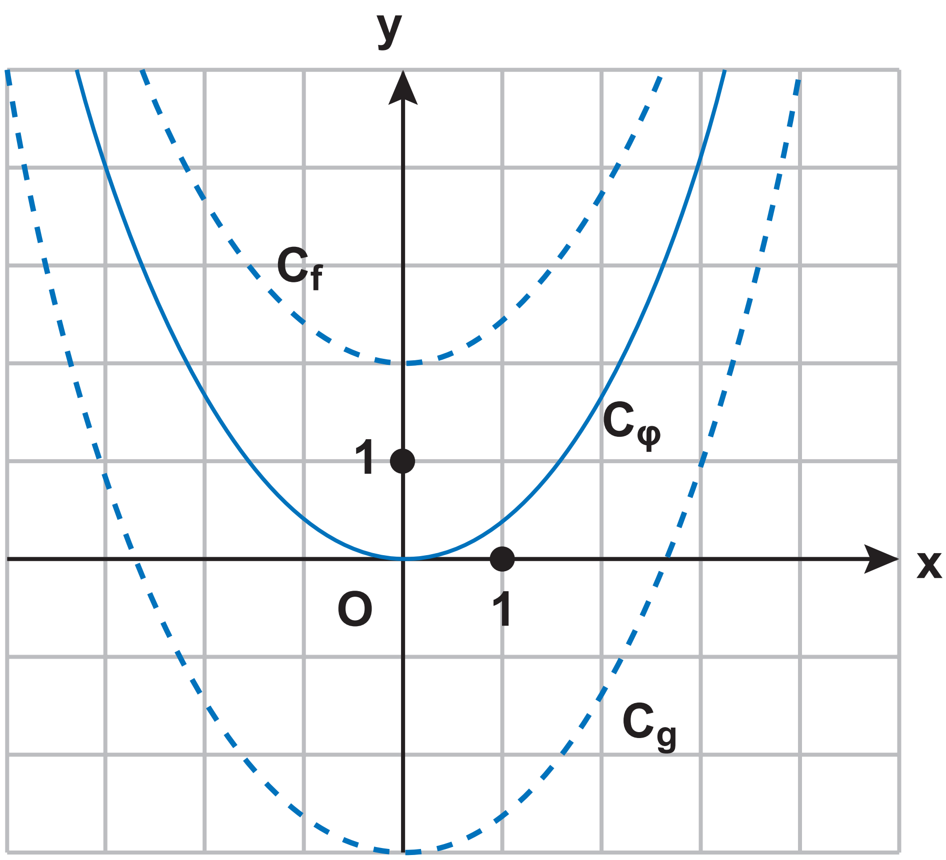

y
y = h(x)
x
O

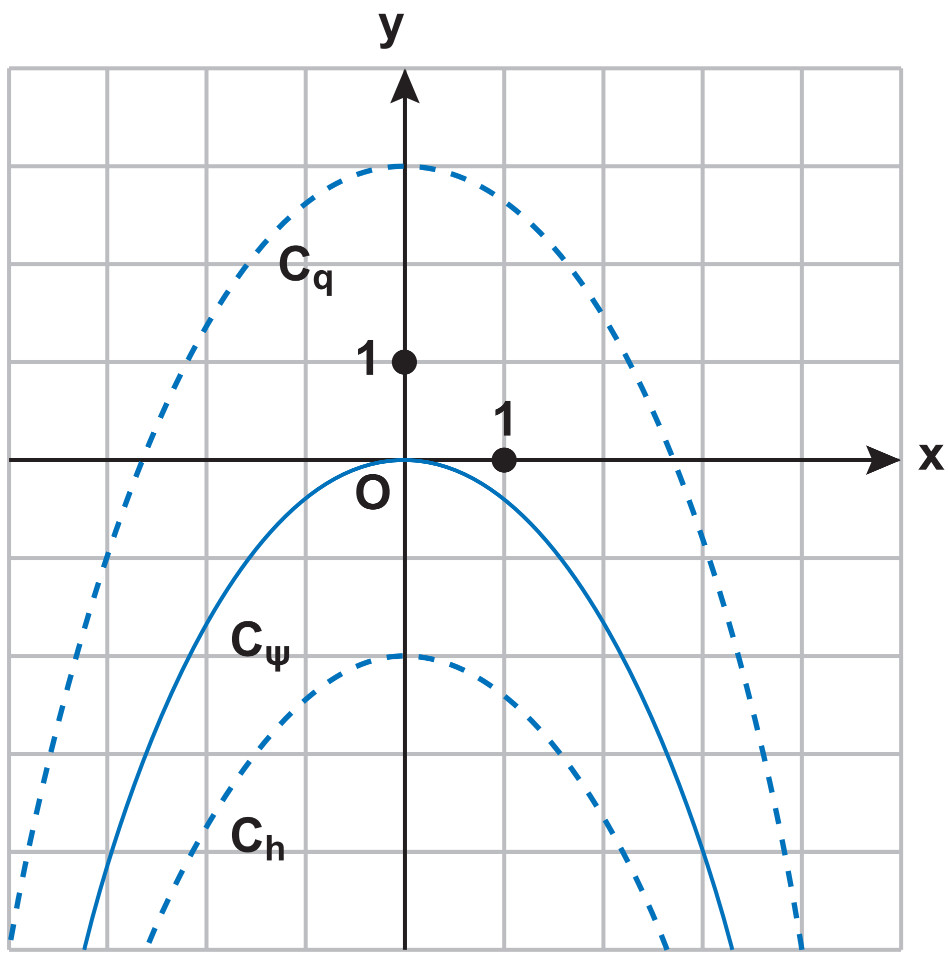
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

§ 7.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = αx^2$
Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το O(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = αx^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα θα ισχύει $2 = α \cdot 1^2 \Leftrightarrow α = 2$. Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

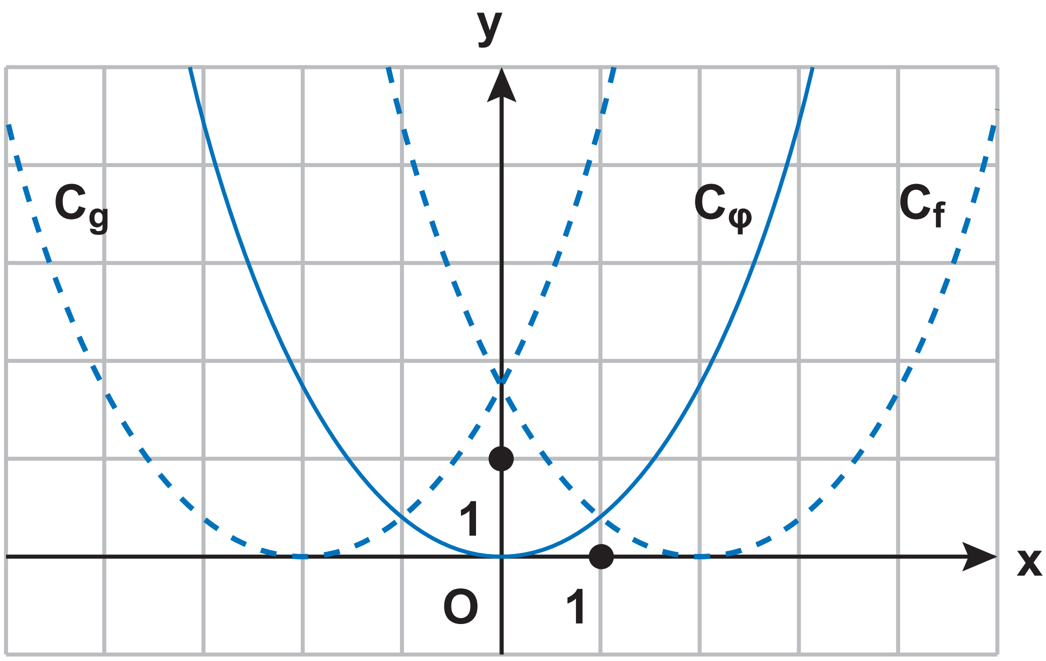
2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ.).
Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων
$f(x) = 0,5x^2 + 2$ και $g(x) = 0,5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



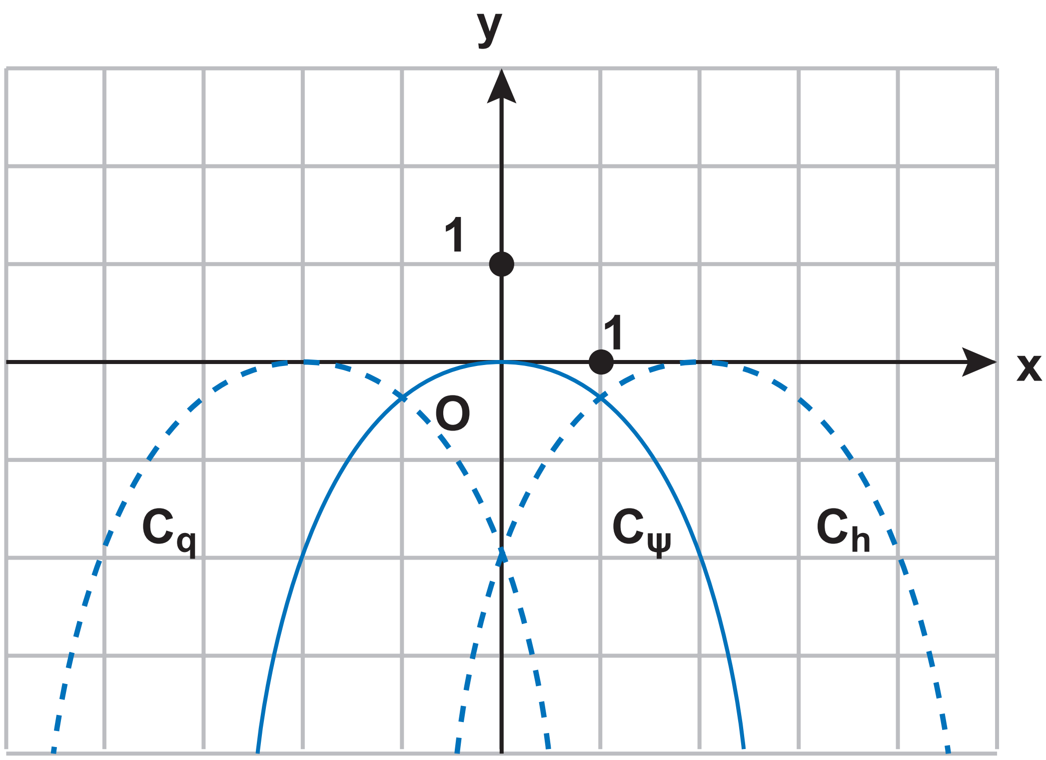


ii) Η γραφική παράσταση της $ψ(x) = -0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (σχ.). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5x^2 - 2$ και $q(x) = -0,5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.
Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0,5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 0,5(x-2)^2$ και $g(x) = 0,5(x+2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.

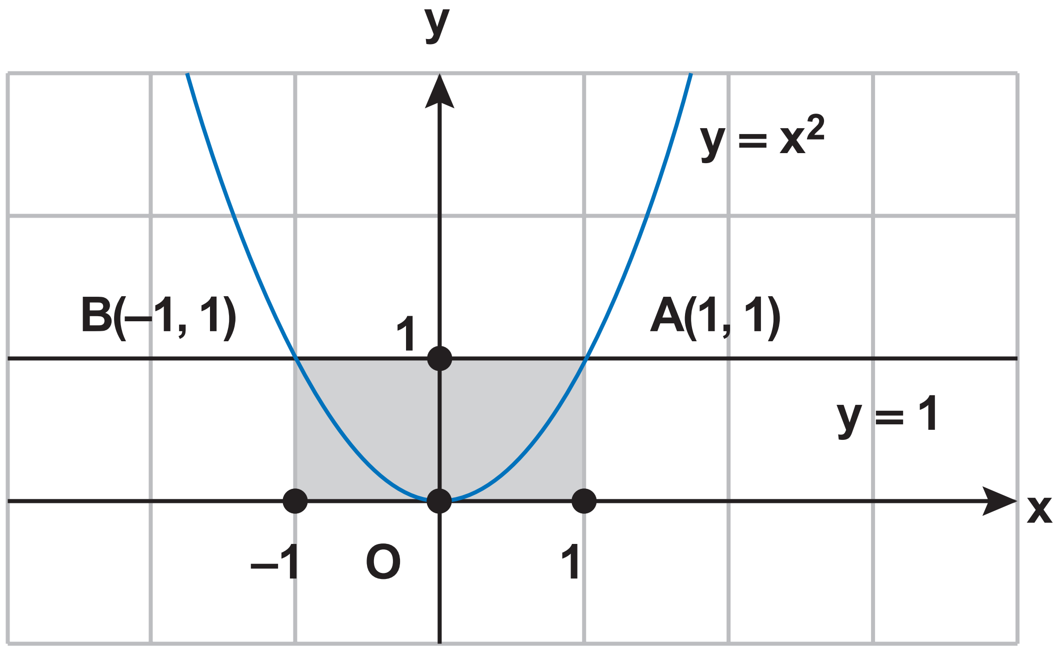


ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0,5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5(x-2)^2$ και $q(x) = -0,5(x+2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.


y
1
1
x
O
C_q
C_ψ
C_h

4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x)=x^2$ είναι η παραβολή $y=x^2$ του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=1$ είναι η ευθεία $y=1$ του ίδιου σχήματος.
Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία Α(1, 1) και Β(– 1, 1) που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.
Επειδή
$x^2 \le 1 \Leftrightarrow f(x) \le g(x)$ και $x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$
η ανίσωση $x^2 \le 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. Επομένως, θα έχουμε $x^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le x \le 1$ και
$x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

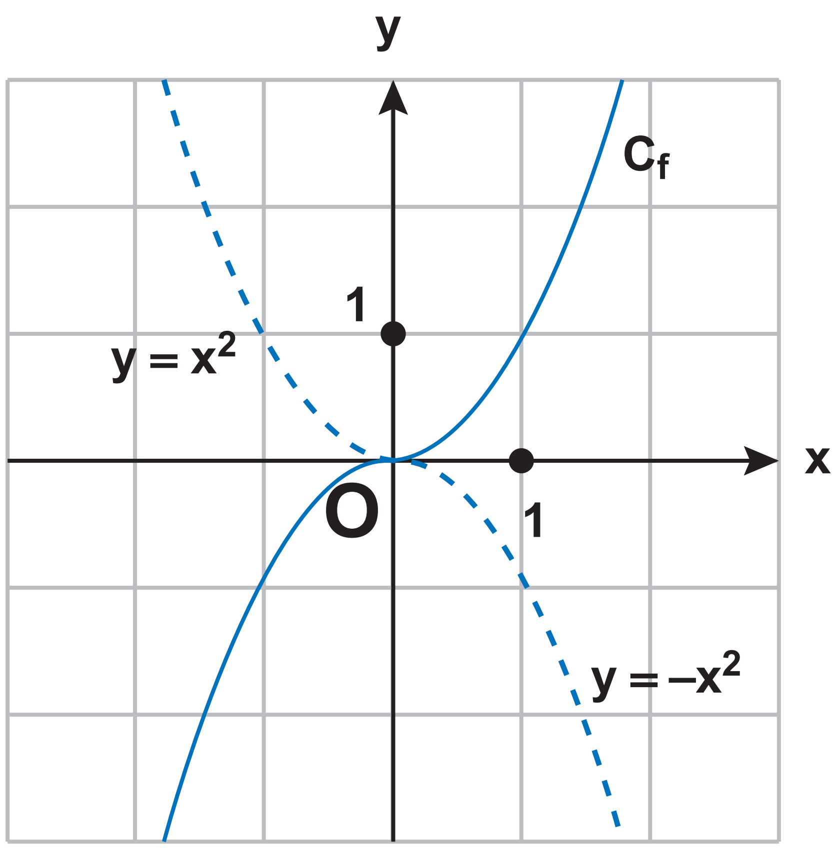
ii) Έχουμε
$x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$
$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$
διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι $f(x)=\begin{cases} -x^2, x<0 \\ x^2, x\geq 0 \end{cases}$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y=-x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.



