ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 3ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο
ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ
ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ
Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΛΓΕΒΡΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΩΝ

Α΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
(2011-2012)

ΛΥΣΕΙΣ ΤΩΝ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

ΤΟΜΟΣ 3ος

Η συγγραφή και η επιστημονική επιμέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

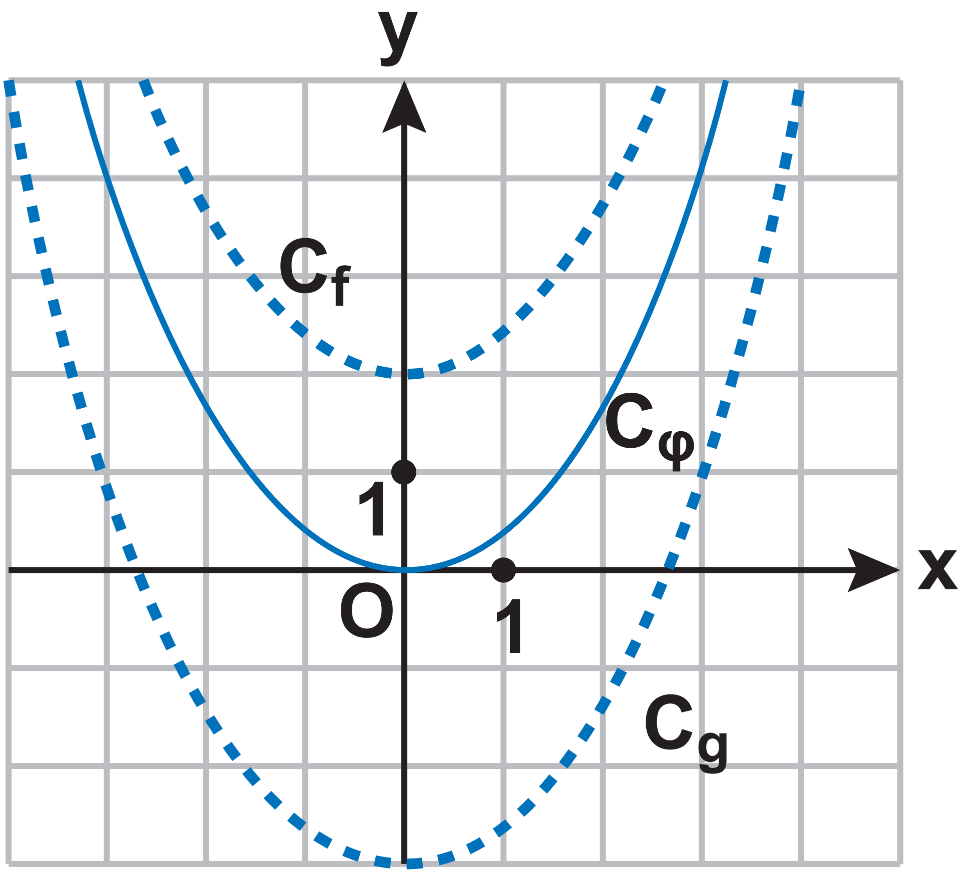
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7
ΜΕΛΕΤΗ ΒΑΣΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

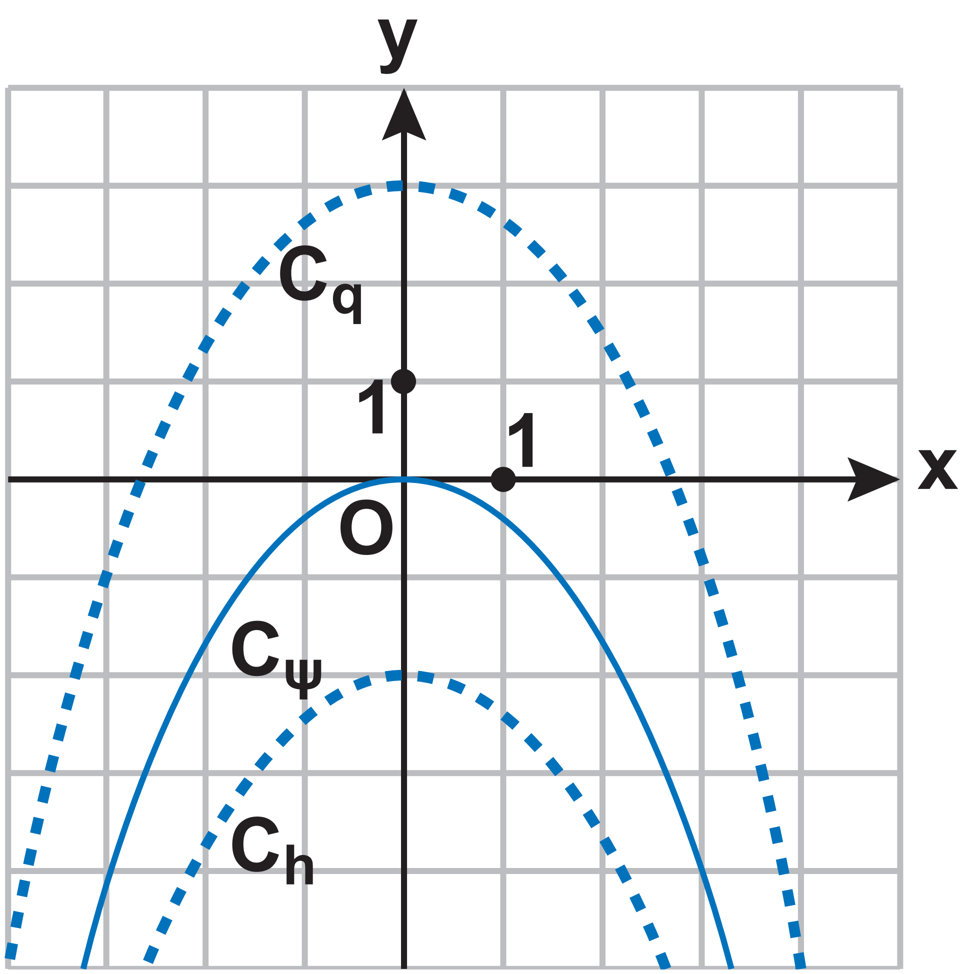
§ 7.1. Μελέτης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η καμπύλη είναι μια παραβολή με κορυφή το Ο(0, 0) και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y. Επομένως, θα έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x^2$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(1,2), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Άρα θα ισχύει $2 = \alpha \cdot 1^2 \Leftrightarrow \alpha = 2$. Οπότε, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y = 2x^2$.

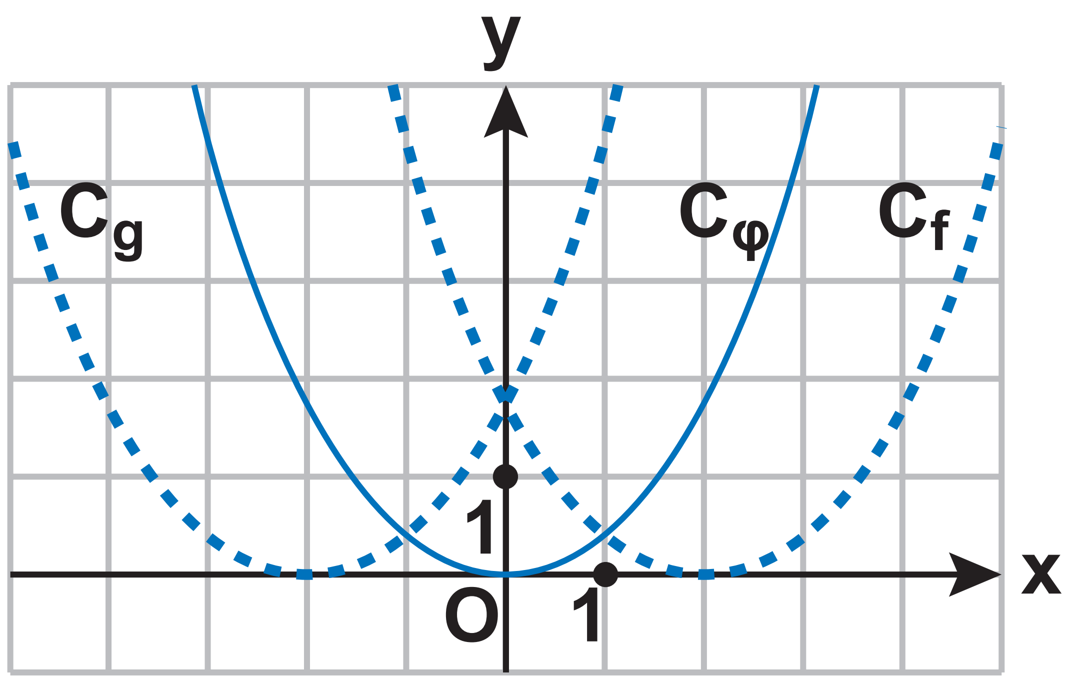
2. i) Η γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα πάνω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον y΄y (σχ.). Η γραφική παράσταση των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5x^2 + 2$ και $g(x) = 0{,}5x^2 - 3$ προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.


y
x
O
1
1
C_f
C_φ
C_g

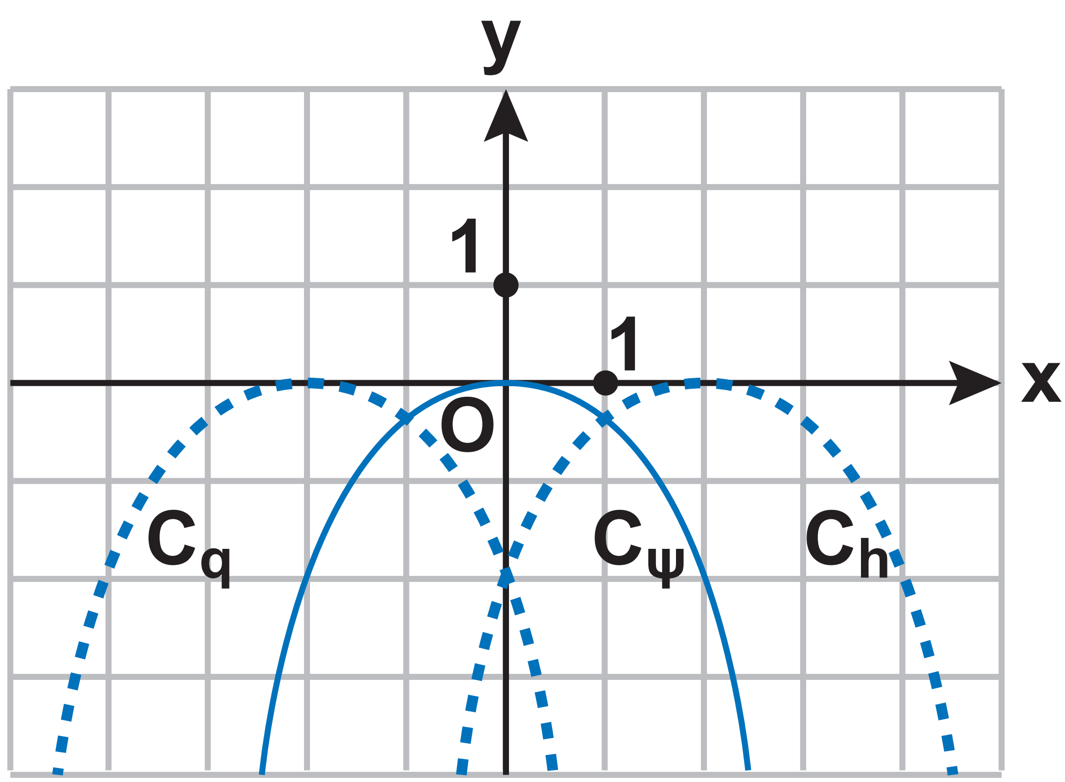

y
x
O
1
1
C_q
C_ψ
C_h

ii) Η γραφική παράσταση της $ψ(x) = -0,5x^2$ είναι μια παραβολή ανοιχτή προς τα κάτω με κορυφή την αρχή των αξόνων και άξονα συμμετρίας τον άξονα y΄y (σχ.). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5x^2 - 2$ και $q(x) = -0,5x^2 + 3$ προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.
Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να παίρναμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.

3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x) = 0{,}5x^2$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = 0{,}5(x - 2)^2$ και $g(x) = 0{,}5(x + 2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = 0{,}5x^2$, της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 2 μονάδες προς τα αριστερά.



ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -0,5x^2$, όπως στην άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $h(x) = -0,5(x-2)^2$ και $q(x) = -0,5(x+2)^2$ προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της παραβολής $y = -0,5x^2$, της πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά δύο μονάδες προς τα αριστερά.



4. i) Η γραφική παράσταση των $f(x) = x^2$ είναι η παραβολή $y = x^2$ του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 1$ είναι η ευθεία $y = 1$ του ίδιου σχήματος.

Οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία Α(1, 1) και Β(– 1, 1) που είναι συμμετρικά ως προς τον άξονα y΄y.

Επειδή

$x^2 \leq 1 \Leftrightarrow f(x) \leq g(x)$ και

$x^2 > 1 \Leftrightarrow f(x) > g(x)$

η ανίσωση $x^2 \leq 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η $x^2 > 1$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g. Επομένως, θα έχουμε $x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$ και

$x^2 > 1 \Leftrightarrow x < -1$ ή $x > 1$.

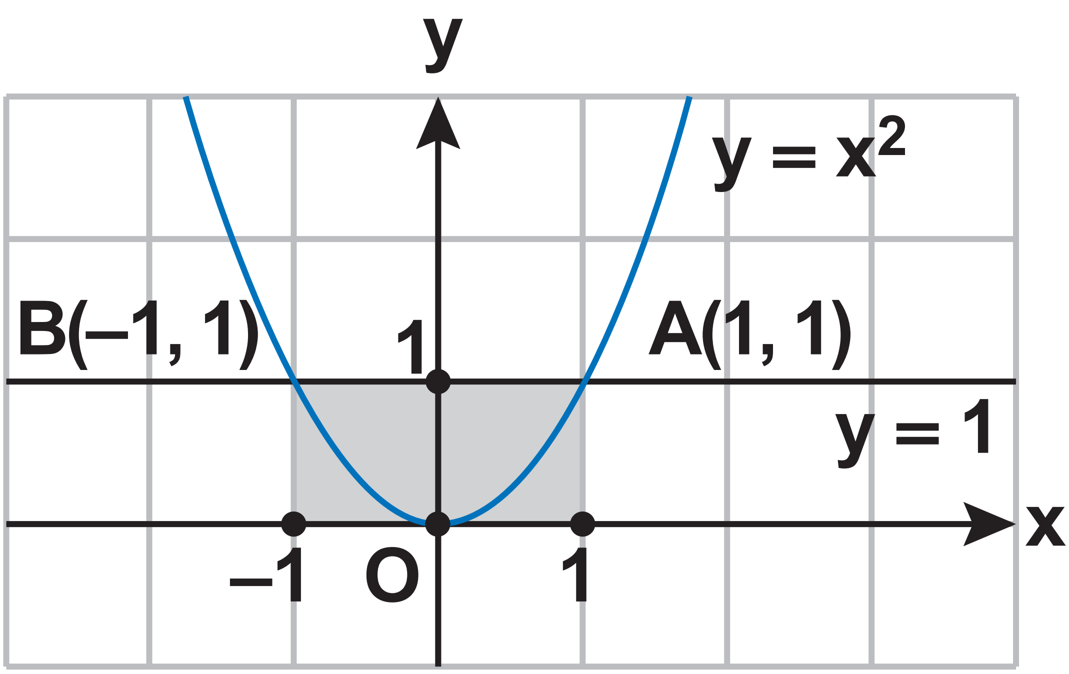
ii) Έχουμε

$x^2 \le 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 \le 0 \Leftrightarrow x \in [-1, 1]$

$x^2 > 1 \Leftrightarrow x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

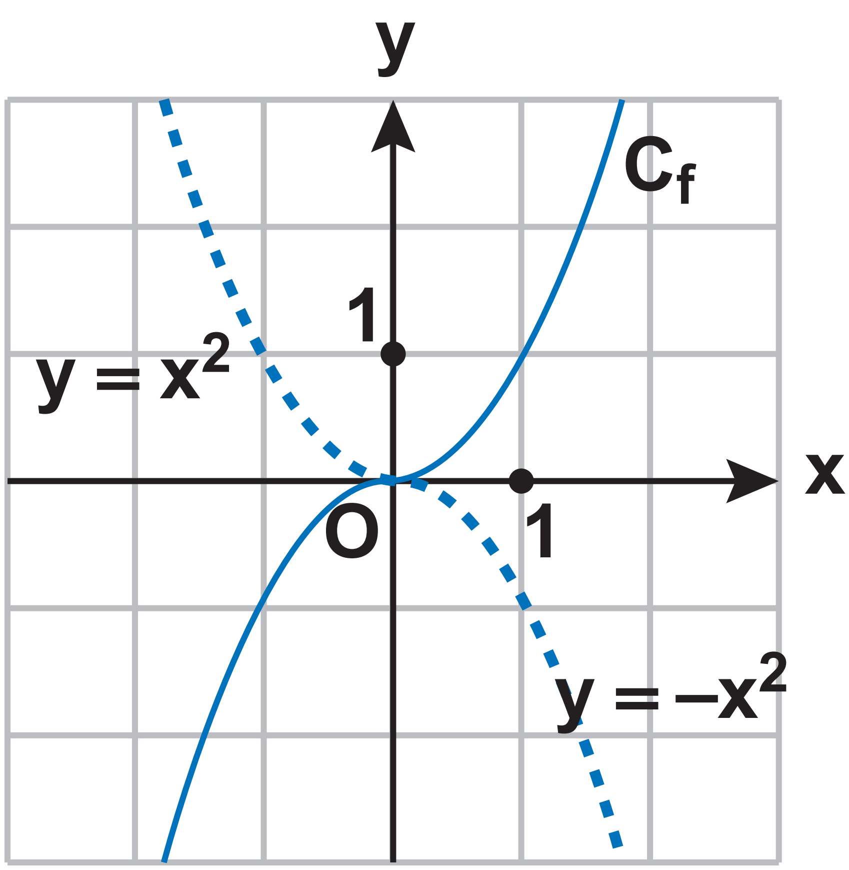
διότι το τριώνυμο $x^2 - 1$ έχει ρίζες τις $x_1 = -1$ και $x_2 = 1$.



Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Είναι $f(x)=\begin{cases}-x^2, x<0\\ \ \ x^2, x\geq 0\end{cases}$

Επομένως, η γραφική παράσταση της f αποτελείται από το τμήμα της παραβολής $y=-x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.