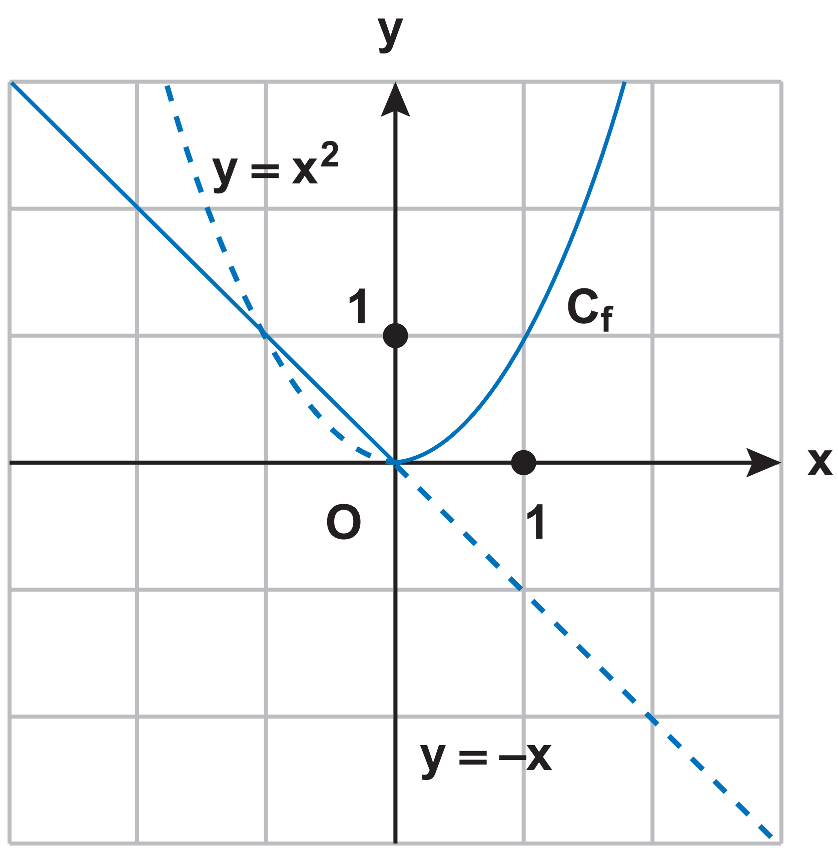
2. Η γραφική παράστασης της

$$f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$$

αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y=-x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι

- ✔ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.
- ✔ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=0$.



3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι

α) Στο διάστημα (0, 1) από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$.

Επομένως, αν $x \in (0,1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

β) Στο διάστημα $(1,+\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο.

Επομένως αν $x \in (1,+\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε

✔ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.

✔ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x-1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.

✔ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

Άρα $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

• Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι η $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2), οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y΄y, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε

$(AB) = 2x$ και $(OA) = (OB) = \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}$.

Επομένως, το τρίγωνο $O\hat{A}B$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$(OA) = (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}$, διότι $x > 0$.

§ 7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y=\frac{\alpha}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2,1), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της.

Επομένως θα ισχύει $1=\frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow \alpha=2$.

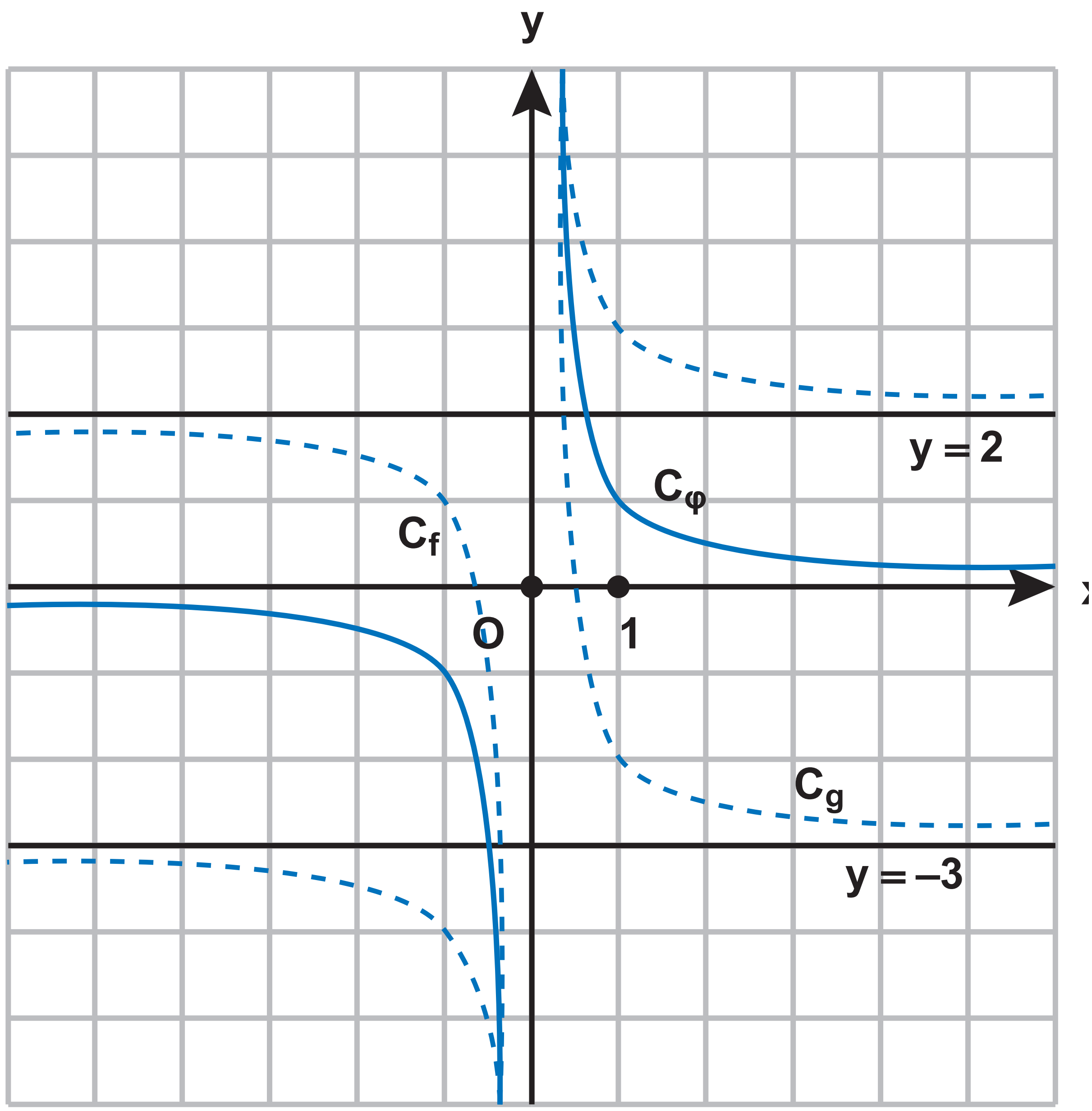
Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y=\frac{2}{x}$.

2.i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x)=\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$f(x)=\frac{1}{x}+2$ και $g(x)=\frac{1}{x}-3$

προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της υπερβολής $y=\frac{1}{x}$

της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.



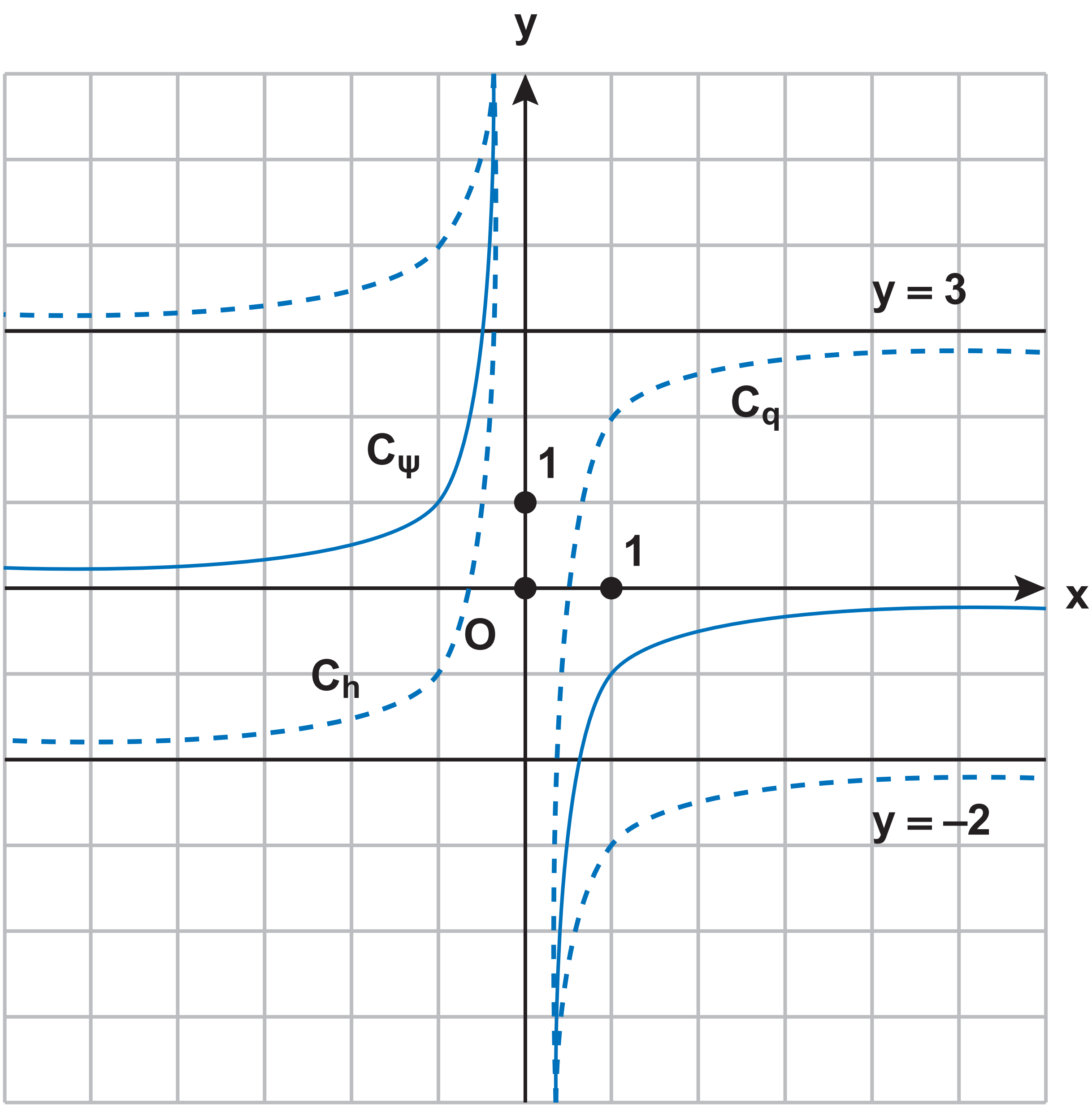
ii) Η γραφική παράσταση της $ψ(x) = -\frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).
Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$h(x) = -\frac{1}{x} - 2$ και $q(x) = -\frac{1}{x} + 3$

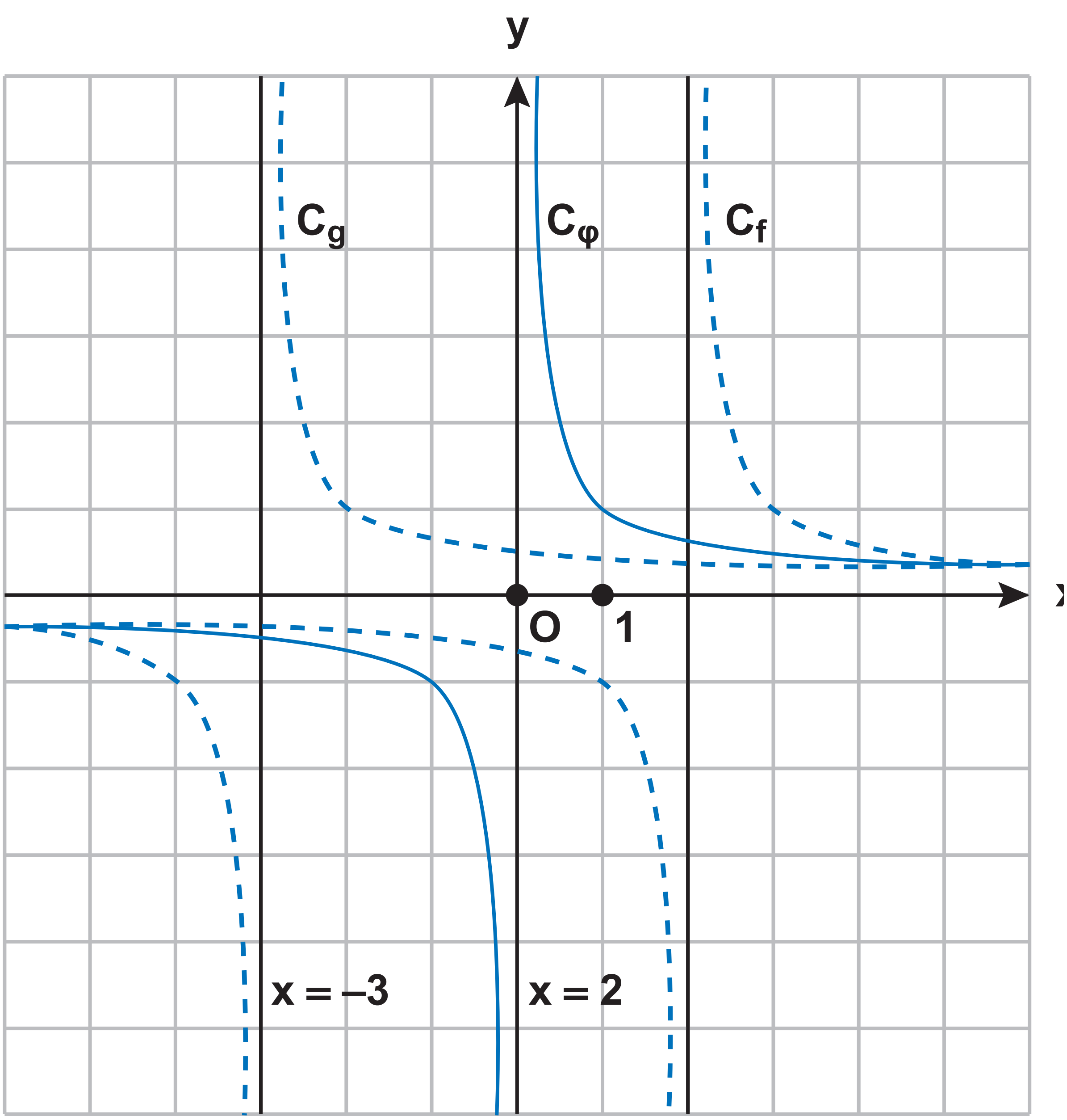
προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες

προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

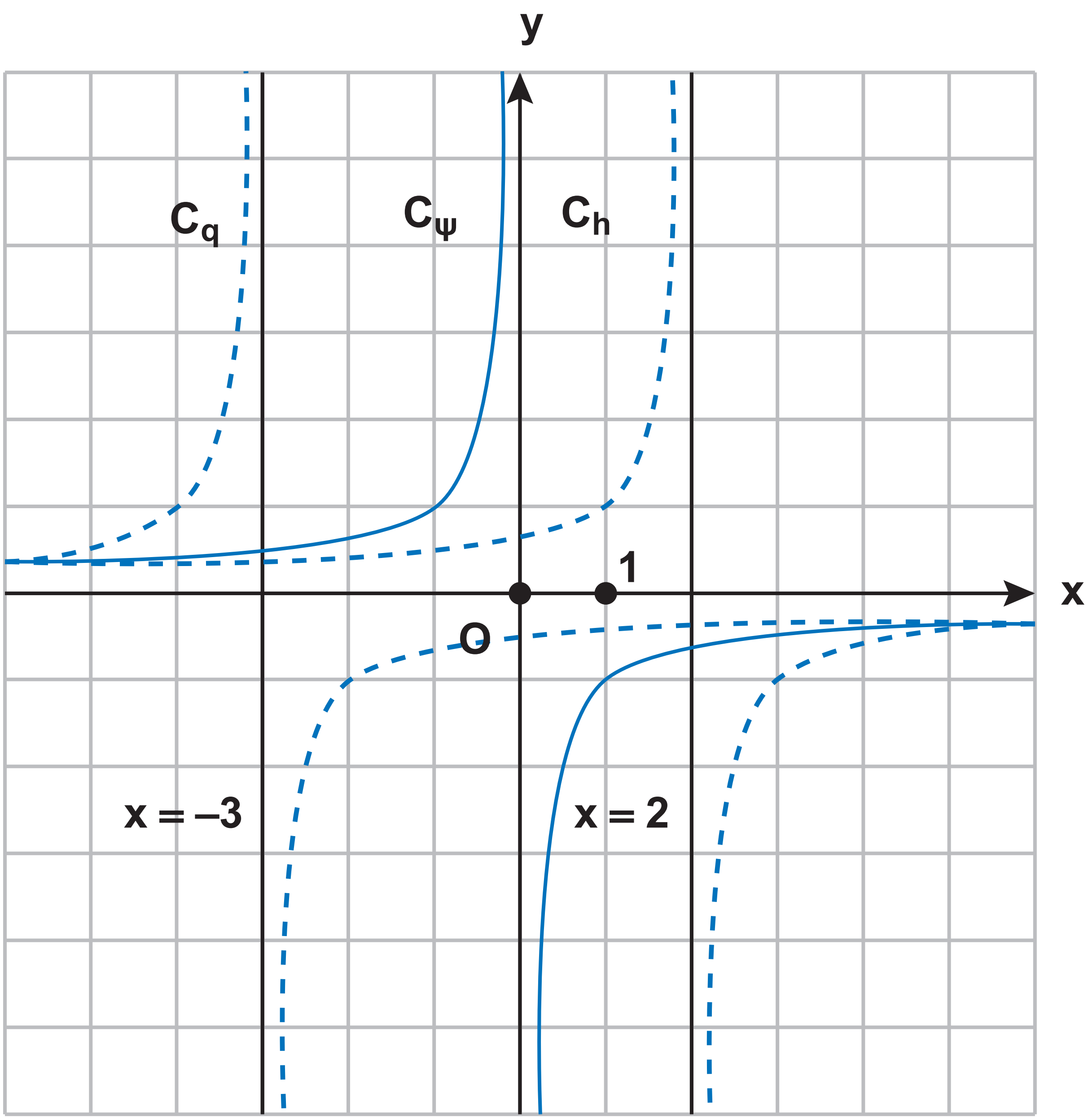
Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.