2. Η γραφική παράστασης της

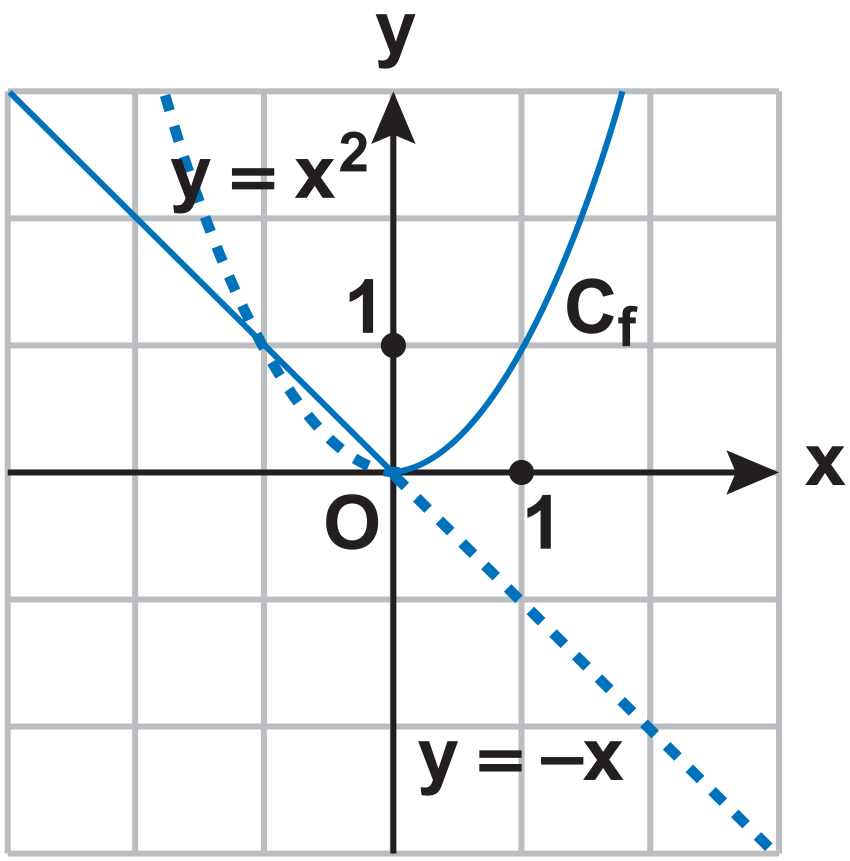
$$f(x)=\begin{cases}-x, x<0\\ x^2, x\geq 0\end{cases}$$

αποτελείται από το τμήμα της ευθείας $y=-x$ του οποίου τα σημεία έχουν αρνητική τετμημένη και από το τμήμα της παραβολής $y=x^2$ του οποίου τα σημεία έχουν τετμημένη θετική ή μηδέν.

Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι

✔ Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

✔ Η f παρουσιάζει ελάχιστο για $x=0$, το $f(0)=0$.


y
$y = x^2$
1
C_f
x
O
1
$y = -x$

3. i) Από το σχήμα αυτό προκύπτει ότι

α) Στο διάστημα (0, 1) από όλες τις γραφικές παραστάσεις χαμηλότερα βρίσκεται η $y = x^3$, έπειτα η $y = x^2$, έπειτα η $y = x$ και τέλος η $y = \sqrt{x}$.

Επομένως, αν $x \in (0,1)$ τότε $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

β) Στο διάστημα $(1, +\infty)$ συμβαίνει το αντίθετο.

Επομένως αν $x \in (1, +\infty)$, τότε $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.

ii) • Έστω $0 < x < 1$. Τότε

✔ $x^3 < x^2 \Leftrightarrow x^2(x-1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.

✔ $x^2 < x \Leftrightarrow x(x-1) < 0$, που ισχύει, διότι $0 < x < 1$.

✔ $x < \sqrt{x} \Leftrightarrow x^2 < x$, που ισχύει από πριν.

Άρα $x^3 < x^2 < x < \sqrt{x}$.

- **Έστω $x > 1$. Αν εργαστούμε αναλόγως, βρίσκουμε ότι $x^3 > x^2 > x > \sqrt{x}$.**

4. Αν $x > 0$ είναι η τετμημένη του σημείου Α, τότε η τεταγμένη του θα είναι η $y = x^2$. Άρα το Α θα έχει συντεταγμένες (x, x^2), οπότε το σημείο Β, που είναι συμμετρικό του Α ως προς τον άξονα y΄y, θα έχει συντεταγμένες $(-x, x^2)$. Επομένως, θα έχουμε

$$(AB) = 2x \text{ και } (OA) = (OB) =$$

$$= \sqrt{x^2 + (x^2)^2} = \sqrt{x^2 + x^4}.$$

Επομένως, το τρίγωνο $O\hat{A}B$ είναι ισόπλευρο, αν και μόνο αν

$$(OA) = (AB) \Leftrightarrow 2x = \sqrt{x^2 + x^4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2x)^2 = x^2 + x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 = 3x^2 \Leftrightarrow x^2 = 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}, \text{ διότι } x > 0.$$

§ 7.2. Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\frac{\alpha}{x}$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Η υπερβολή έχει εξίσωση της μορφής $y=\frac{\alpha}{x}$ και, επειδή διέρχεται από το σημείο Α(2,1), οι συντεταγμένες του σημείου Α θα επαληθεύουν την εξίσωσή της. Επομένως θα ισχύει

$$1=\frac{\alpha}{2}\Leftrightarrow \alpha=2.$$

Άρα, η ζητούμενη εξίσωση είναι η $y=\frac{2}{x}$.

2. i) Η γραφική παράσταση της

$\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή με

κλάδους στο 1ο και 3ο τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.).

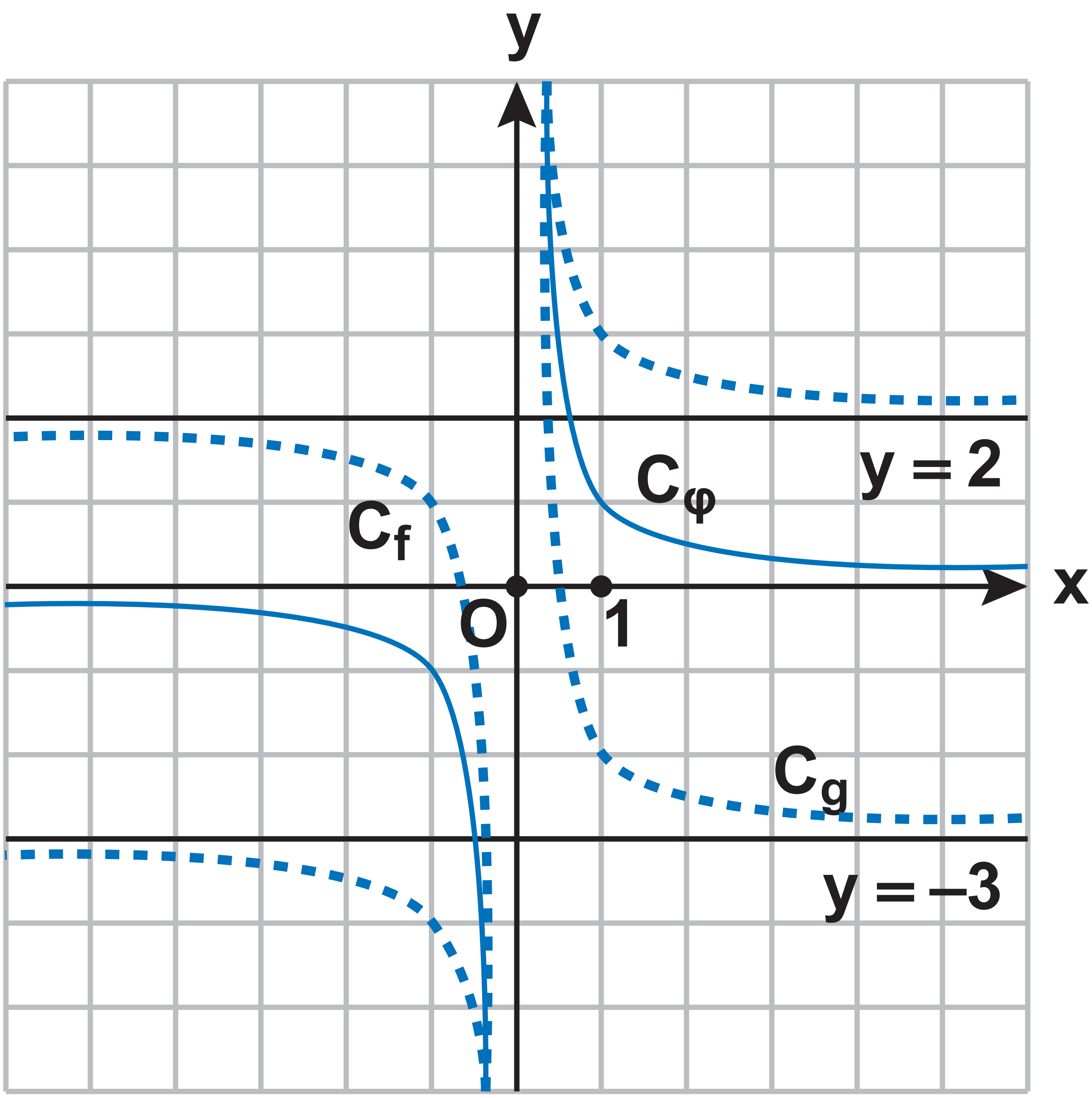
Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{1}{x}+2 \text{ και } g(x)=\frac{1}{x}-3$$

προκύπτουν από κατακόρυφη μετατόπιση της υπερβολής

$$y=\frac{1}{x}$$

της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα πάνω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα κάτω.


y
x
O
1
C_f
C_φ
C_g
y = 2
y = –3

ii) Η γραφική παράσταση της

$$ψ(x) = -\frac{1}{x}$$

είναι μια υπερβολή με κλάδους στο 2ο και 4ο τεταρτημόριο και με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.). Η γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

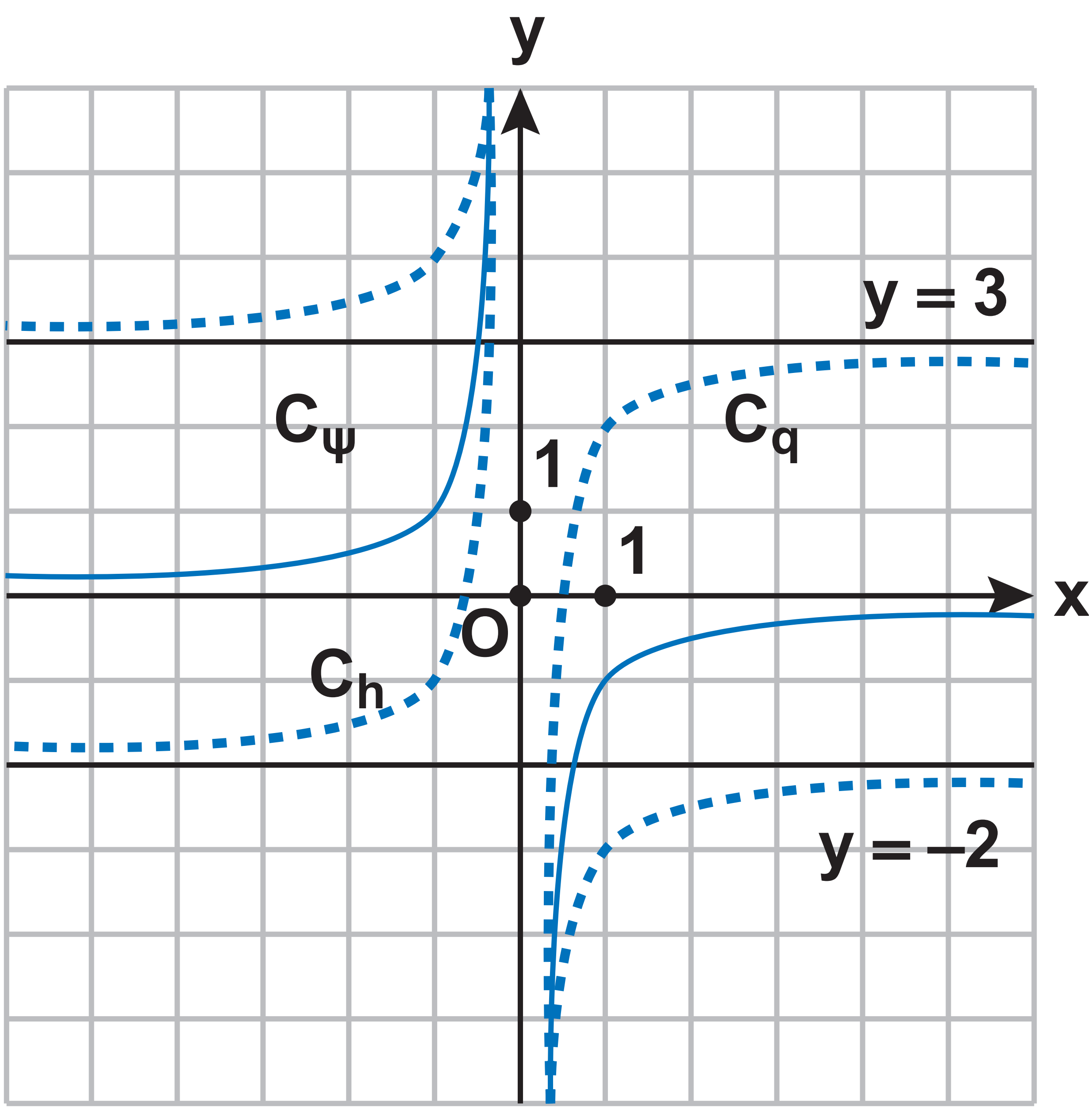
$$h(x) = -\frac{1}{x} - 2 \text{ και } q(x) = -\frac{1}{x} + 3$$

προκύπτουν από κατακόρυφες μετατοπίσεις της υπερβολής

$$y = -\frac{1}{x},$$

της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

Παρατήρηση: Επειδή οι συναρτήσεις ψ, h και q είναι αντίθετες των συναρτήσεων φ, f και g αντιστοίχως, για να χαράξουμε τις γραφικές παραστάσεις τους αρκεί να πάρουμε τις συμμετρικές των γραφικών παραστάσεων των φ, f και g ως προς τον άξονα x΄x.



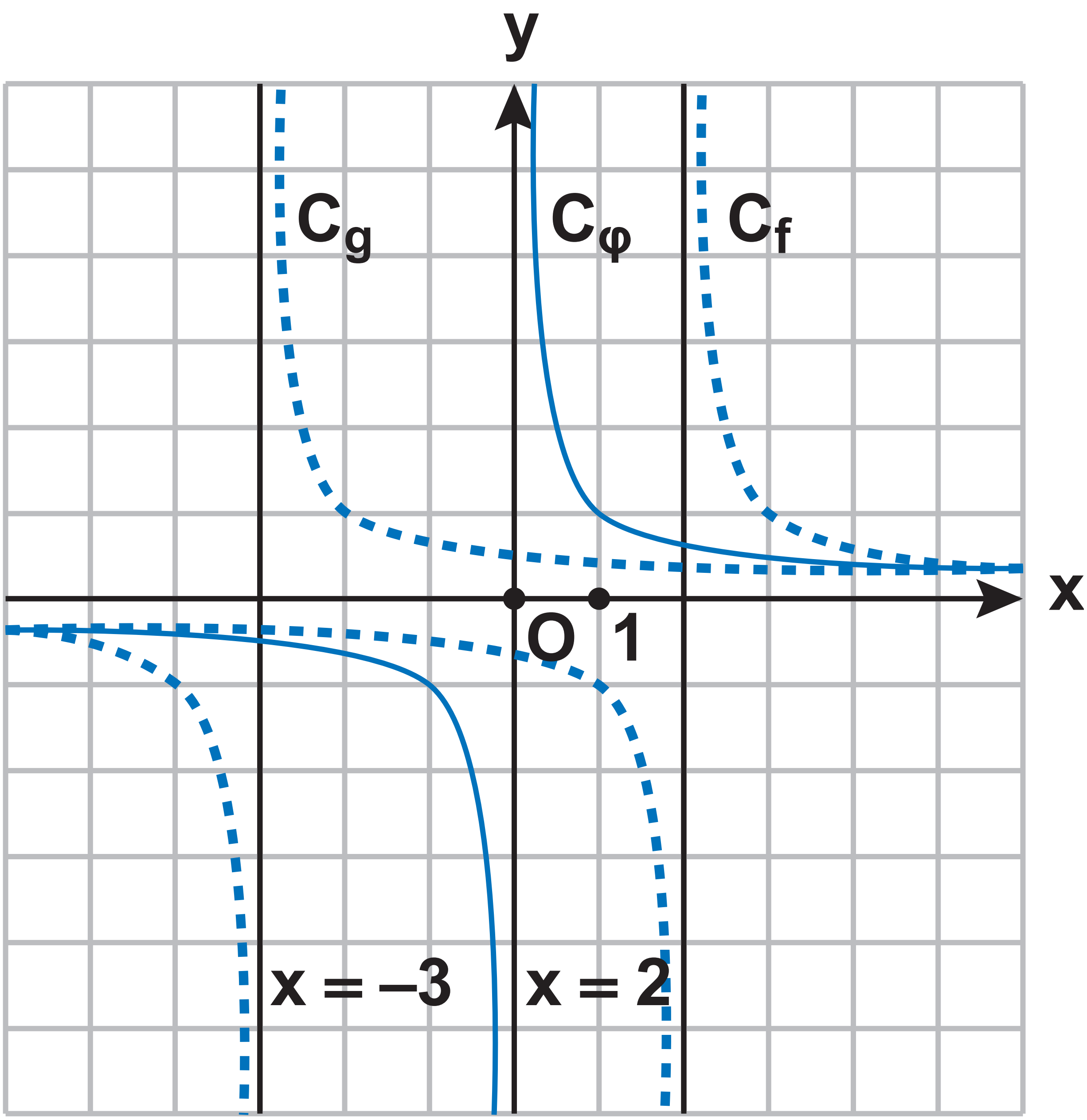
3. i) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)=\frac{1}{x}$, όπως στην άσκηση 2. i). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f(x)=\frac{1}{x-2} \text{ και } g(x)=\frac{1}{x+3},$$

προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής

$$y=\frac{1}{x},$$

της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.