3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$ και $g(x)=\dfrac{1}{x+3}$, προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής $y=\dfrac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.



ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -\frac{1}{x-2}$ και $q(x) = -\frac{1}{x+3}$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής $y = -\frac{1}{x}$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

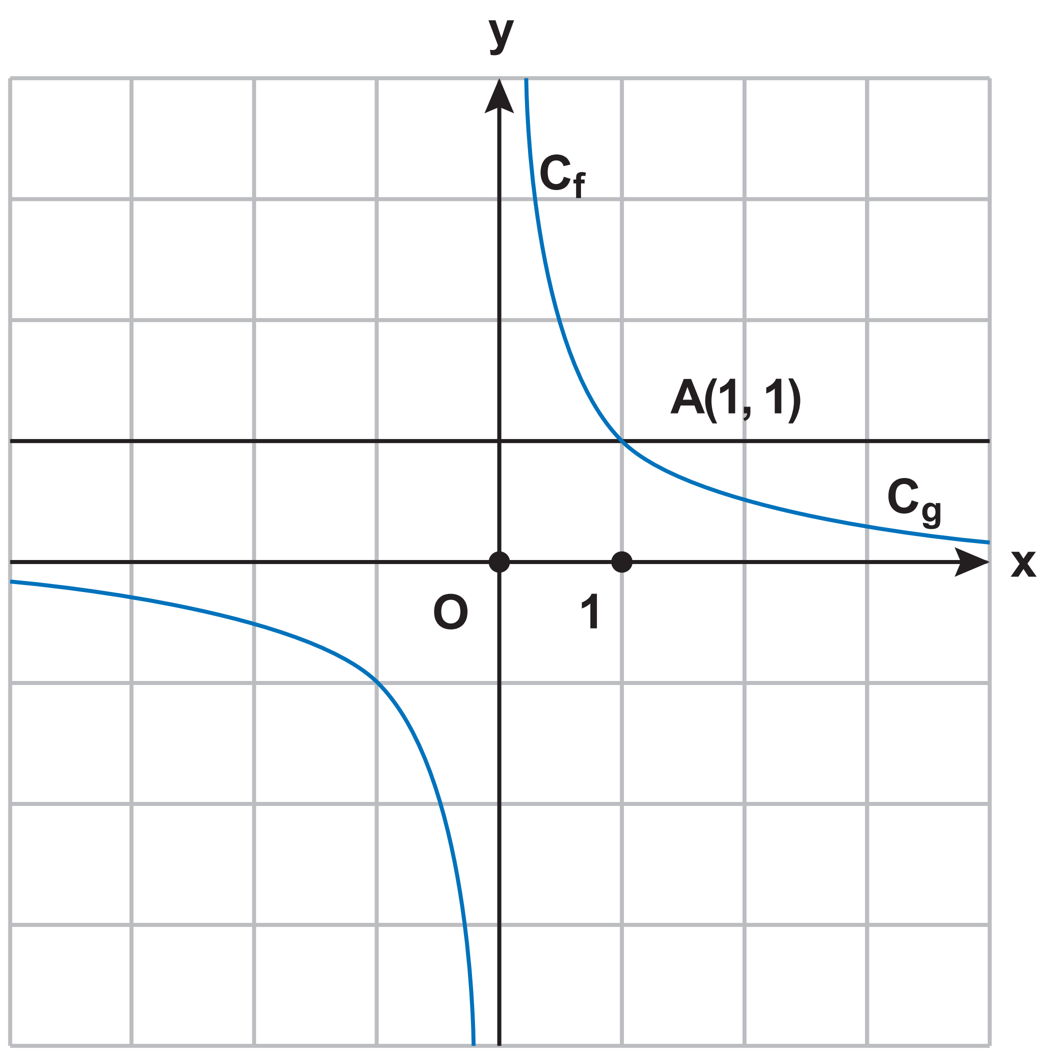


4. i) Η γραφική παράσταση της $f(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο Α(1, 1). Επομένως:

- $\dfrac{1}{x}\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow x<0$

  ή $x\geq 1$

- $\dfrac{1}{x}>1 \Leftrightarrow f(x)>g(x) \Leftrightarrow 0<x<1$



ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0$$

ή $x \geq 1$.

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,1)$.

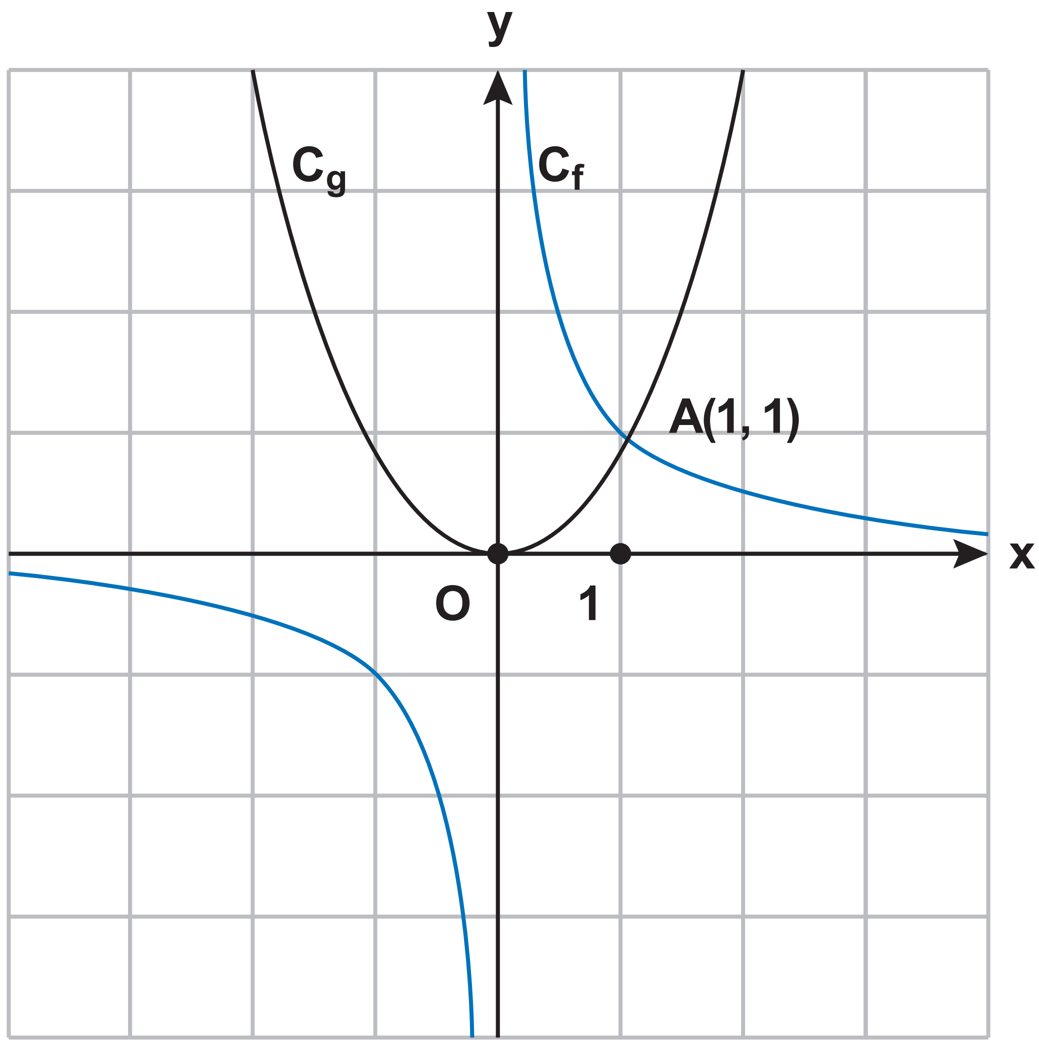
Επειδή

$$\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x) \text{ και } \frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$$

η ανίσωση $\frac{1}{x} \leq x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $\frac{1}{x} > x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

Επομένως, θα έχουμε

- $\frac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \geq 1$.
- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.



ii) Έχουμε

- $\dfrac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{x} - x^2 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-x^3}{x} \le 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{x^3-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \ge 0$ και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \ge 0$ και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

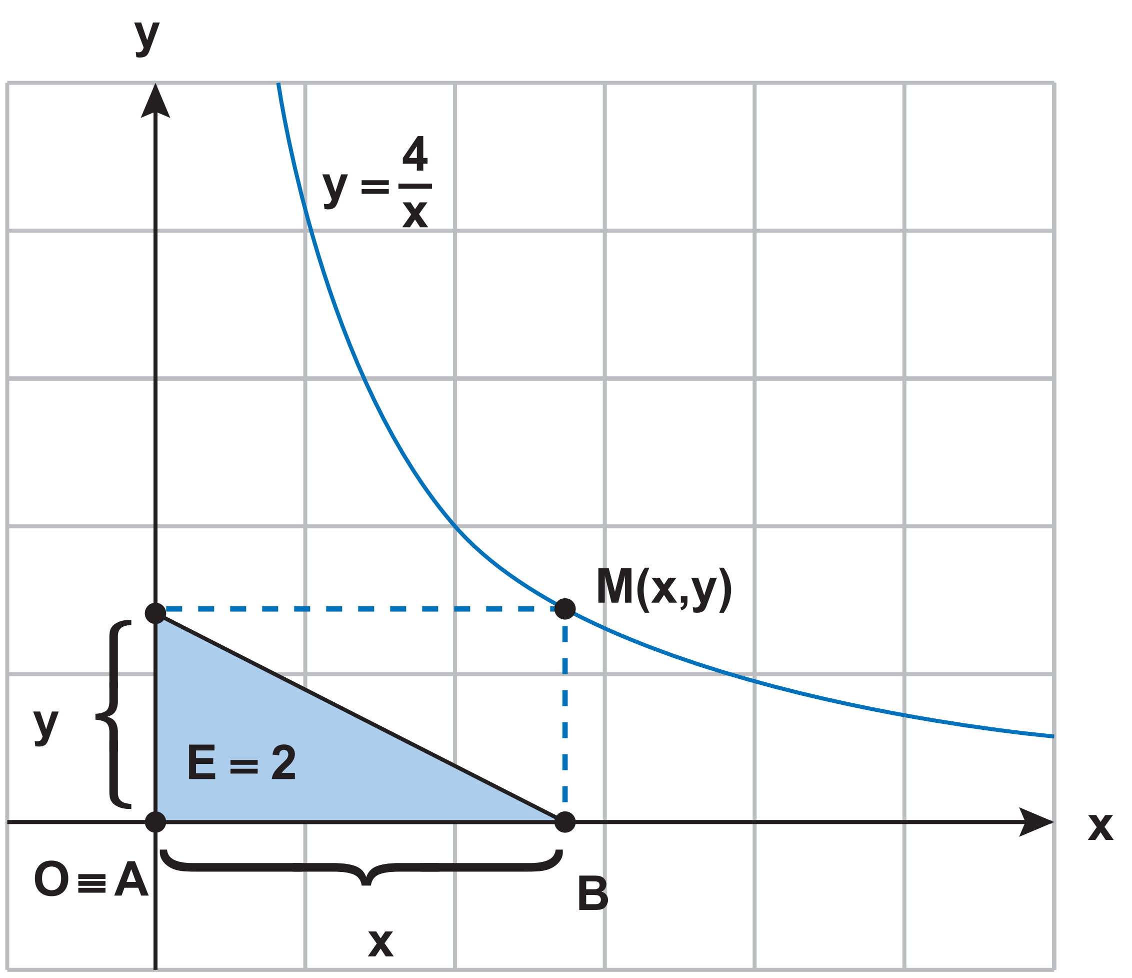
$\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0$ και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$.

Επομένως

- $\dfrac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε $AB = OA = x > 0$ και $A\Gamma = O\Gamma = y > 0$. Τότε το εμβαδό Ε του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε
$\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$, (1).
Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.



§ 7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε

$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 = 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 =$
$= 2(x - 1)^2 + 3.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε

$f(x) = - 2(x^2 - 4x) - 9 - 2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 =$
$= - 2(x - 2)^2 - 1.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = - 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}, \text{ το } f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}.$$

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = - 3x^2 - 5x + 2$ είναι $\alpha = - 3 < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-5}{6}, \text{ το } g\left(\frac{-5}{6}\right) = -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή

✔ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -1$, το $f(-1) = -1$.

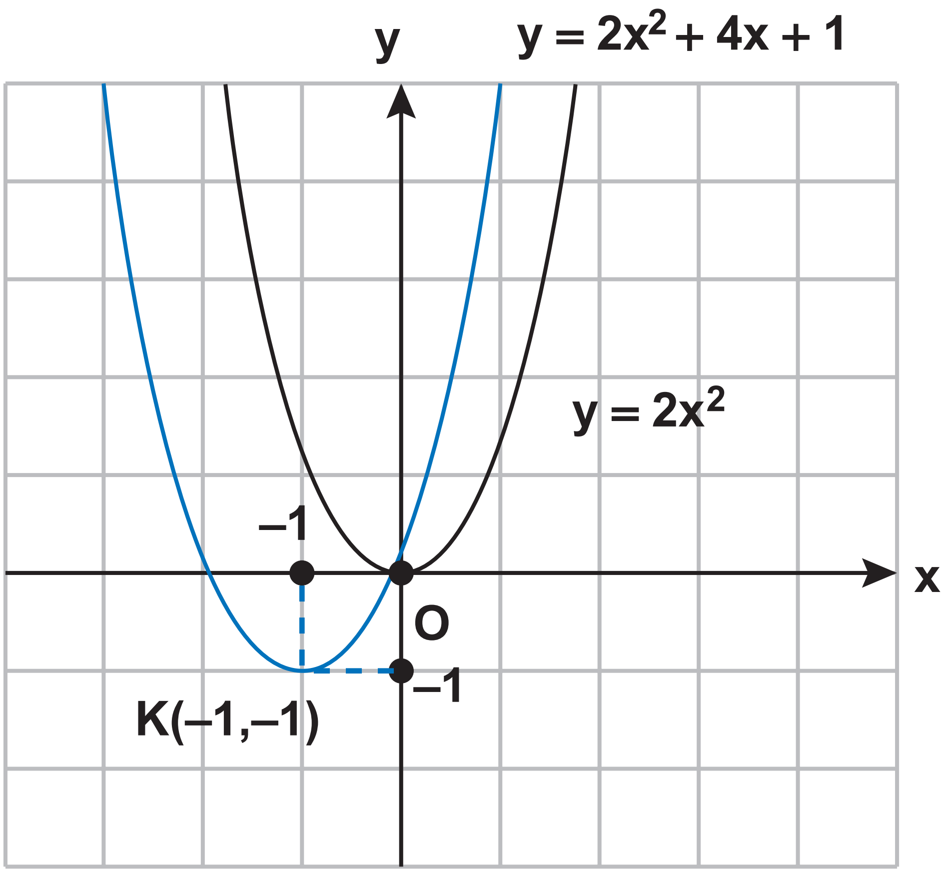
✔ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και

✔ έχει κορυφή το σημείο $K(-1,-1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,

✔ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

$$A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ και } B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα y΄y στο σημείο $\Gamma(0, 1)$.



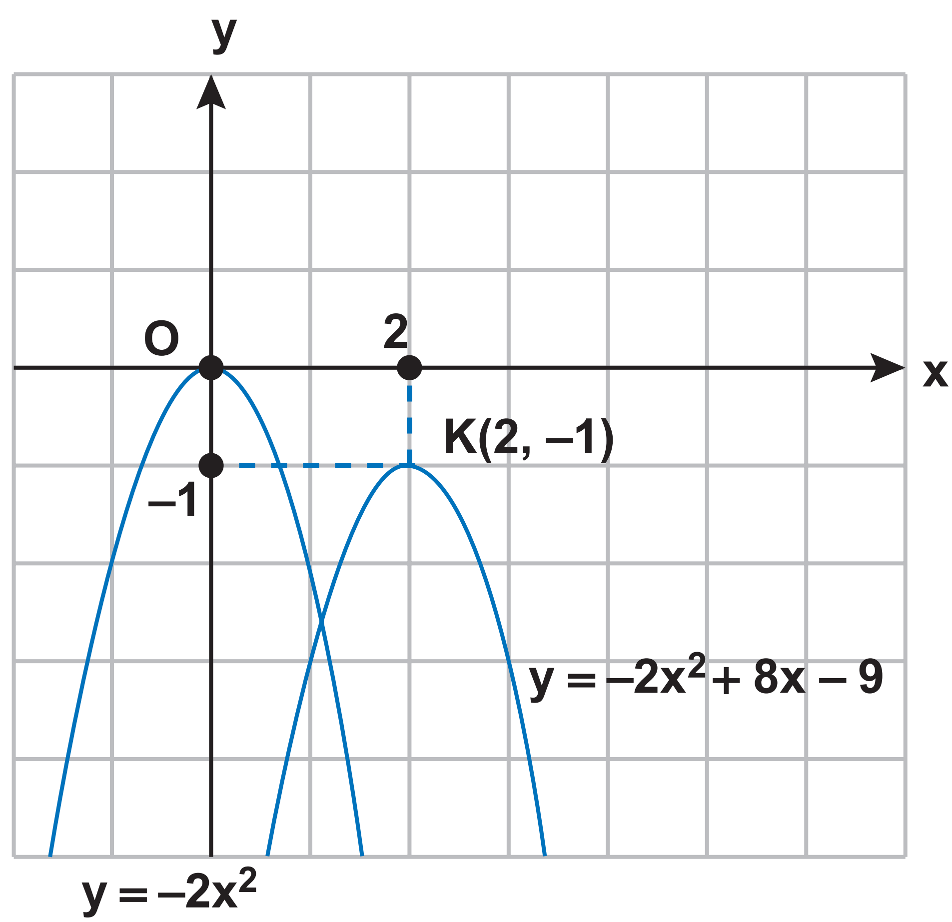
β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $\alpha = -2 < 0$, οπότε αυτή

✔ Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 2$, το $g(2) = -1$

✔ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.
Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και

✔ έχει κορυφή το σημείο $K(2, -1)$ και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,

✔ τέμνει τον άξονα $y΄y$ στο σημείο $A(0, -9)$ ενώ, δεν τέμνει τον άξονα $x΄x$, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.



4. Γνωρίζουμε ότι

i) Όταν $α > 0$, τότε η παραβολή $y = αx^2 + βx + γ$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $α < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό α έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6, ενώ αρνητικό α έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7.

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = αx^2 + βx + γ$ με τον άξονα y΄y. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5, αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7, ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4.

iii) Η τεταγμένη της κορυφής Κ της παραβολής

$y = αx^2 + βx + γ$ δίνεται από τον τύπο $x_K = \dfrac{-β}{2α}$,

οπότε ισχύει $β = -2α \cdot x_K$.

Επομένως

✔ για την f_2 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✔ για την f_3 που έχει $α > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β < 0$,
✔ για την f_4 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✔ για την f_5 που έχει $α < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $β > 0$,
✔ για την f_6 που έχει $α > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $β > 0$, και
✔ για την f_7 που έχει $α < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $β < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	−	+	−	−	+	−
β	0	+	−	+	+	+	−
γ	+	−	−	0	+	−	−
Δ	−	0	+	+	+	+	−

B΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του x΄x μόνο αν είναι $\Delta = 0$.

Δηλαδή $(k+1)^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 1$.

ii) Η παραβολή έχει τον y΄y άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y'y, δηλαδή αν και μόνο αν $\frac{-\beta}{2\alpha} = 0$.

Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$ δηλαδή το σημείο

$$K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right).$$

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει $f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4$,

που διαδοχικά γράφεται

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0 \Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0 \Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.

- Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
- Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $α < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία Α(1, 0) και Β(5, 0), το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $ρ_1 = 1$ και $ρ_2 = 5$.
Άρα είναι $Δ > 0$.

iii) Επειδή $ρ_1 + ρ_2 = \frac{-β}{α}$ και $β = 6$, θα έχουμε $1 + 5 = \frac{-6}{α}$, οπότε θα είναι $α = -1$.

Τέλος, επειδή $ρ_1 \cdot ρ_2 = \frac{γ}{α}$, θα έχουμε $1 \cdot 5 = \frac{γ}{-1}$, οπότε θα είναι $γ = -5$.
Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.
Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $ρ_1 = 1$ και $ρ_2 = 5$, θα είναι της μορφής $ρ(x) = α(x - ρ_1)(x - ρ_2) = α(x - 1)(x - 5) = αx^2 - 6αx + 5α$.
Επομένως θα είναι $β = -6α$ και επειδή $β = 6$, θα έχουμε $α = -1$.
Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει $2(x + y) = 20 \Leftrightarrow x + y = 10 \Leftrightarrow y = 10 - x$.
Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με $E = xy = x(10 - x) = -x^2 + 10x$.
Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο f(x). Αυτό συμβαίνει όταν $x = \frac{-β}{2α} = \frac{-10}{-2} = 5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x = 5$ είναι και $y = 5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με $f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

4. Αν θέσουμε (ΑΜ) = x, τότε θα είναι (ΜΒ) = 6 – x (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε

$$υ_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4}, \text{ οπότε } υ_1 = \frac{x\sqrt{3}}{2}.$$

Ομοίως από το τρίγωνο ΛΔΒ παίρνουμε $υ_2 = \frac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

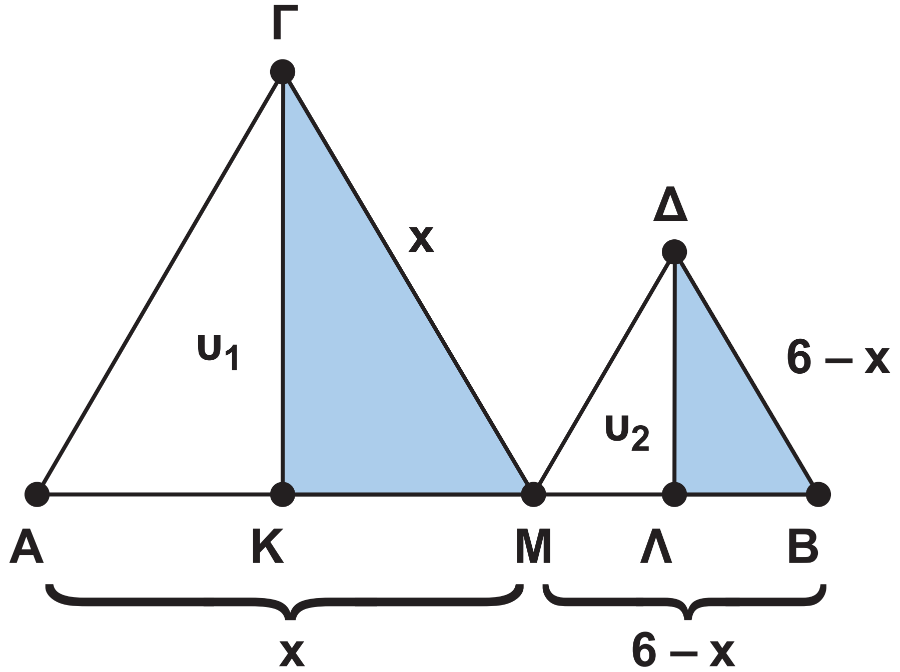
$$E = E_1 + E_2 = \frac{1}{2}(ΑΜ)(ΚΓ) + \frac{1}{2}(ΜΒ)(ΛΔ) =$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x)\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)$$

Άρα $E = \frac{\sqrt{3}}{2}(x^2 - 6x + 18)$, με $0 \le x \le 6$. (1)

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν Ε είναι ελάχιστο για την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 6x + 18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $α = 1 > 0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για $x = \frac{-β}{2α} = \frac{6}{2} = 3$.

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.



5. **Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει**

$$2x+2x+3y=240 \Leftrightarrow 4x+3y=240 \Leftrightarrow y=\frac{240-4x}{3}\,. \quad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E=2xy=2x\left(\frac{240-4x}{3}\right)=-\frac{8}{3}x^2+160x \qquad (2)$$

Για τη συνάρτηση $E(x)=-\frac{8}{3}x^2+160x$ **είναι** $\alpha=-\frac{8}{3}<0$, **οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για**

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-160}{\frac{-16}{3}}=30.$$

Τότε από την (1) παίρνουμε $y=\frac{240-4\cdot 30}{3}=40.$

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι $x=30$ **m και** $y=40$ **m.**

1. i) Έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-2\gamma\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha.$$

ii) Έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]\geq 0$$ που ισχύει.

Το "=" ισχύει αν και μόνο αν

$\alpha-\beta=0$ και $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0\Leftrightarrow\alpha=\beta=\gamma$.

2. i) Έχουμε $(\kappa\beta)^2+(\kappa\gamma)^2=\kappa^2\beta^2+\kappa^2\gamma^2=\kappa^2(\beta^2+\gamma^2)=$
$=\kappa^2\alpha^2=(\kappa\alpha)^2$.

ii) Έχουμε $(\mu^2-\nu^2)^2+(2\mu\nu)^2=\mu^4-2\mu^2\nu^2+\nu^4+4\mu^2\nu^2=$
$=\mu^4+2\mu^2\nu^2+\nu^4=(\mu^2+\nu^2)^2$.

3	4	5
8	6	10
5	12	13
21	20	29
16	30	34
15	8	17

3. **Α)** Έχουμε $\alpha\beta \le \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow \alpha\beta \le \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 4\alpha\beta \le \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \le \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 0 \le \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \Leftrightarrow 0 \le (\alpha-\beta)^2$, που ισχύει.
Το "=" ισχύει όταν $\alpha=\beta$.
Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β δεν υπερβαίνει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το ημιάθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Β) Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του είναι $E=\alpha\beta$ και η περίμετρός του $P=2(\alpha+\beta)$.

i) Έτσι η προηγούμενη ανισότητα γράφεται

$$E \le \left(\frac{P}{4}\right)^2.$$

Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $\alpha=\beta=\frac{P}{4}$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

ii) Λόγω της (i) έχουμε

$$E \le \left(\frac{P}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{E} \le \frac{P}{4} \Leftrightarrow P \ge 4\sqrt{E}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $\alpha=\beta$.
(Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν γνωστό πριν την εποχή του Ευκλείδη).

4. i) $3(x+1)-\alpha x=4 \Leftrightarrow 3x+3-\alpha x=4 \Leftrightarrow (3-\alpha)x=1.$

• Αν $\alpha \neq 3$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{1}{3-\alpha}$.

• Αν $\alpha = 3$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=1$ και είναι αδύνατη.

ii) Για $\alpha \neq 3$ πρέπει $\dfrac{1}{3-\alpha}>1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{3-\alpha}-1>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1-3+\alpha}{3-\alpha}>0 \Leftrightarrow \dfrac{\alpha-2}{3-\alpha}>0 \Leftrightarrow (\alpha-2)(3-\alpha)>0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha-3)<0 \Leftrightarrow 2<\alpha<3.$

5. i) Έχουμε $\lambda^2(x-1)+3\lambda=x+2 \Leftrightarrow \lambda^2x-\lambda^2+3\lambda=x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2x-x=\lambda^2-3\lambda+2 \Leftrightarrow (\lambda^2-1)x=\lambda^2-3\lambda+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)x=(\lambda-1)(\lambda-2).$

ii) • Αν $\lambda \neq \pm 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda-1)}=\dfrac{\lambda-2}{\lambda+1}$.

• Για $\lambda=-1$, η εξίσωση γίνεται $0x=6$ και είναι αδύνατη.

• Για $\lambda=1$, η εξίσωση γίνεται $0x=0$ και είναι ταυτότητα.

iii) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x=\dfrac{1}{4}$, αν και μόνο αν ισχύει

$(\lambda-1)(\lambda+1)\dfrac{1}{4}=(\lambda-1)(\lambda-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1)=4(\lambda-1)(\lambda-2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda-1)(3\lambda-9)=0 \Leftrightarrow \lambda=1$ ή $\lambda=3.$

6. A) i) Έχουμε

$$180 = 60t - \frac{1}{2}\cdot 10t^2 \Leftrightarrow 18 = 6t - \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 36 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow (t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 6 \text{ sec.}$$

ii) Έχουμε

$$100 = 60t - \frac{1}{2}\cdot 10t^2 \Leftrightarrow 10 = 6t - \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 20 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 = 0.$$

$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = 64$

Επομένως $t = \frac{12 \pm 8}{2} \Leftrightarrow t = 2$ sec ή $t = 10$ sec.

Στην περίπτωση i) το ύψος των 180 μέτρων είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει το σώμα, αφού η συνάρτηση του ύψους είναι $h(t) = -\frac{1}{2}\cdot 10 \cdot t^2 + 60t$, δηλαδή

$h(t) = -5t^2 + 60t$ και έχει μέγιστο για $t = \frac{-60}{2(-5)} = 6$ sec,

το $h(6) = 180$ μέτρα.

Στη δεύτερη περίπτωση οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι οι χρονικές στιγμές που το σώμα θα βρεθεί σε ύψος 100 μέτρων, μια στην άνοδο όταν $t = 2$ sec και μια στην κάθοδο όταν $t = 10$ sec.

B) Για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0, θα πρέπει το h_0 να είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το μέγιστο της συνάρτησης $h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \upsilon_0 t$.

Το μέγιστο της συνάρτησης αυτής είναι ίσο με

$$h\left(\frac{-\upsilon_0}{2\left(-\frac{1}{2}\right)g}\right) = h\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2 + \upsilon_0 \cdot \frac{\upsilon_0}{g} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \frac{υ_0^2}{g} + \frac{υ_0^2}{g} = \frac{-υ_0^2}{2g} + \frac{2υ_0^2}{2g} = \frac{υ_0^2}{2g}.$$

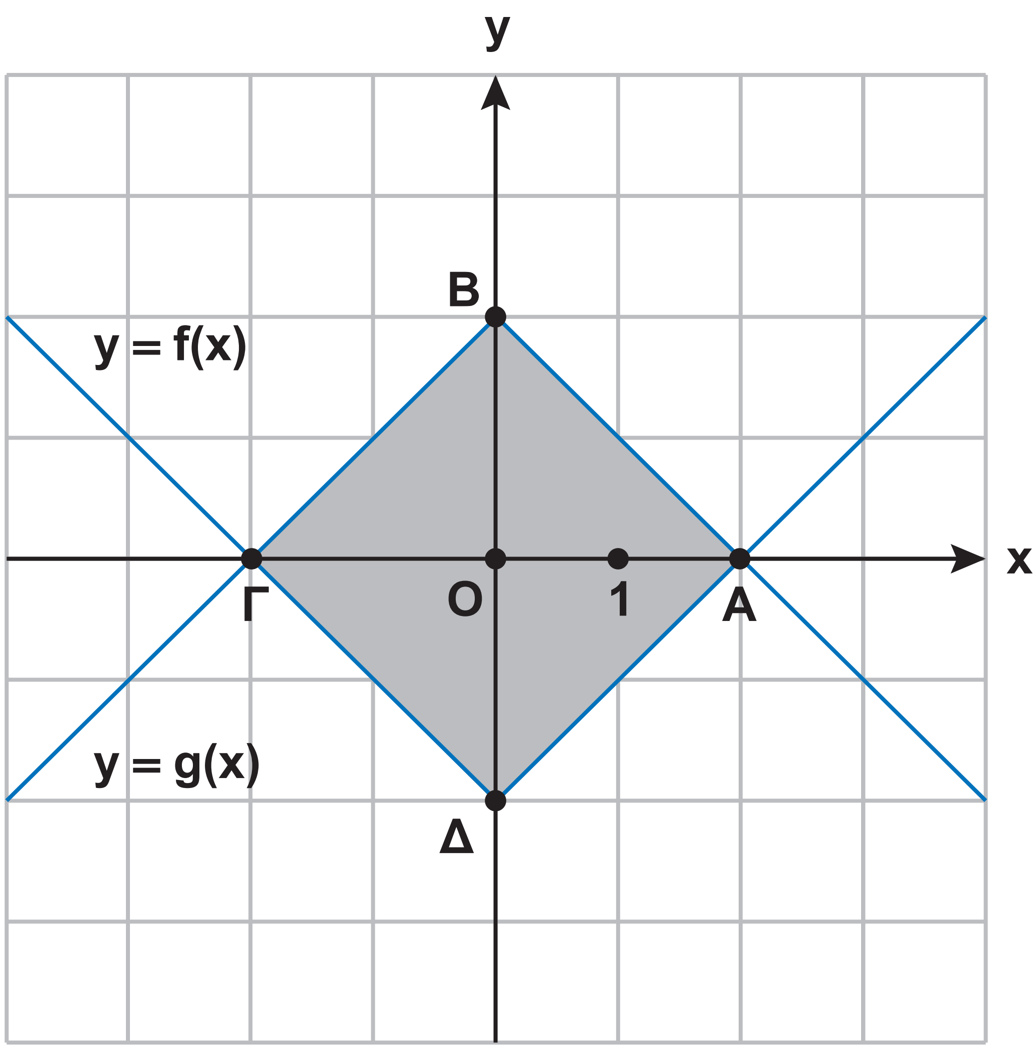
Άρα για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0 πρέπει $h_0 \le \frac{υ_0^2}{2g}$.

7. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 2 - |x|$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x΄x, διότι η g είναι αντίθετη της f (σχ.).
Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία Α(2, 0), Β(0, 2), Γ(–2, 0) και Δ(0, –2). Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\triangle}{OAB}$, δηλαδή είναι ίσο με

$$E_{ΑΒΓΔ} = 4 \cdot E_{OAB} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) = 8 \text{ τμ.}$$

Σημείωση: Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, διότι έχει όλες του τις γωνίες ορθές και όλες του τις πλευρές ίσες, με μήκος $2\sqrt{2}$.
Επομένως το εμβαδόν του είναι ίσο με

$$E_{ΑΒΓΔ} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8 \text{ τμ.}$$

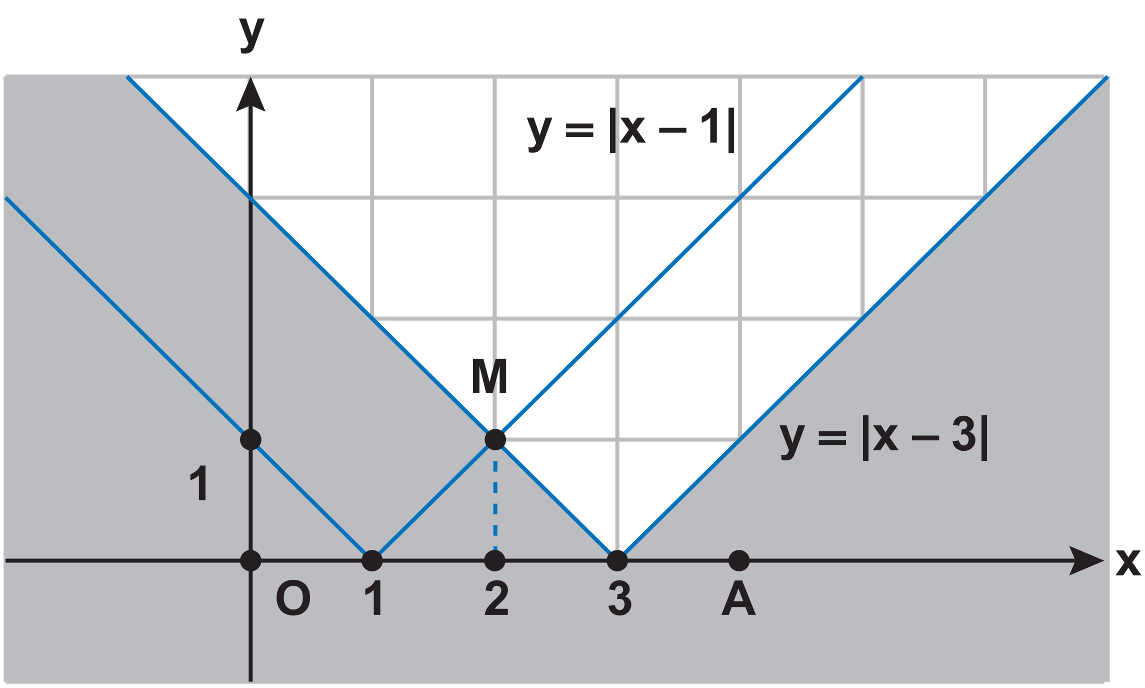


8. Η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=|x-3|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά (σχ.). Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο Α(2,1).
Οι λύσεις της ανίσωσης $|x-1|<|x-3|$ είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $y=|x-1|$ βρίσκεται κάτω από την $y=|x-3|$. Αυτό συμβαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν $x<2$.

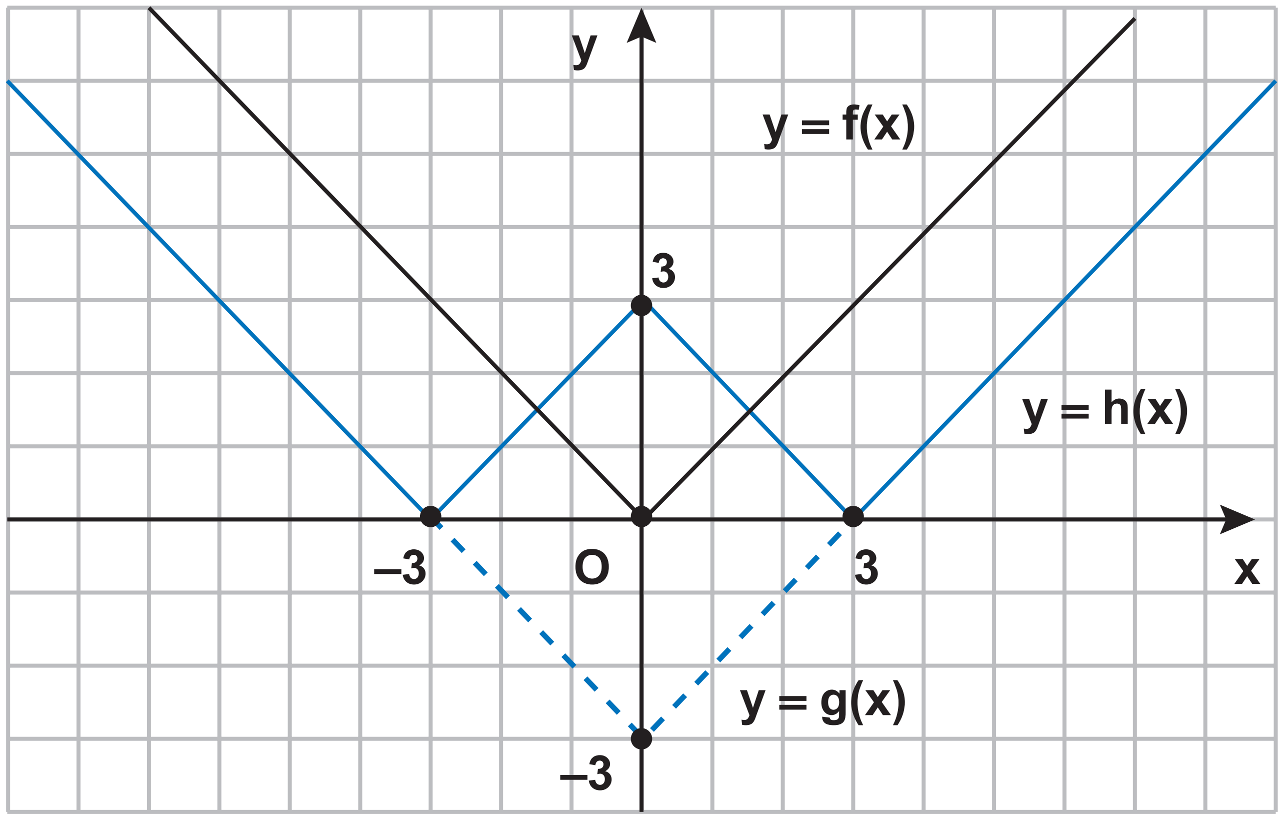
Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται αλγεβρικά ως εξής

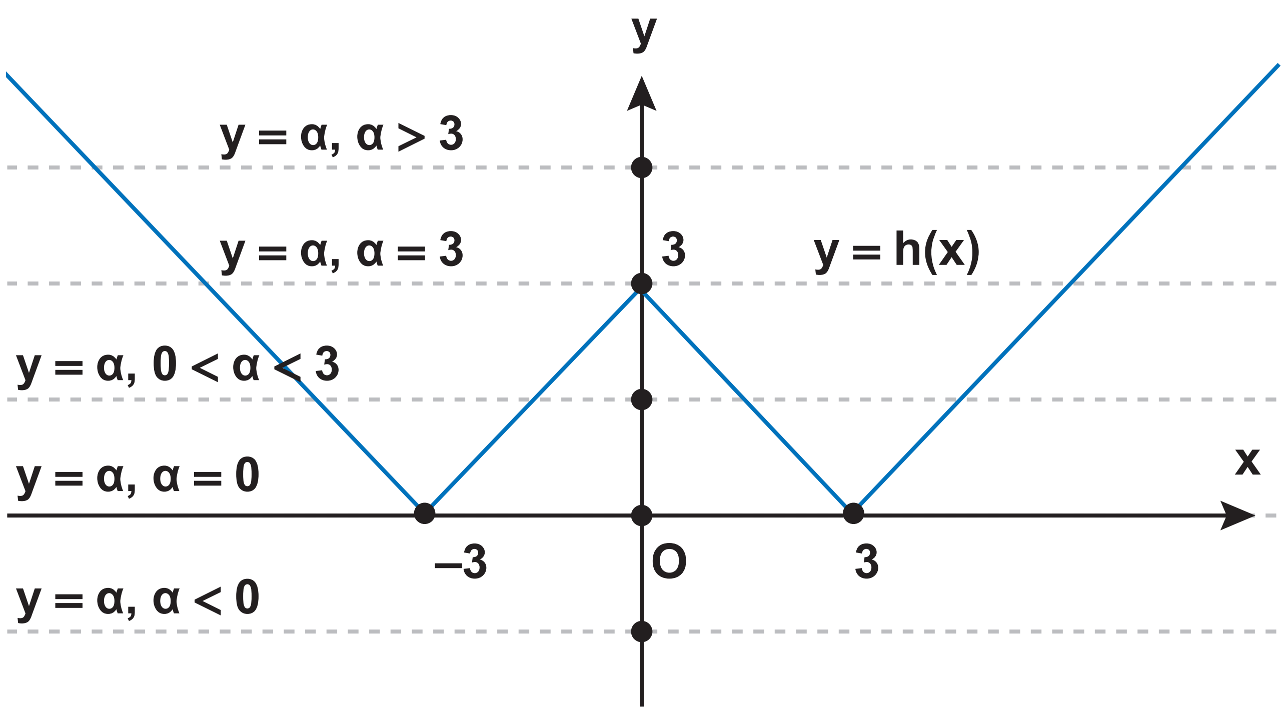
$$|x-1|<|x-3| \Leftrightarrow |x-1|^2<|x-3|^2 \Leftrightarrow (x-1)^2<(x-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1<x^2-6x+9 \Leftrightarrow 4x<8 \Leftrightarrow x<2.$$



9. A) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες προς τα κάτω.
Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g, αν παρατηρήσουμε ότι $h(x)=g(x)$, για $x\leq 3$ ή $x\geq 3$ και $h(x)=-\,g(x)$ για $-3\leq x\leq 3$.





Β) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος

$$\begin{cases} y = \left| |x| - 3 \right| \\ y = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

παριστάνεται από το πλήθος των σημείων τομής

της οριζόντιας ευθείας $y = \alpha$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h. Επομένως,

- Αν $\alpha < 0$, το σύστημα δεν έχει λύσεις, δηλαδή είναι αδύνατο.
- Αν $\alpha = 0$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $0 < \alpha < 3$, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις.
- Αν $\alpha = 3$, το σύστημα έχει τρεις λύσεις.
- Αν $\alpha > 3$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.

10. i) Έχουμε $y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Leftrightarrow y = x$ ή $y = -x$, που είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων.

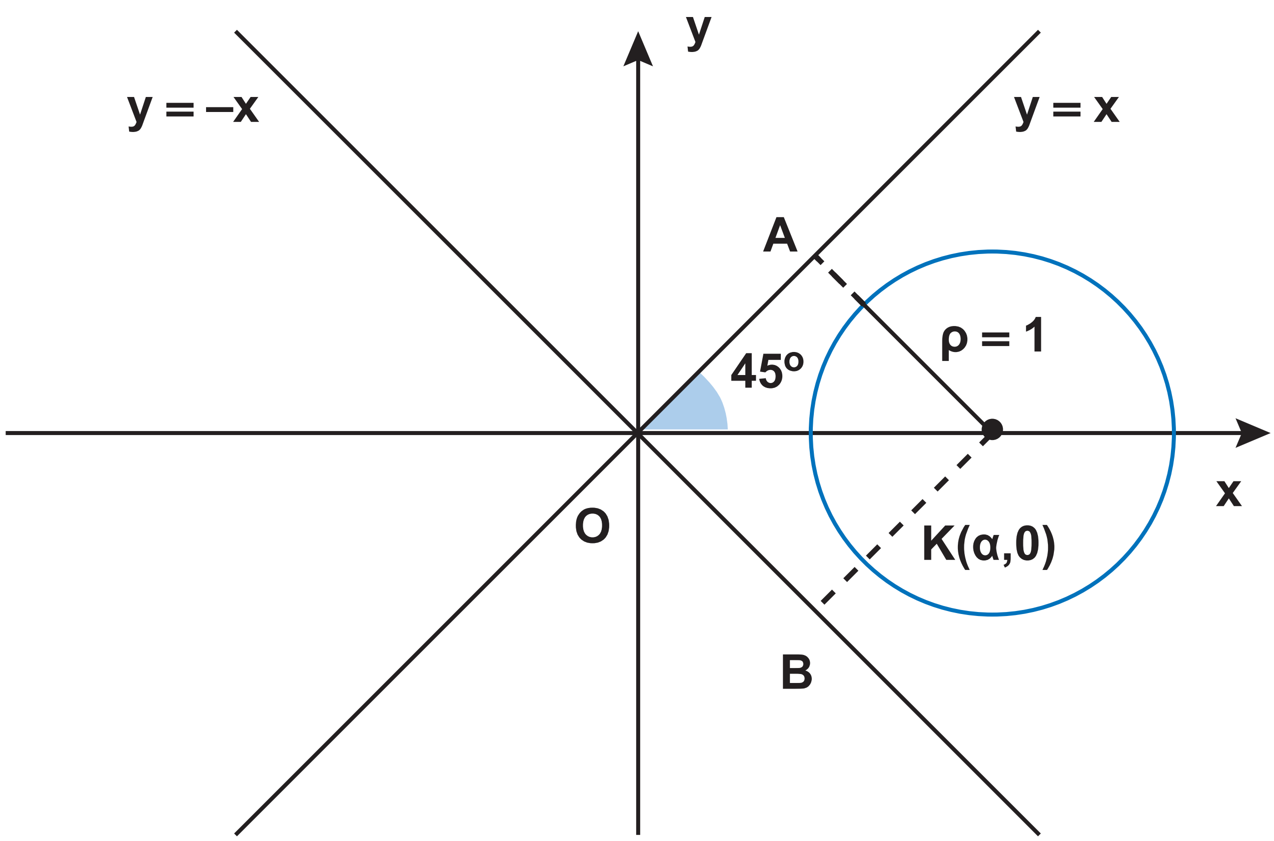
ii) Η απόσταση των σημείων $K(\alpha, 0)$ και $M(x, y)$ είναι ίση με

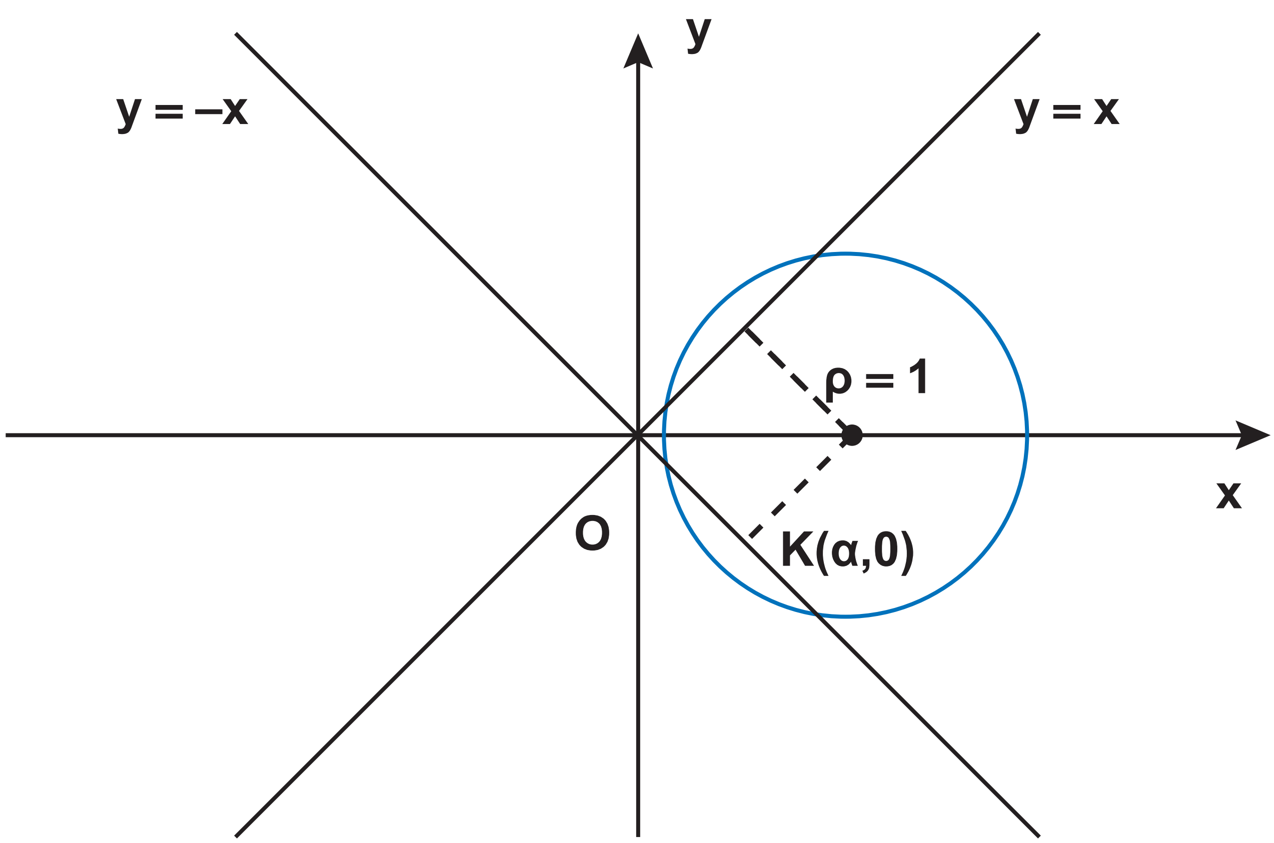
$$d = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-0)^2} = \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}.$$