y
x
C_g
C_φ
C_f
O
1
x = –3
x = 2

ii) Χαράσσουμε τη γραφική παράσταση της $\psi(x) = -\frac{1}{x}$, όπως στην

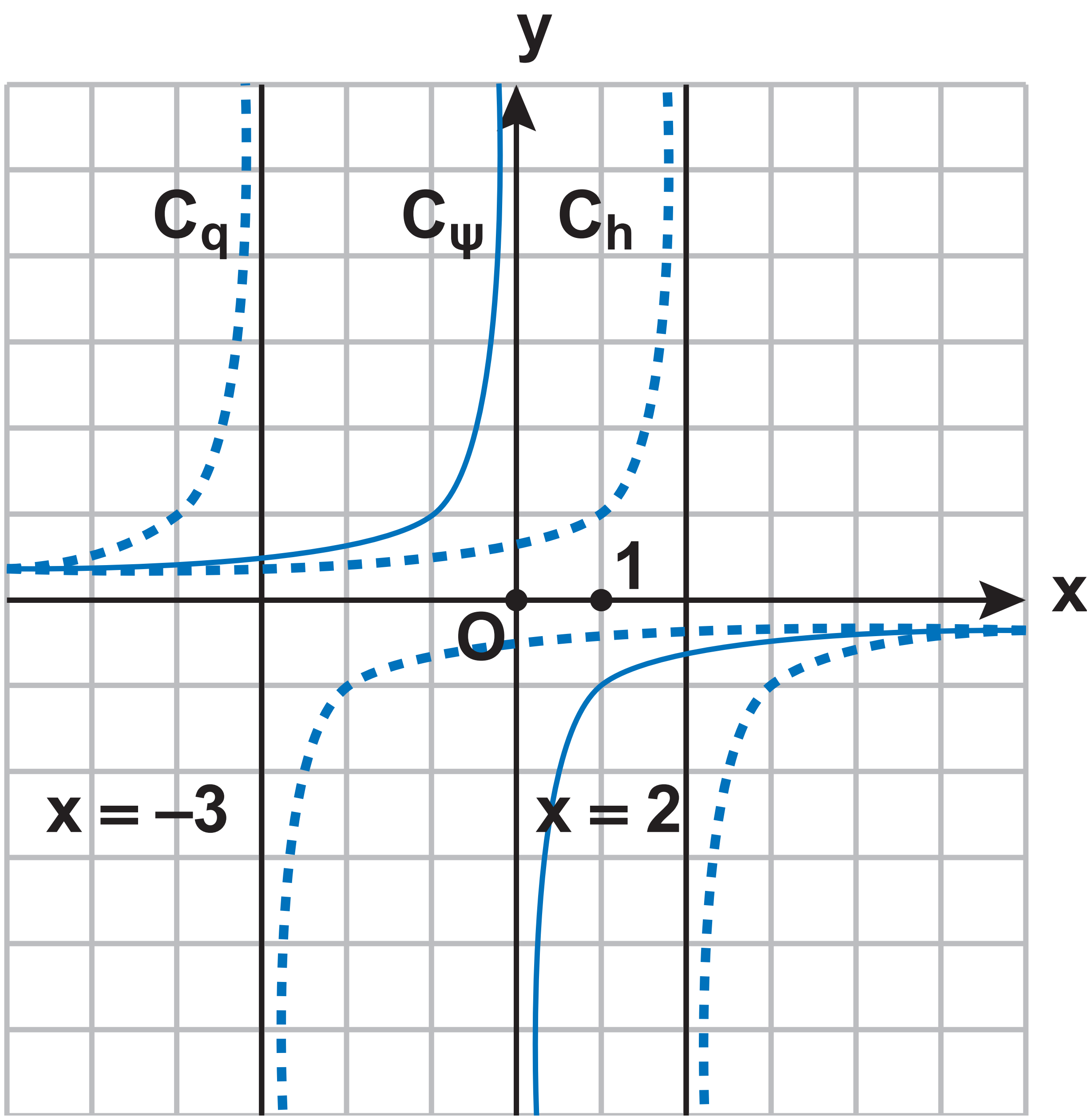
άσκηση 2. ii). Οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$h(x) = -\frac{1}{x-2} \text{ και } q(x) = -\frac{1}{x+3}$$

προκύπτουν από οριζόντιες μετατοπίσεις της υπερβολής

$$y = -\frac{1}{x},$$

της μεν πρώτης κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά, της δε δεύτερης κατά 3 μονάδες προς τα αριστερά.

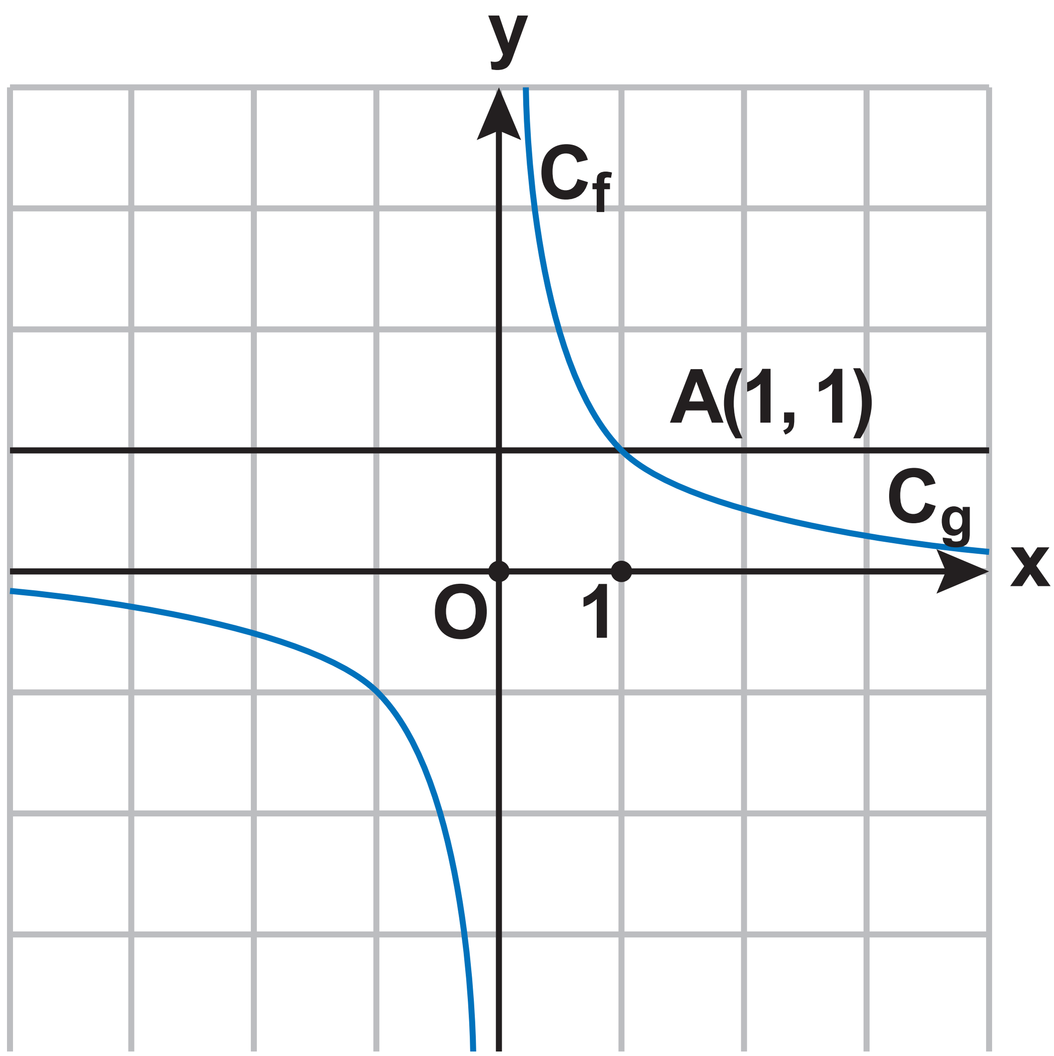

y
x
C_q
C_ψ
C_h
1
O
x = –3
x = 2

4. i) Η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=1$ είναι η ευθεία C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g τέμνονται στο σημείο A(1, 1). Επομένως:

- $\frac{1}{x}\leq 1 \Leftrightarrow f(x)\leq g(x) \Leftrightarrow x<0$

  ή $x\geq 1$

- $\frac{1}{x}>1 \Leftrightarrow f(x)>g(x) \Leftrightarrow 0<x<1$



ii) Έχουμε

$$\frac{1}{x} \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x) \leq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < 0 \text{ ή } x \geq 1.$$

$$\frac{1}{x} > 1 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(1-x) > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1.$$

5. i) Η γραφική παράσταση της $f(x)=\frac{1}{x}$ είναι η υπερβολή C_f του παρακάτω σχήματος, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=x^2$ είναι η παραβολή C_g του ίδιου σχήματος. Οι C_f και C_g έχουν ένα μόνο κοινό σημείο, το $A(1,1)$.

Επειδή

$$\frac{1}{x}\le x^2 \Leftrightarrow f(x)\le g(x) \text{ και}$$

$$\frac{1}{x}> x^2 \Leftrightarrow f(x)> g(x)$$

η ανίσωση $\frac{1}{x}\le x^2$ αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται κάτω από την C_g ή έχει το ίδιο ύψος με αυτή, ενώ η

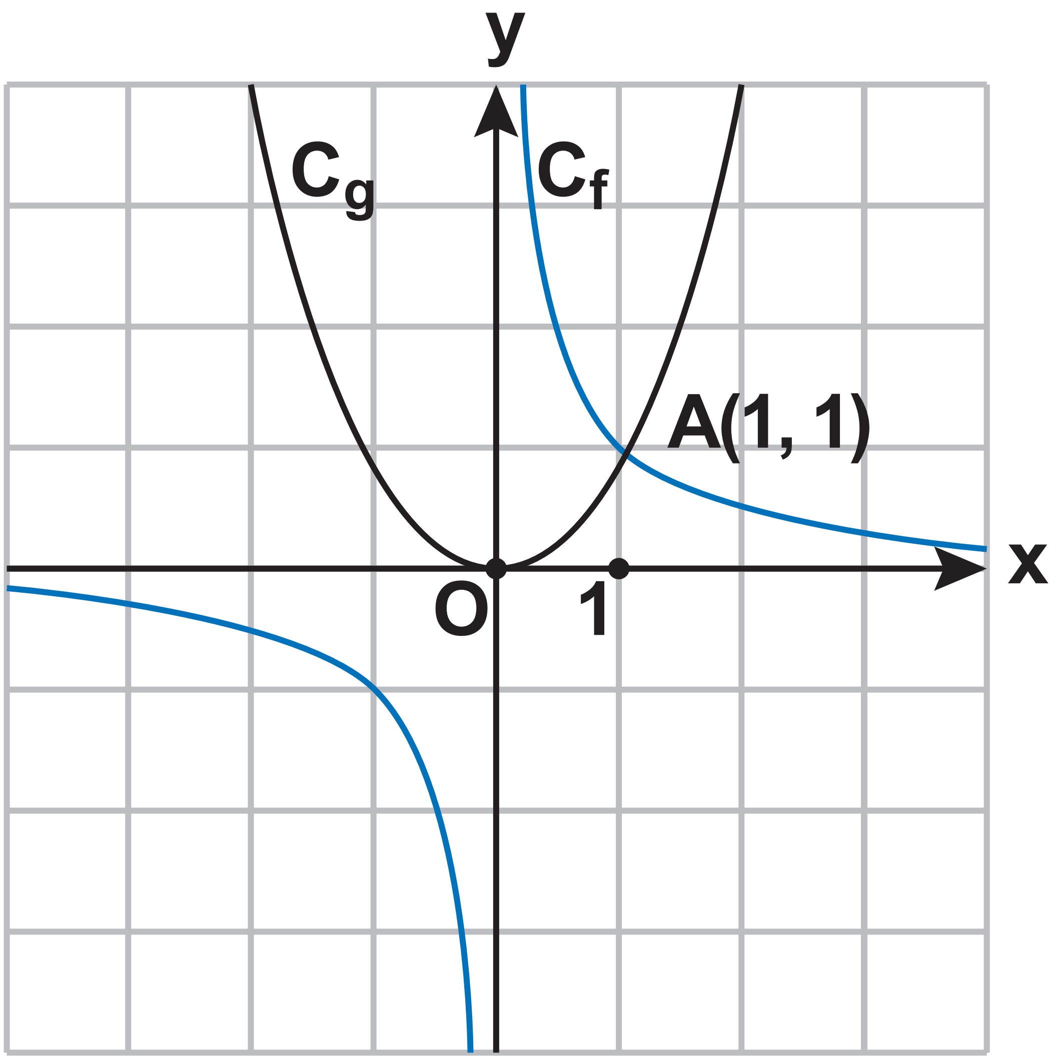
$$\frac{1}{x}> x^2$$

αληθεύει για εκείνα τα x για τα οποία η C_f βρίσκεται πάνω από την C_g.