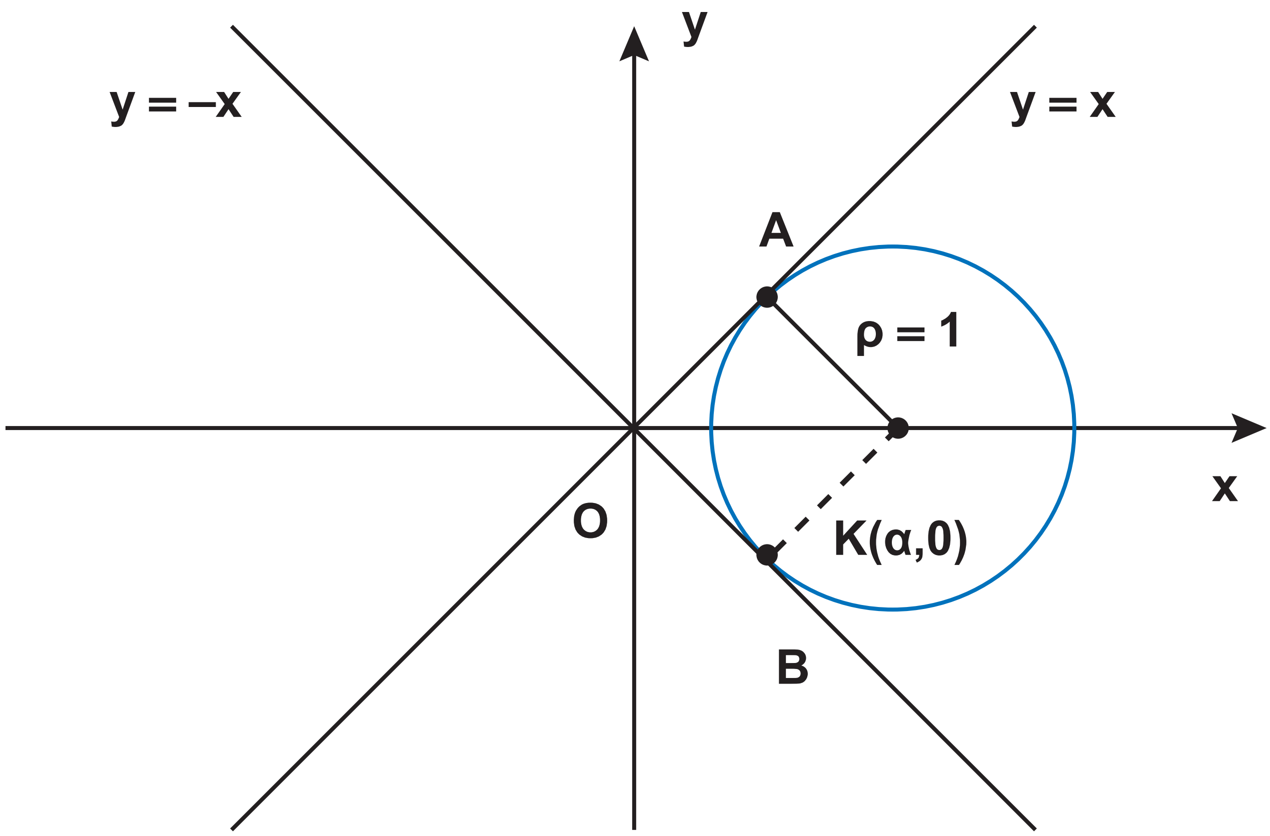
Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στον κύκλο με κέντρο $K(\alpha, 0)$ και ακτίνα $\rho = 1$, αν και μόνο αν

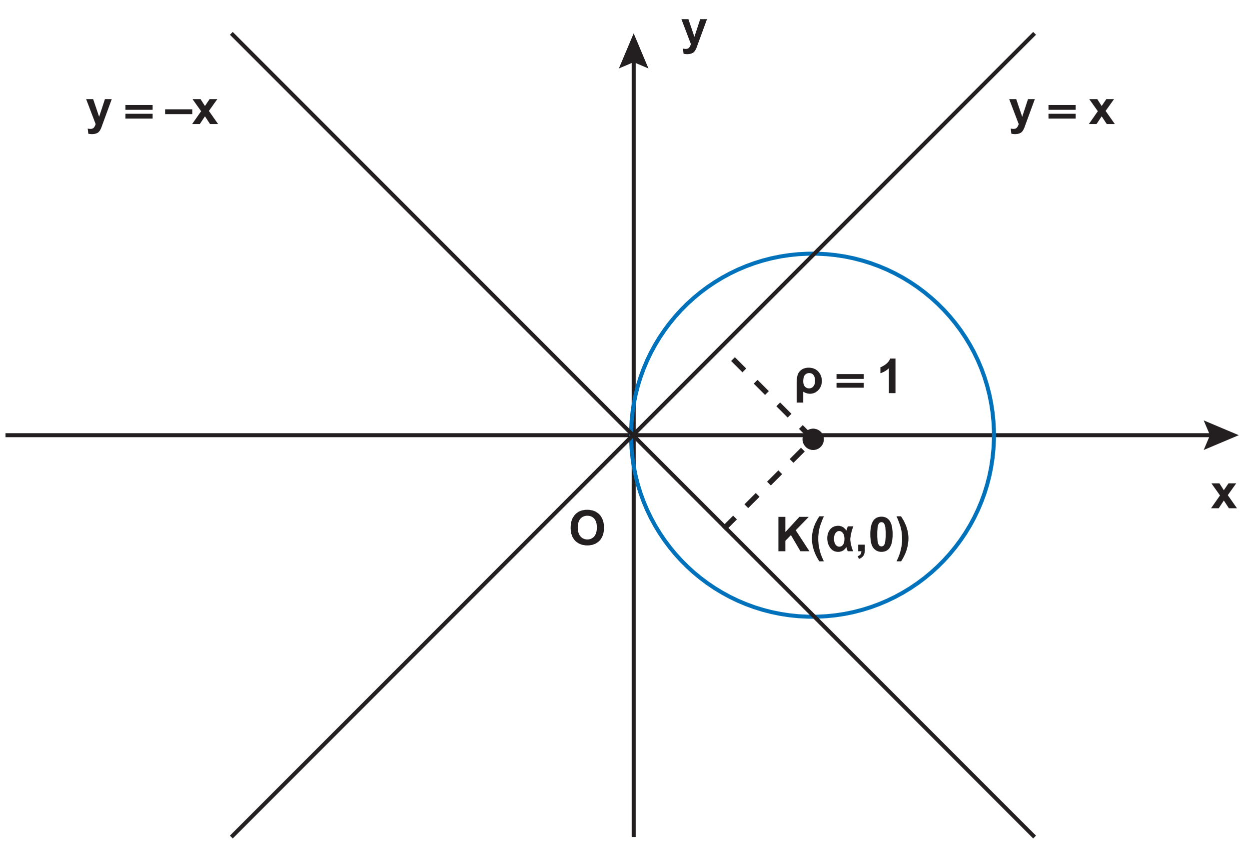
$$(KM) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + y^2 = 1.$$

iii) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος είναι όσο και το πλήθος των κοινών σημείων του κύκλου με τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.


y
y = –x
y = x
A
ρ = 1
45°
x
O
K(α,0)
B


y
y = –x
y = x
ρ = 1
x
O
K(α,0)


y
y = –x
y = x
A
ρ = 1
x
O
K(α,0)
B


y
y = –x
y = x
ρ = 1
x
O
K(α,0)

Επειδή, για $\alpha \geq 0$, η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από τις ευθείες αυτές είναι ίση με $d = KA = KB = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$, έχουμε:

• Αν $d > \rho \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \sqrt{2}$,
ο κύκλος και οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.

- Αν $d = \rho \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2}$, ο κύκλος εφάπτεται των ευθειών, οπότε το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $d < \rho \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < \sqrt{2}$, ο κύκλος τέμνει και τις δύο ευθείες, οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, με εξαίρεση την περίπτωση $\alpha = 1$ κατά την οποία ο κύκλος έχει με τις ευθείες τρία διακεκριμένα κοινά σημεία, οπότε το σύστημα έχει τρεις λύσεις.
Λόγω συμμετρίας, αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και όταν $\alpha \leq 0$.

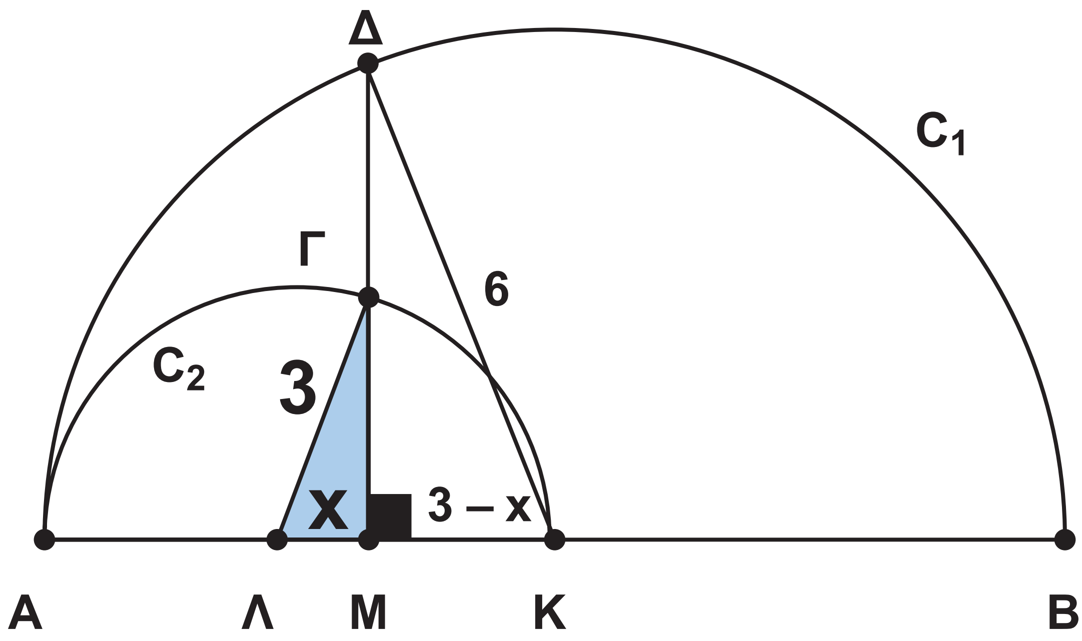
11. Επειδή το τρίγωνο $M\overset{\triangle}{\Gamma}\Lambda$ είναι ορθογώνιο, θα ισχύει
$M\Gamma^2 = \Lambda\Gamma^2 - M\Lambda^2 = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$,
οπότε θα είναι $M\Delta = 2M\Gamma = 2\sqrt{9 - x^2}$ και επειδή το τρίγωνο $M\overset{\triangle}{K}\Delta$ είναι ορθογώνιο θα ισχύει

$$K\Delta^2 = MK^2 + M\Delta^2 \Leftrightarrow 6^2 = (3 - x)^2 + \left(2\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$$

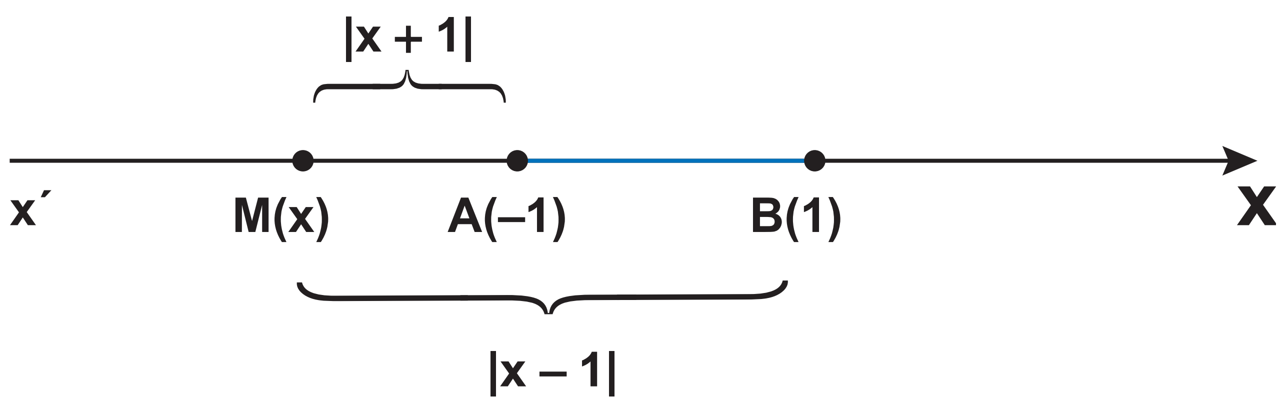
$$\Leftrightarrow 36 = x^2 - 6x + 9 + 4(9 - x^2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ή } x = -3$$

Άρα $x = 1$, αφού $x > 0$.



12. i)Από τον ορισμό της απόστασης δυο σημείων του άξονα προκύπτει ότι
$(MA)=|x+1|$ και $(MB)=|x-1|$.
Επομένως, έχουμε $f(x)=(MA)+(MB)=|x+1|+|x-1|$.
$g(x)=\left||x+1|-|x-1|\right|$.



ii) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης f και g, βρίσκουμε το πρόσημο των x + 1 και x – 1 για τις διάφορες τιμές του x που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

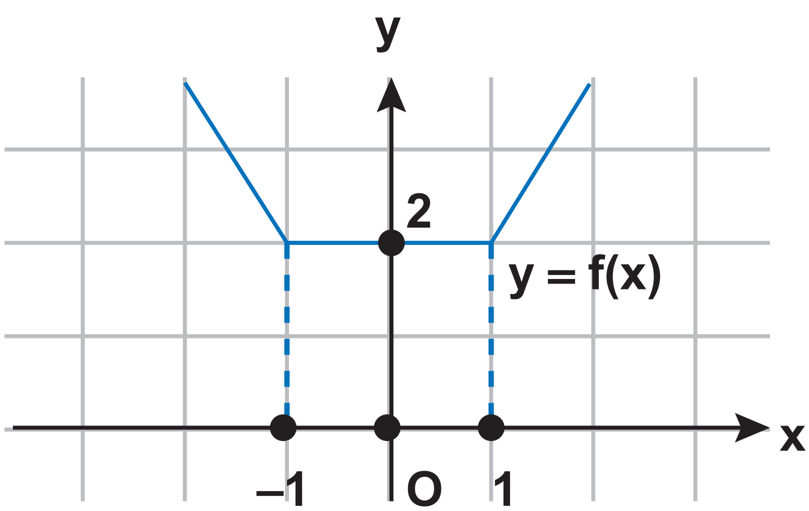
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

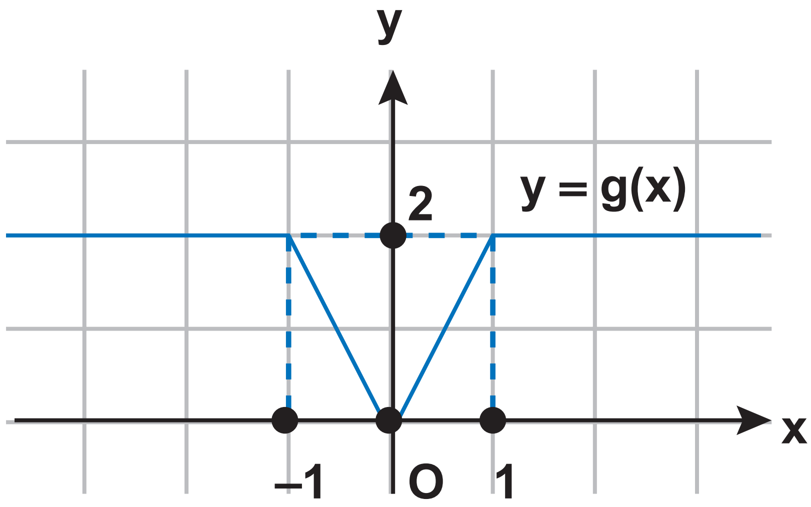
Έτσι έχουμε,

$$f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ αν } x<-1 \\ 2, \text{ αν } -1\le x<1 \text{ και} \\ 2x, \text{ αν } x\ge 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2, \text{ αν } x<-1 \\ -2x, \text{ αν } -1\le x<1 \\ 2x, \text{ αν } 0\le x<1 \\ 2, \text{ αν } x\ge 1 \end{cases}$$

οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι οι ακόλουθες:





iii) Από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι

- Η συνάρτηση f
  - ✔ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, σταθερή του $[-1, 1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και
  - ✔ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in [-1,1]$.
- Η συνάρτηση g
  - ✔ είναι σταθερή στο $(-\infty,-1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και σταθερή στο $[1,+\infty)$,
  - ✔ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 0, για $x = 0$ και
  - ✔ παρουσιάζει μέγιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$.

13. i) • Η f έχει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=2$.

• Η g έχει ολικό μέγιστο για $x=1$, το $g(1)=2$ και ολικό ελάχιστο για $x=-1$, το $g(-1)=-2$.

• Η h έχει ολικό μέγιστο για $x=-1$ και $x=1$, το $h(-1)=h(1)=2$ και ολικό ελάχιστο για $x=0$, το $h(0)=0$.

ii) • Για την f αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x) \leq 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2+1 \Leftrightarrow x^2 \geq 0$$

που ισχύει.

• Για την g πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες $g(x) \leq 2$ και $h(x) \geq 0$.

Έχουμε $g(x) \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+1} \leq 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \leq x^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$ που ισχύει

και $g(x) \geq -2 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+1} \geq -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \geq -x^2-1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \geq 0$ που ισχύει.

• Για την h πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) \geq 0$ και $h(x) \leq 2$.

Έχουμε $h(x) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x^4+1} \geq 0$

που είναι φανερό ότι ισχύει και

$h(x) \leq 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x^4+1} \leq 2 \Leftrightarrow 2x^2 \leq x^4+1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1>0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 \geq 0$, που ισχύει.

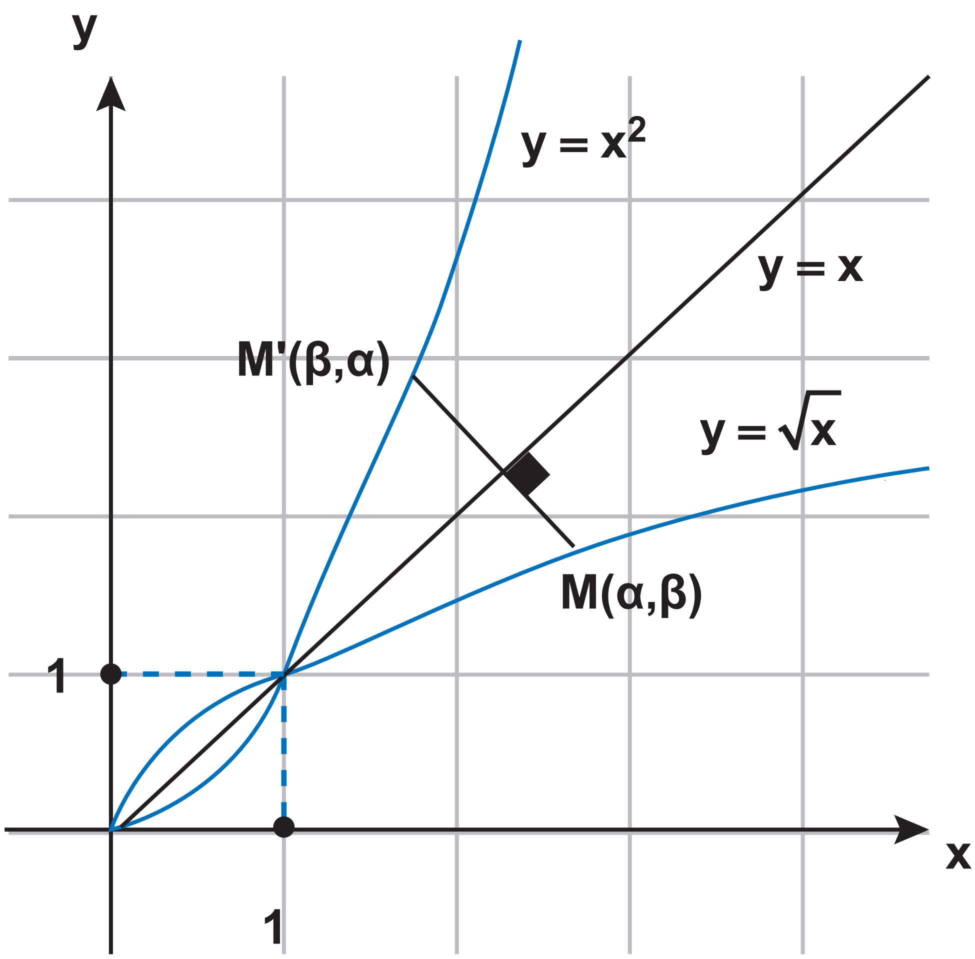
14. A) i) Πρέπει $x \geq 0$. Άρα $A = [0, +\infty)$.

ii) Αφού το Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε

$\beta = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$. (1)

Για να ανήκει το Μ΄(β, α) στη γραφική παράσταση της g, πρέπει $g(\beta) = \alpha \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$ που ισχύει.

iii) Επειδή τα σημεία Μ(α, β) και Μ΄(β, α) είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ είναι η συμμετρική της γραφικής της $g(x) = x^2$ ως προς την ευθεία $y = x$ για $x \geq 0$.

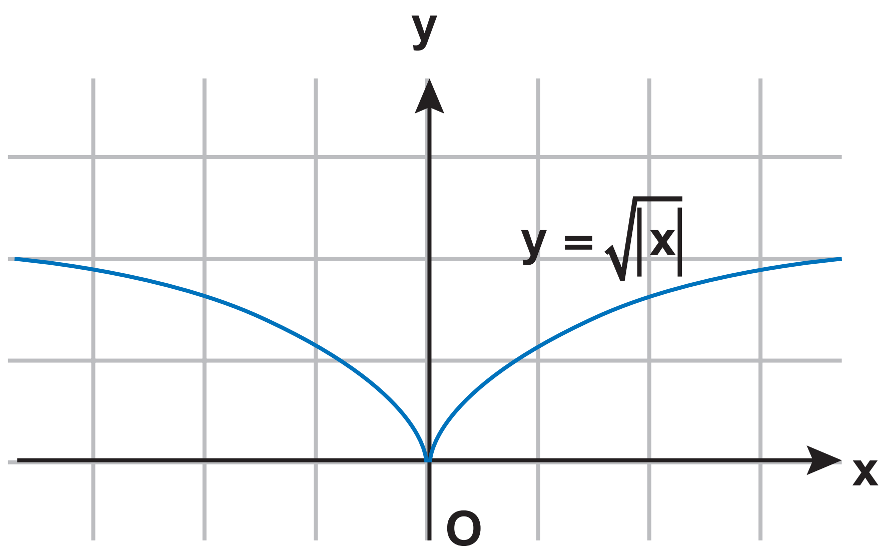


Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η $f(x) = \sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A = [0, +\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x = 0$ το $f(0) = 0$.

Β) Το πεδίο ορισμού της h είναι όλο το $\mathbb{R}$.

Έχουμε $h(-x)=\sqrt{|-x|}=\sqrt{|x|}=h(x)$.

Άρα η h είναι άρτια και η γραφική της παράσταση αποτελείται από τη γραφική παράσταση της f και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.



Γ) Στο τυχαίο τρίγωνο $N\hat{M'}N'$ έχουμε

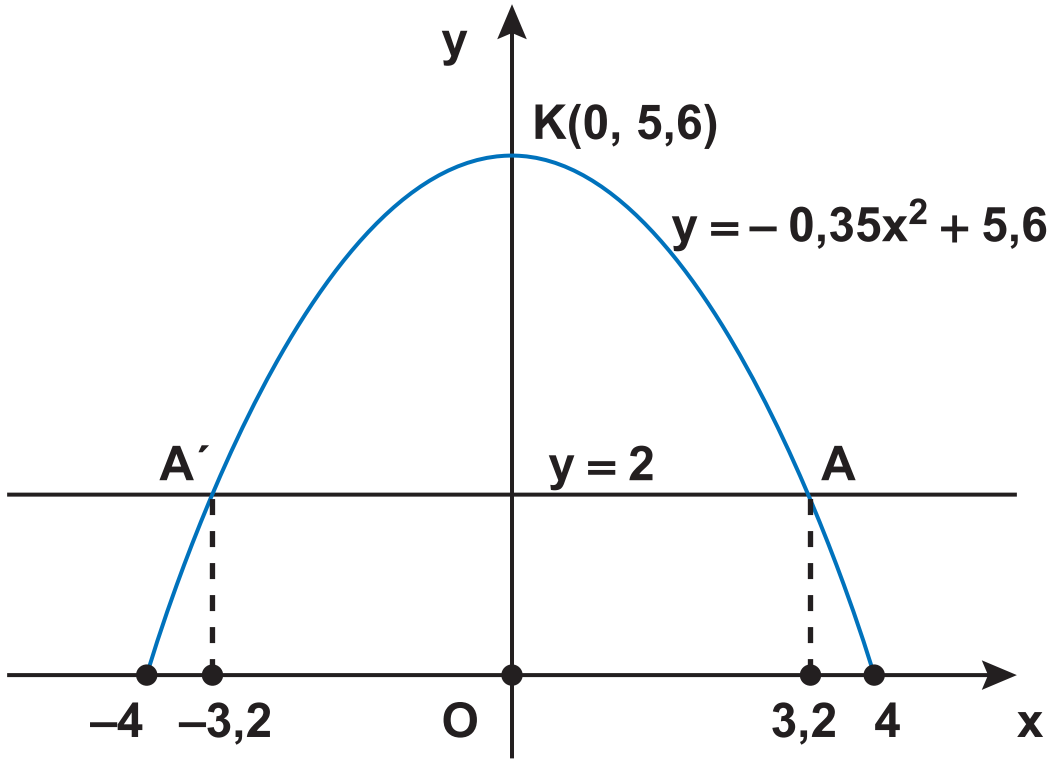
$(NN')=f(\nu+1)=\sqrt{\nu+1}$ και

$$(NM')=\sqrt{(NM)^2+(MM')^2}=$$

$$=\sqrt{(\nu+1-\nu)^2+\left(\sqrt{\nu}\right)^2}=\sqrt{1+\nu}=(NN').$$

Άρα το τρίγωνο $N\hat{M'}N'$ είναι ισοσκελές.

15 . Στο κατακόρυφο επίπεδο της γέφυρας θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο παίρνουμε ως άξονα των x τη χορδή του παραβολικού τόξου και ως άξονα των y τη μεσοκάθετο αυτής (σχήμα).



Στο σύστημα αυτό το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x^2 + \gamma$, με $y \geq 0$ και η κορυφή του είναι το σημείο K(0, 5,6). Συνεπώς, η εξίσωση του παραβολικού τόξου παίρνει τη μορφή $y = \alpha x^2 + 5{,}6$, με $y \geq 0$ (1) Επειδή το πλάτος της γέφυρας είναι 8 m, το παραβολικό τόξο θα τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία B(4, 0) και B΄(–4, 0), των οποίων οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την εξίσωση (1). Επομένως θα ισχύει $0 = \alpha 4^2 + 5{,}6 \Leftrightarrow \alpha = -0{,}35$.

Άρα, το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση

$y = -0{,}35x^2 + 5{,}6$ με $-4 \leq x \leq 4$ (2)

Επειδή το ύψος της καρότσας είναι 2 m τέμνει το παραβολικό τόξο στα σημεία A και A΄, για να περάσει το γεωργικό μηχάνημα θα πρέπει AA΄ > 6 m,

που είναι το πλάτος του φορτηγού. Για να βρούμε το ΑΑ΄ αρκεί αν βρούμε τις συντεταγμένες των Α, Α΄. Αν θέσουμε στην εξίσωση (2) $y = 2$ βρίσκουμε
$-0,35x^2 + 5,6 = 2 \Leftrightarrow x^2 \approx 10,6 \Leftrightarrow x \approx 3,2$.
Άρα Α(3,2, 0) και Α΄(–3,2, 0), οπότε ΑΑ΄ ≈ 6,4 m > 6 m. Επομένως το γεωργικό μηχάνημα μπορεί να περάσει.

16 . i) Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΑΒ, δηλαδή όταν $0 \le x \le 20$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ΟΑΜ θα είναι ίσο με

  $$E = \frac{OA \cdot AM}{2} = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x$$

  οπότε θα είναι f(x) = 5x.
- Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΒΓ, δηλαδή όταν
  $20 \le x \le 40$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

  $$E = \frac{OA + BM}{2} \cdot AB = \frac{10 + (x - 20)}{2} \cdot 20 = 10(x - 10)$$

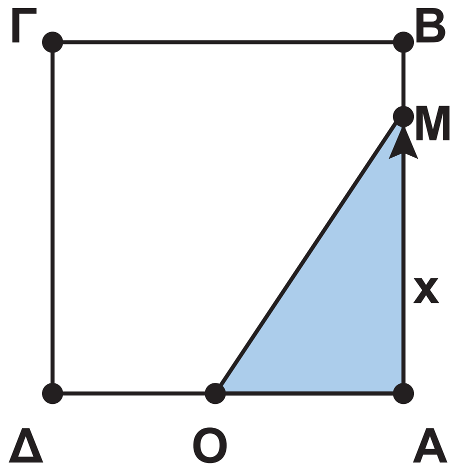
  οπότε θα είναι f(x) = 10x – 100.
- Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΓΔ, δηλαδή όταν $40 \le x \le 60$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

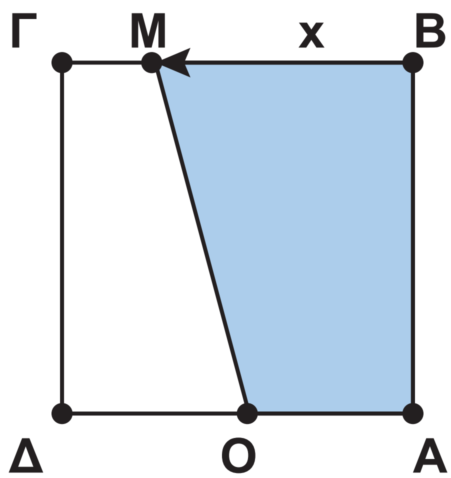
  $$E = E_{ΑΒΓΔ} - E_{ΟΔΜ} = 20 \cdot 20 - \frac{10 \cdot (60 - x)}{2} = 5x + 100$$

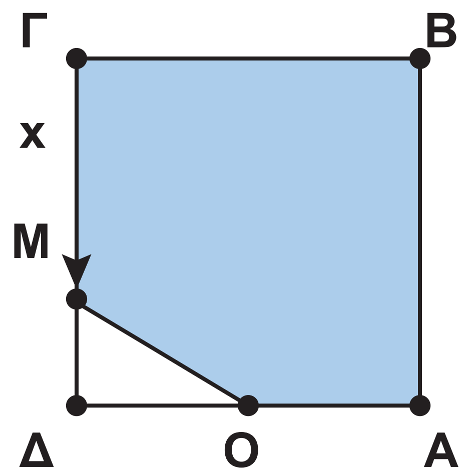
  οπότε θα είναι f(x) = 5x + 100.
  Επομένως, είναι

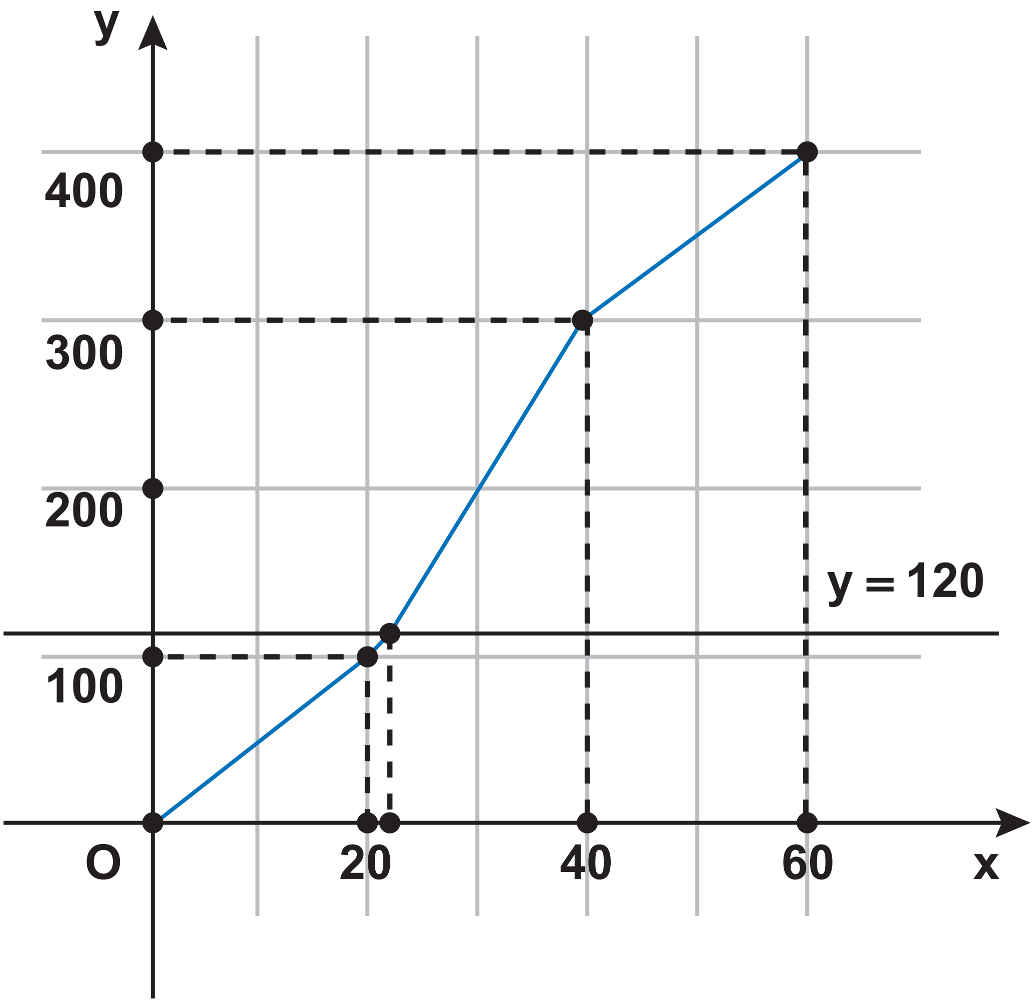
  $$f(x) = \begin{cases} 5x, \ 0 \le x \le 20 \\ 10x - 100, \ 20 \le x \le 40 \\ 5x + 100, \ 40 \le x \le 60. \end{cases}$$

ii) Η γραφική παράσταση της f είναι η πολυγωνική γραμμή του παρακάτω σχήματος.









iii) Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f παίρνει την τιμή 120, όταν x μεταξύ 20 και 40. Επομένως

$f(x) = 120 \Leftrightarrow 10x - 100 = 120 \Leftrightarrow x = 22$.