Επομένως, θα έχουμε

- $\dfrac{1}{x} \leq x^2 \Leftrightarrow x < 0$ ή $x \geq 1$.

- $\dfrac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.



ii) Έχουμε

- $\frac{1}{x} \le x^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x^2 \le 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{1-x^3}{x} \le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^3-1}{x} \ge 0 \Leftrightarrow x(x^3-1) \ge 0$$

και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow x(x-1)(x^2+x+1) \ge 0$$

και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

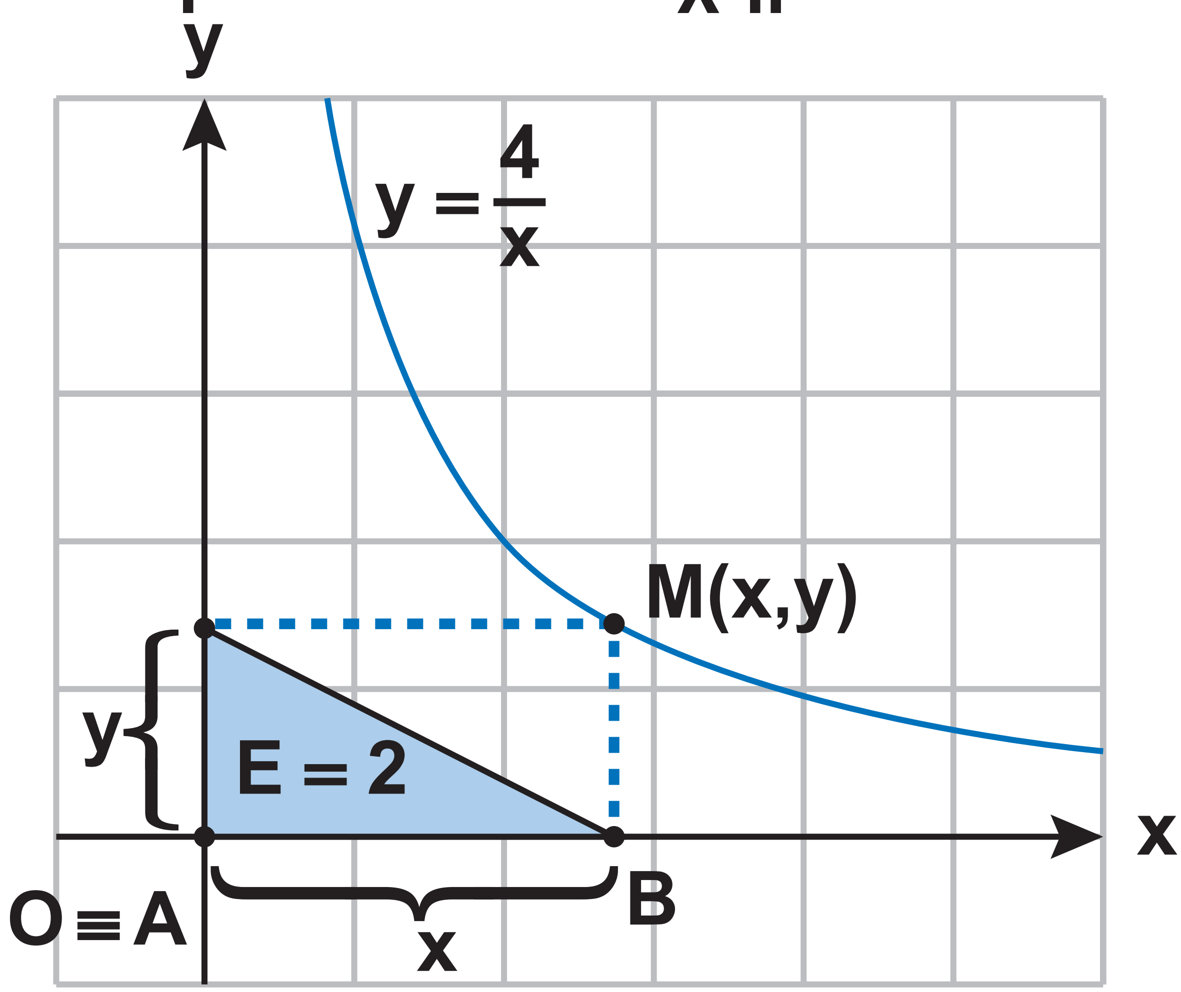
$\Leftrightarrow x(x-1) \ge 0$ και $x \ne 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x < 0$ ή $x \ge 1$.

Επομένως

- $\frac{1}{x} > x^2 \Leftrightarrow 0 < x < 1$.

6. Σε ένα σύστημα συντεταγμένων παίρνουμε $AB = OA = x > 0$ και $A\Gamma = O\Gamma = y > 0$. Τότε το εμβαδό Ε του τριγώνου είναι $E = \frac{xy}{2}$, οπότε έχουμε $\frac{xy}{2} = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Leftrightarrow y = \frac{4}{x}$, (1).
Η γραφική παράσταση της (1) είναι υπερβολή με εξίσωση $y = \frac{4}{x}$ και φαίνεται στο σχήμα.



§ 7.3. Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Έχουμε

$f(x) = 2(x^2 - 2x) + 5 =$
$= 2(x^2 - 2 \cdot x + 1^2) - 2 + 5 =$
$= 2(x - 1)^2 + 3.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = 2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 3 μονάδες προς τα πάνω.

ii) Έχουμε

$f(x) = -2(x^2 - 4x) - 9 =$
$= -2(x^2 - 2 \cdot 2x + 2^2) + 8 - 9 =$
$= -2(x - 2)^2 - 1.$

Άρα, η γραφική παράσταση της f προκύπτει από δύο διαδοχικές μετατοπίσεις της γραφικής παράστασης της $g(x) = -2x^2$, μιας οριζόντιας κατά 2 μονάδες προς τα δεξιά και μιας κατακόρυφης κατά 1 μονάδα προς τα κάτω.

2. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - 6x + 3$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$, το

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 6 \cdot \frac{3}{2} + 3 = -\frac{3}{2}.$$

β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -3x^2 - 5x + 2$ είναι $\alpha = -3 < 0$, οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο για

$x = -\frac{\beta}{2\alpha} = \frac{-5}{6}$, το $g\left(\frac{-5}{6}\right) =$

$$= -3\left(\frac{-5}{6}\right)^2 - 5\left(\frac{-5}{6}\right) + 2 = \frac{49}{12}.$$

3. α) Για τη συνάρτηση $f(x) = 2x^2 + 4x + 1$ είναι $\alpha = 2 > 0$, οπότε αυτή

✔ Παρουσιάζει ελάχιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = -1$, το $f(-1) = -1$.

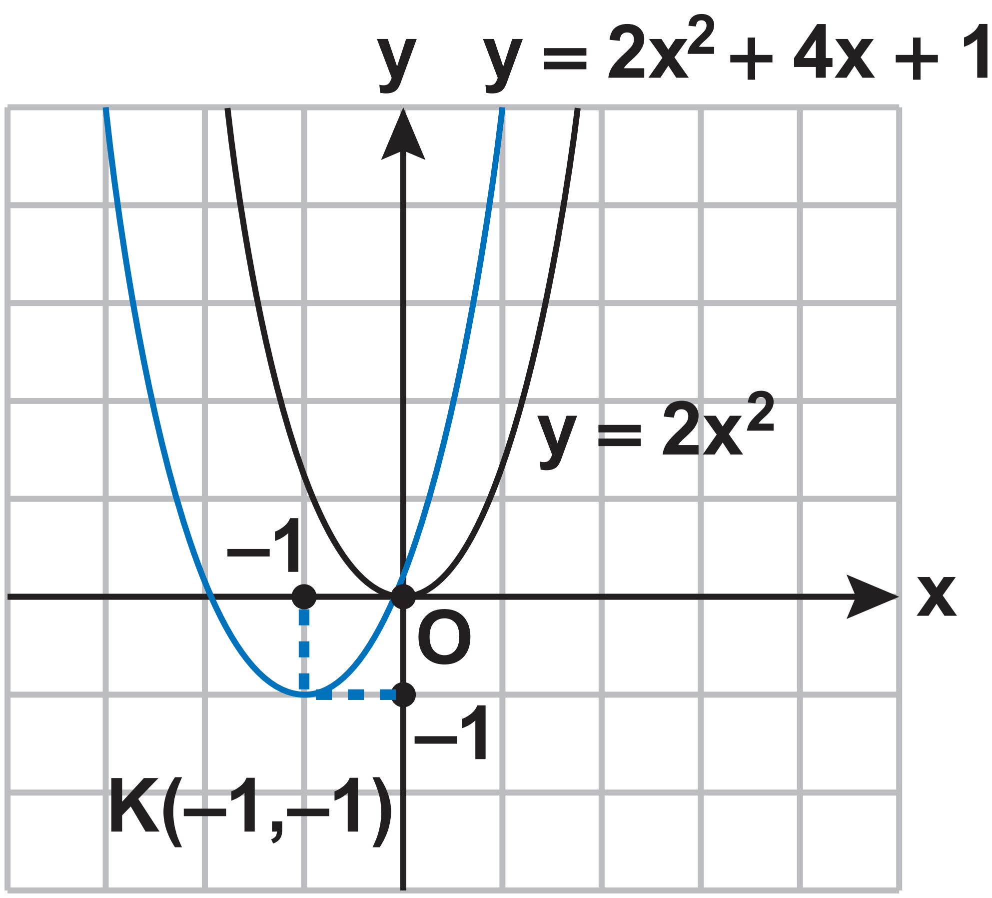
✔ Είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[-1, +\infty)$. Ακόμη η γραφική παράσταση της f είναι παραβολή και

✔ έχει κορυφή το σημείο Κ(–1,–1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = -1$,

✔ τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία

$$A\left(-\frac{2+\sqrt{2}}{2}, 0\right) \text{ και } B\left(\frac{-2+\sqrt{2}}{2}, 0\right)$$

οι τετμημένες των οποίων, είναι οι ρίζες του τριωνύμου $2x^2 + 4x + 1$, ενώ τον άξονα y΄y στο σημείο Γ(0, 1).