17. i) Είναι

$$E_{MAB} = \frac{AB \cdot MP}{2} = \frac{AB \cdot AP}{2} = \frac{2 \cdot x}{2} = x \text{ και}$$

$$E_{M\Sigma\Gamma\Delta} = \frac{M\Sigma + \Gamma\Delta}{2} \cdot \Sigma\Delta = \frac{x+2}{2} \cdot (2-x) = \frac{4-x^2}{2} =$$

$$= -0{,}5x^2 + 2$$

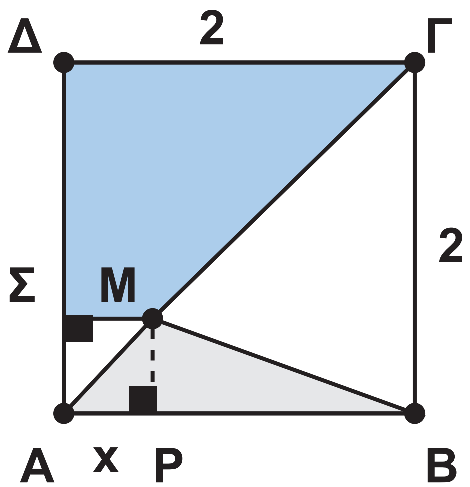
Επομένως

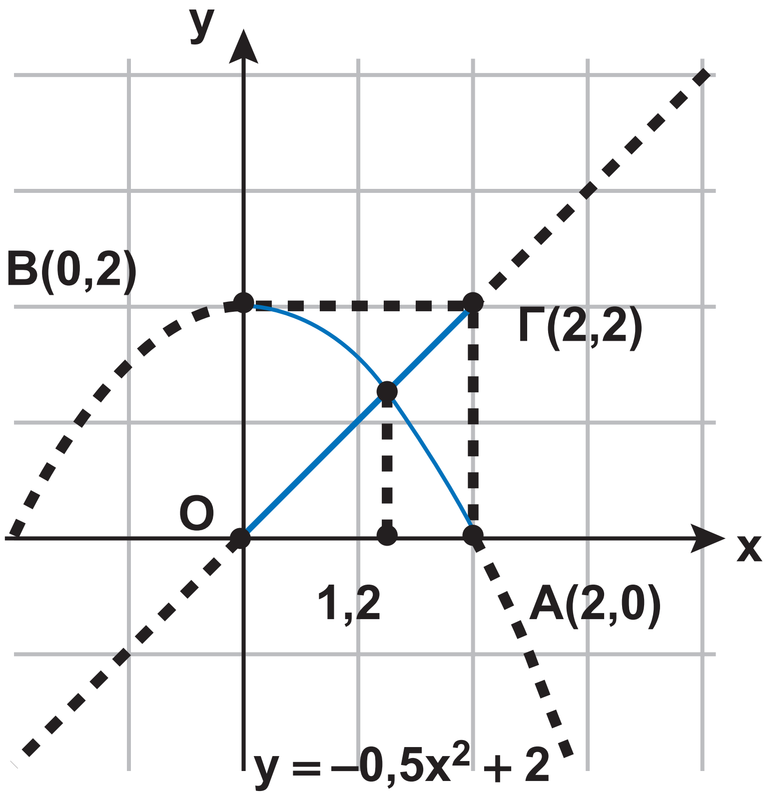
$f(x) = x,\ 0 \leq x \leq 2$ και $g(x) = -0{,}5x^2 + 2,\ 0 \leq x \leq 2$

ii) Είναι $f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -0{,}5x^2 + 2 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1, \text{ διότι } x > 0.$$

iii) Η γραφική παράσταση της f είναι το τμήμα ΟΓ της ευθείας $y = x$, ενώ η γραφική παράσταση της g είναι το τόξο ΑΒ της παραβολής $y = -0{,}5x^2 + 2$. Επομένως, η λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των C_f και C_g και είναι περίπου 1,2, όσο είναι με προσέγγιση δεκάτου η ρίζα $x = \sqrt{5} - 1$ της εξίσωσης που βρήκαμε στο ερώτημα ii).

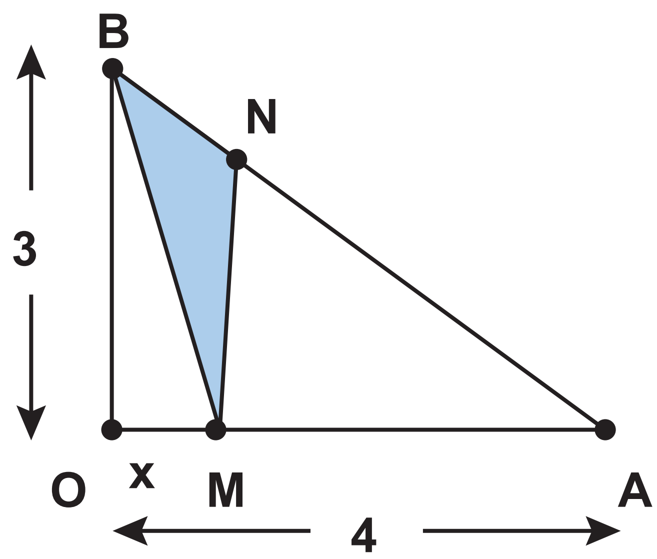




18. i) Έχουμε $A\hat{M}N \approx A\hat{O}B$, αφού $MN // OB$ ως κάθετες στην ΟΑ.

Επομένως $\dfrac{(NM)}{(BO)}=\dfrac{(MA)}{(OA)} \Leftrightarrow \dfrac{(NM)}{3}=\dfrac{4-x}{4}$,

οπότε $(MN)=\dfrac{3(4-x)}{4}$.



Το εμβαδόν του τριγώνου ΒΜΝ είναι ίσο με $\frac{1}{2}$ (ΜΝ)(ΟΜ), (αφού η ΟΜ είναι η απόσταση των παραλλήλων ΜΝ και ΟΒ).

Επομένως, $E(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(4-x)}{4}\cdot x$

Άρα $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x.$

ii) Το εμβαδόν Ε(x) μεγιστοποιείται όταν $x=\dfrac{-\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{3}{8}\right)}=2,$

οπότε

$E(2)=-\frac{3}{8}\cdot 2^2+\frac{3}{2}\cdot 2=-\frac{3}{2}+3=1{,}5$ τετραγωνικές μονάδες.

19. i) Έστω $y=\alpha x+\beta$ η εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται από τα ζεύγη (0, 4) και (2, 2).

Επομένως $\begin{cases}4=\alpha\cdot 0+\beta\\ 2=2\alpha+\beta\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\beta=4\\ 2=2\alpha+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=-1\\ \beta=4\end{cases}.$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι $y=-x+4$.
Για $y=0$ έχουμε $x=4$. Άρα η ευθεία ΑΒ τέμνει τον x΄x στο Γ(4, 0).

ii) Για $x<4$, αλλά και για $x>4$, έχουμε:

$E=\text{Εμβ}(\text{ΑΜΓ})-\text{Εμβ}(\text{ΜΒΓ})=\frac{1}{2}(\text{ΜΓ})(\text{ΟΑ})-\frac{1}{2}(\text{ΜΓ})(\text{ΚΒ})$

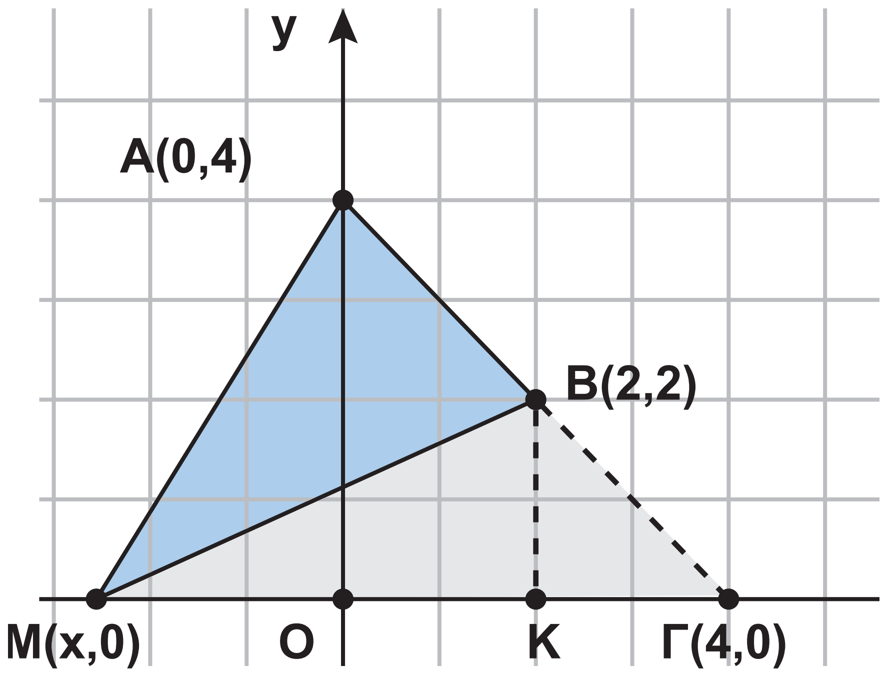
Όμως
$(\text{ΜΓ})=|x-4|$, $(\text{ΟΑ})=4$ και $(\text{ΚΒ})=2$

Επομένως

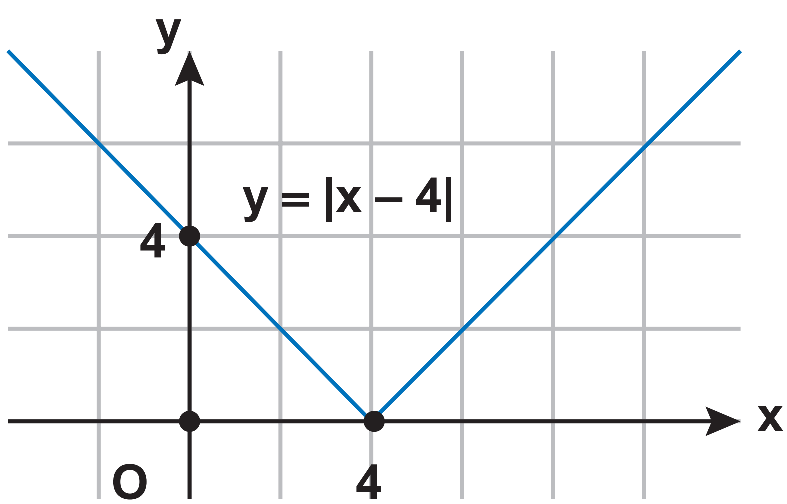
$$E=\frac{1}{2}|x-4|\cdot 4-\frac{1}{2}|x-4|\cdot 2=2|x-4|-|x-4|=|x-4|.$$

Στην περίπτωση που είναι $x=4$, έχουμε $E=0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει:

$$E(x)=|x-4|=\begin{cases}-x+4, & x<4\\ x-4, & x\geq 4\end{cases}$$

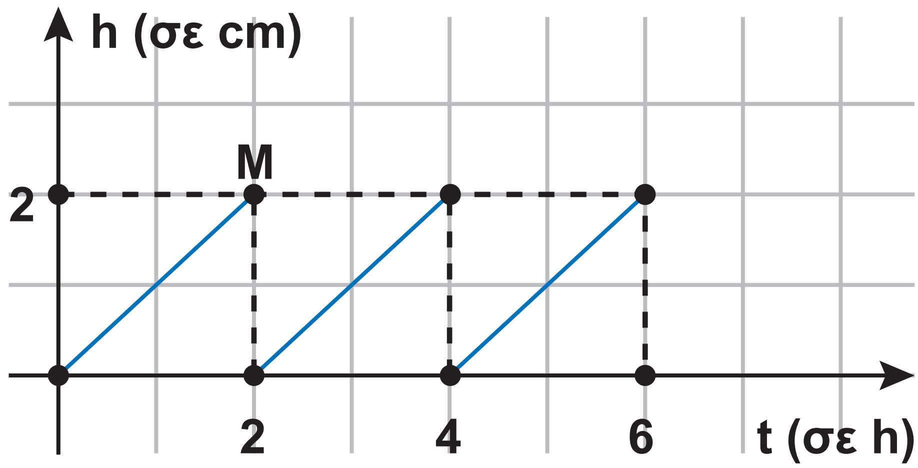


και η γραφική παράσταση της E(x) φαίνεται στο σχήμα.



I_a_algevra_lisis_b_63-120_18b_v1.indd 110 5/27/17 12:41 AM

20. i) Η κίνηση από το A στο B και αντιστρόφως από το B στο A, επαναλαμβάνεται η ίδια ακριβώς κάθε δύο ώρες.
Επομένως το διάγραμμα του ύψους h, του χιονιού στο A, θα επαναλαμβάνεται κάθε δύο ώρες, ακριβώς το ίδιο ως προς τη μορφή. Ως προς τη θέση θα είναι απλώς μετατοπισμένο κατά 2 μονάδες κάθε φορά, προς τα δεξιά του άξονα t΄t του χρόνου.

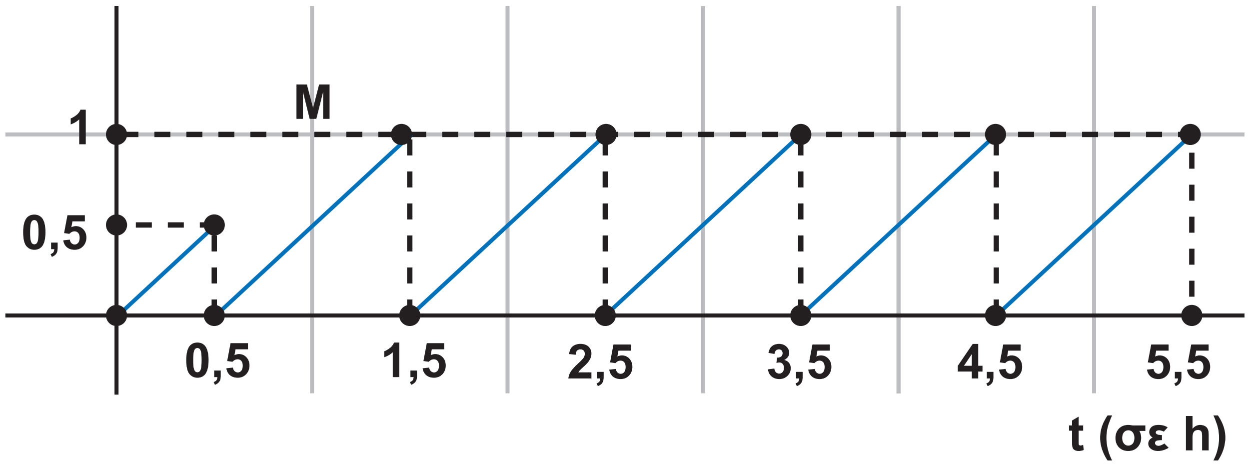


Βρίσκουμε λοιπόν το τμήμα του διαγράμματος, που αντιστοιχεί στις 2 πρώτες ώρες. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του ύψους είναι σταθερός, οπότε το ύψος h(t) και ο χρόνος t είναι ποσά ανάλογα. Αυτό σημαίνει ότι, όταν $t \in [0,2]$, τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

$$h(t) = \alpha t \qquad (1)$$

Επειδή για t = 1h το ύψος είναι h = 1 cm, το ζεύγος (1, 1) θα επαληθεύει την (1), οπότε $1 = \alpha \cdot 1$ και άρα $\alpha = 1$.
Η (1) τότε γίνεται $h(t) = t$ και η γραφική της παράστασης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ της διχοτόμου της 1ης γωνίας των αξόνων (σχ.).
Τέλος παρατηρούμε ότι όταν t = 2h, του ύψος h του χιονιού είναι μηδέν, για αυτό το άκρο Μ του ΟΜ δεν ανήκει στο διάγραμμα. Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω για τα διαστήματα [2, 4], [4, 6],... έχουμε το πλήρες διάγραμμα (σχ.).

ii) Με συλλογισμούς ανάλογους με τους παραπάνω καταλήγουμε για το ύψος του χιονιού στο Μ, στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.



21. Έχουμε $P(\Omega)=1$

$$P(0)+P(1)+P(2)+\ldots+P(100)=1$$

$$P(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=1$$

$$P(0)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right).$$

Όμως

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{100}}.$$

Άρα $P(0)=1-1+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2^{100}}$.

22. Επειδή $P(A') \leq 0,28$ έχουμε $1 - P(A) \leq 0,28$, οπότε $P(A) \geq 0,72$ και επειδή $P(B') \leq 0,71$, έχουμε $1 - P(B') \leq 0,71$, οπότε $P(B) \geq 0,29$.

i) Έχουμε διαδοχικά $P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$

$P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$

$P(A) + P(B) \geq 1,01$ που ισχύει.

ii) Αν ήταν $A \cap B = \varnothing$, τότε θα είχαμε
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \geq 0,72 + 0,29 = 1,01$
που είναι άτοπο, αφού γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) \leq 1$.

l_a_algevra_lisis_b_63-120_18b_v1.indd 113 5/27/17 12:41 AM