β) Για τη συνάρτηση $g(x) = -2x^2 + 8x - 9$ είναι $\alpha = -2 < 0$, οπότε αυτή

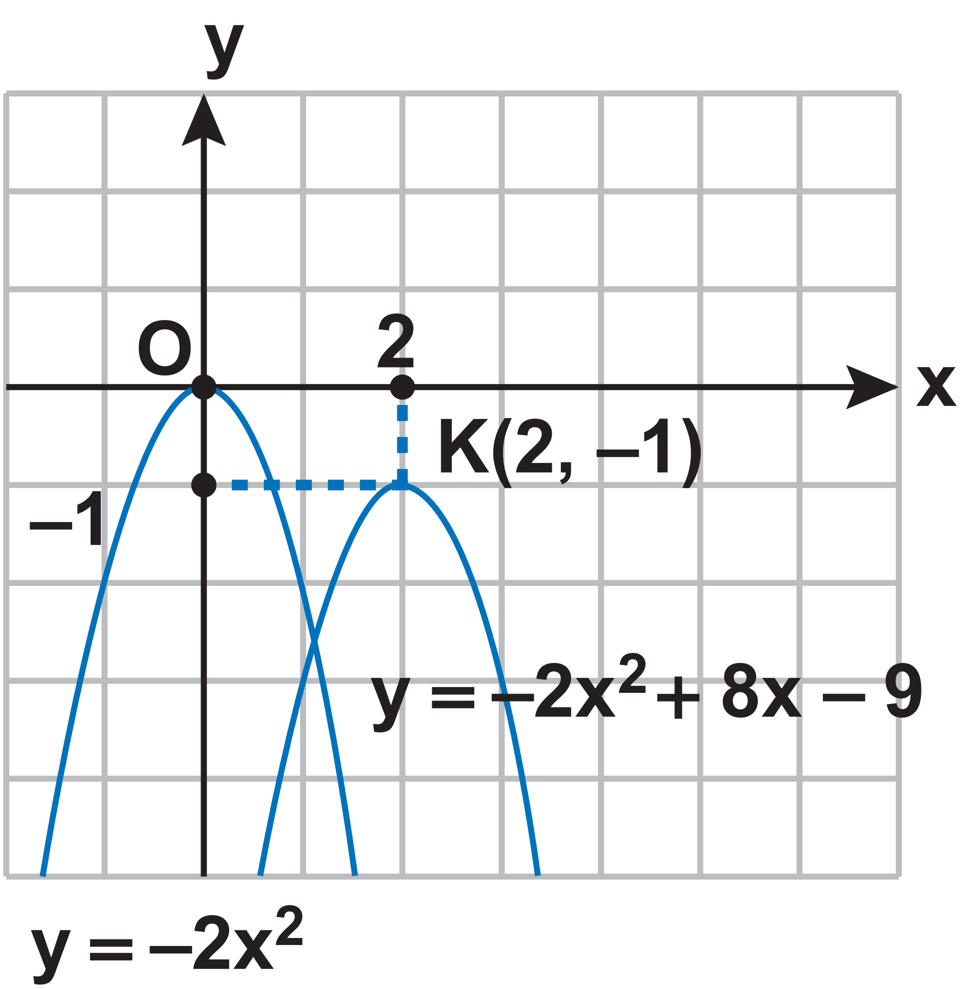
✔ Παρουσιάζει μέγιστο για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 2$, το $g(2) = -1$

✔ Είναι γνησίως αύξουσα στο $(-\infty, 2]$ και γνησίως φθίνουσα στο $[2, +\infty)$.

Ακόμη η γραφική της παράσταση είναι παραβολή και

✔ έχει κορυφή το σημείο Κ(2, –1) και άξονα συμμετρίας την ευθεία $x = 2$,

✔ τέμνει τον άξονα y΄y στο σημείο Α(0, –9) ενώ, δεν τέμνει τον άξονα x΄x, γιατί το τριώνυμο δεν έχει ρίζες.



4. Γνωρίζουμε ότι

i) Όταν $\alpha > 0$, τότε η παραβολή $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ είναι ανοιχτή προς τα πάνω, ενώ όταν $\alpha < 0$, τότε η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω. Επομένως, θετικό α έχουν τα τριώνυμα f_1, f_3 και f_6, ενώ αρνητικό α έχουν τα τριώνυμα f_2, f_4, f_5 και f_7.

ii) Το γ είναι η τεταγμένη του σημείου τομής της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ με τον άξονα $y'y$. Επομένως, θετικό γ έχουν τα τριώνυμα f_1 και f_5, αρνητικό γ έχουν τα τριώνυμα f_2, f_3, f_6 και f_7, ενώ γ ίσον με μηδέν έχει το f_4.

iii) Η τεταγμένη της κορυφής Κ της παραβολής $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ δίνεται από τον τύπο $x_K = \dfrac{-\beta}{2\alpha}$, οπότε ισχύει $\beta = -2\alpha \cdot x_K$.

Επομένως

✔ για την f_2 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,

✔ για την f_3 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta < 0$,

✔ για την f_4 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,

✔ για την f_5 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K > 0$, έχουμε $\beta > 0$,

✔ για την f_6 που έχει $\alpha > 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta > 0$, και

✔ για την f_7 που έχει $\alpha < 0$ και $x_K < 0$, έχουμε $\beta < 0$.

Έτσι έχουμε τον παρακάτω πίνακα:

Τριώνυμο	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7
α	+	–	+	–	–	+	–
β	0	+	–	+	+	+	–
γ	+	–	–	0	+	–	–
Δ	–	0	+	+	+	+	–

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. i) Η παραβολή εφάπτεται του x΄x μόνο αν είναι $\Delta = 0$. Δηλαδή

$$(k+1)^2 - 4k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 + 2k + 1 - 4k = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k + 1 = 0 \Leftrightarrow (k-1)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = 1.$$

ii) Η παραβολή έχει τον y΄y άξονα συμμετρίας μόνο αν η κορυφή της βρίσκεται στον άξονα y'y, δηλαδή αν και μόνο αν $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = 0$.

Επομένως πρέπει

$$-\frac{(k+1)}{2} = 0 \Leftrightarrow k = -1.$$

iii) Η κορυφή της παραβολής είναι το σημείο

$$K\left(-\frac{\beta}{2\alpha}, f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right)\right)$$

δηλαδή το σημείο

$$K\left(-\frac{k+1}{2}, f\left(-\frac{k+1}{2}\right)\right).$$

Σύμφωνα με την υπόθεση πρέπει

$$f\left(-\frac{k+1}{2}\right) = -4,$$

που διαδοχικά γράφεται

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - (k+1)\left(\frac{k+1}{2}\right) + k = -4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (k+1)^2 - 2(k+1)^2 + 4k = -16 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -(k+1)^2 + 4k + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k^2 - 2k - 1 + 4k + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -k^2 + 2k - 1 + 16 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k^2 - 2k - 15 = 0.$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες $k_1 = -3$ και $k_2 = 5$.

- Για $k = -3$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = 1$, ενώ
- Για $k = 5$ η τετμημένη της κορυφής είναι η $x = -3$.

2. i) Επειδή η παραβολή είναι ανοιχτή προς τα κάτω, θα είναι $\alpha < 0$.

ii) Επειδή η παραβολή τέμνει τον άξονα των x στα σημεία A(1, 0) και B(5, 0), το τριώνυμο έχει δύο ρίζες άνισες τις $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$. Άρα είναι $\Delta > 0$.

iii) Επειδή $\rho_1 + \rho_2 = \dfrac{-\beta}{\alpha}$ και $\beta = 6$,

θα έχουμε $1 + 5 = \dfrac{-6}{\alpha}$,

οπότε θα είναι $\alpha = -1$.

Τέλος, επειδή $\rho_1 \cdot \rho_2 = \dfrac{\gamma}{\alpha}$,

θα έχουμε $1 \cdot 5 = \dfrac{\gamma}{-1}$,

οπότε θα είναι $\gamma = -5$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

Αλλιώς. Επειδή το τριώνυμο έχει ρίζες τους αριθμούς $\rho_1 = 1$ και $\rho_2 = 5$, θα είναι της μορφής

$$P(x) = \alpha(x - \rho_1)(x - \rho_2) =$$
$$= \alpha(x - 1)(x - 5) = \alpha x^2 - 6\alpha x + 5\alpha.$$

Επομένως θα είναι $\beta = -6\alpha$ και επειδή $\beta = 6$, θα έχουμε $\alpha = -1$.

Άρα $P(x) = -x^2 + 6x - 5$.

3. i) Η περίμετρος L του ορθογωνίου δίνεται από τον τύπο $L = 2(x + y)$ και επειδή δίνεται ότι $L = 20$, θα ισχύει

$2(x+y)=20 \Leftrightarrow x+y=10 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow y=10-x$.

Επομένως, το εμβαδόν του ορθογωνίου θα είναι ίσο με

$E=xy=x(10-x)=-x^2+10x$.

Άρα $f(x) = -x^2 + 10x$, $0 < x < 10$.

ii) Το εμβαδόν μεγιστοποιείται όταν μεγιστοποιείται το τριώνυμο $f(x)$. Αυτό συμβαίνει όταν

$x=\dfrac{-\beta}{2\alpha}=\dfrac{-10}{-2}=5$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο, αφού για $x=5$ είναι και $y=5$. Η μέγιστη τιμή του εμβαδού είναι ίση με

$f(5) = -5^2 + 10 \cdot 5 = 25$.

4. Αν θέσουμε (AM) = x, τότε θα είναι (MB) = 6 – x (σχήμα). Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΚΓΜ παίρνουμε

$$υ_1^2 = x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2 = x^2 - \frac{x^2}{4} = \frac{3x^2}{4},$$

οπότε $υ_1 = \dfrac{x\sqrt{3}}{2}$.

Ομοίως από το τρίγωνο ΛΔΒ παίρνουμε $υ_2 = \dfrac{(6-x)\sqrt{3}}{2}$.

Το άθροισμα των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι τότε

$$E = E_1 + E_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(AM)(ΚΓ) + \frac{1}{2}(MB)(ΛΔ) =$$

$$= \frac{1}{2}x\frac{x\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}(6-x)\frac{(6-x)\sqrt{3}}{2} =$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}(6-x)$$

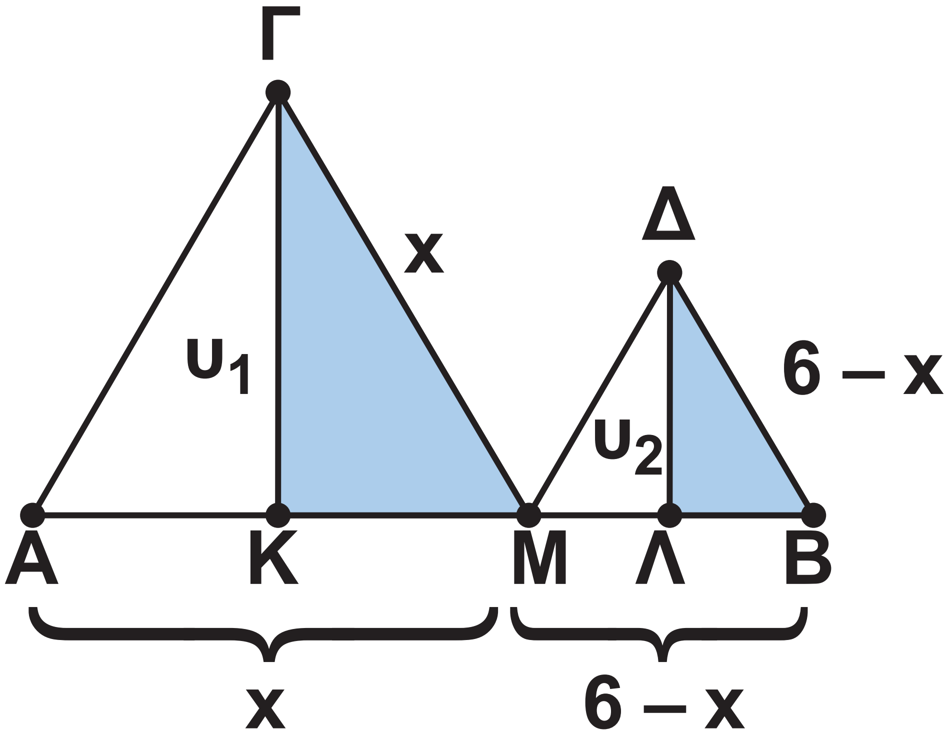
Άρα $E=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(x^2-6x+18)$,

με $0\leq x\leq 6$. (1)

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι το εμβαδόν Ε είναι ελάχιστο για την τιμή του x, για την οποία η συνάρτηση $f(x)=x^2-6x+18$ παρουσιάζει ελάχιστο. Επειδή $\alpha=1>0$, η συνάρτηση παρουσιάζει ελάχιστο για

$$x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{6}{2}=3.$$

Επομένως το εμβαδόν γίνεται ελάχιστο όταν το Μ είναι το μέσο του ΑΒ.


Γ
x
Δ
u_1
6 – x
u_2
Α
Κ
Μ
Λ
Β
x
6 – x

5. Από το σχήμα βλέπουμε ότι για τις διαστάσεις x και y ισχύει

$$2x+2x+3y=240 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x+3y=240 \Leftrightarrow y=\frac{240-4x}{3}. \quad (1)$$

Το εμβαδόν των δύο χώρων είναι

$$E=2xy=2x\left(\frac{240-4x}{3}\right)=$$

$$=-\frac{8}{3}x^2+160x. \qquad (2)$$

Για τη συνάρτηση

$E(x)=-\frac{8}{3}x^2+160x$ είναι $\alpha=-\frac{8}{3}<0$,

οπότε αυτή παρουσιάζει μέγιστο

για $x=\frac{-\beta}{2\alpha}=\frac{-160}{\frac{-16}{3}}=30$.

Τότε από την (1) παίρνουμε

$$y = \frac{240 - 4 \cdot 30}{3} = 40.$$

Άρα, οι διαστάσεις που δίνουν το μέγιστο εμβαδόν είναι $x = 30$ m και $y = 40$ m.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ

1. i) Έχουμε

$$\frac{1}{2}\left[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+(\gamma-\alpha)^2\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2+\beta^2-2\beta\gamma+\gamma^2+$$

$$+\gamma^2-2\gamma\alpha+\alpha^2)=$$

$$=\frac{1}{2}(2\alpha^2+2\beta^2+2\gamma^2-2\alpha\beta-2\beta\gamma-$$

$$-2\gamma\alpha)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 2(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)=$$

$$=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha.$$

ii) Έχουμε

$$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\geq\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha\geq 0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\Big[(\alpha-\beta)^2+(\beta-\gamma)^2+$$

$$+(\gamma-\alpha)^2\Big]\geq 0 \text{ που ισχύει.}$$

Το “=” ισχύει αν και μόνο αν $\alpha-\beta=0$ και $\beta-\gamma=0$ και $\gamma-\alpha=0 \Leftrightarrow \alpha=\beta=\gamma$.

2. i) Έχουμε $(\kappa\beta)^2+(\kappa\gamma)^2=\kappa^2\beta^2+$
$+\kappa^2\gamma^2=\kappa^2(\beta^2+\gamma^2)=\kappa^2\alpha^2=(\kappa\alpha)^2$.

ii) Έχουμε $(\mu^2-\nu^2)^2+(2\mu\nu)^2=$
$=\mu^4-2\mu^2\nu^2+\nu^4+4\mu^2\nu^2=$
$=\mu^4+2\mu^2\nu^2+\nu^4=(\mu^2+\nu^2)^2$.

3	4	5
8	6	10
5	12	13
21	20	29
16	30	34
15	8	17

3. Α) Έχουμε $\alpha\beta \leq \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \alpha\beta \leq \frac{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4\alpha\beta \leq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-4\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq \alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 0 \leq (\alpha-\beta)^2$, που ισχύει.

Το “=” ισχύει όταν $\alpha=\beta$.

Από την ανισότητα αυτή προκύπτει ότι το εμβαδόν ενός ορθογωνίου με διαστάσεις α και β δεν υπερβαίνει το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά το ημιάθροισμα $\frac{\alpha+\beta}{2}$.

Β) Αν α και β είναι οι διαστάσεις ενός τέτοιου ορθογωνίου, τότε το εμβαδόν του είναι $Ε = αβ$ και η περίμετρός του $P = 2(α + β)$.

i) Έτσι η προηγούμενη ανισότητα γράφεται $E \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2$. Η ισότητα ισχύει, αν και μόνο αν $α = β = \frac{P}{4}$, δηλαδή όταν το ορθογώνιο γίνει τετράγωνο.

ii) Λόγω της (i) έχουμε

$$E \leq \left(\frac{P}{4}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{E} \leq \frac{P}{4} \Leftrightarrow P \geq 4\sqrt{E}.$$

Η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $α = β$.

(Το παραπάνω αποτέλεσμα ήταν γνωστό πριν την εποχή του Ευκλείδη).

4. i) $3(x+1)-\alpha x=4 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3x+3-\alpha x=4 \Leftrightarrow (3-\alpha)x=1.$

- Αν $\alpha \neq 3$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την $x=\dfrac{1}{3-\alpha}$.
- Αν $\alpha=3$, τότε η εξίσωση γίνεται $0x=1$ και είναι αδύνατη.

ii) Για $\alpha \neq 3$ πρέπει

$$\frac{1}{3-\alpha}>1 \Leftrightarrow \frac{1}{3-\alpha}-1>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1-3+\alpha}{3-\alpha}>0 \Leftrightarrow \frac{\alpha-2}{3-\alpha}>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(3-\alpha)>0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\alpha-2)(\alpha-3)<0 \Leftrightarrow 2<\alpha<3.$$

5. i) Έχουμε $\lambda^2(x-1)+3\lambda = x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 x - \lambda^2 + 3\lambda = x+2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \lambda^2 x - x = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda^2-1)x = \lambda^2 - 3\lambda + 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\lambda+1)(\lambda-1)x = (\lambda-1)(\lambda-2)$.

ii) • Αν $\lambda \neq \pm 1$, τότε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την

$$x = \frac{(\lambda-1)(\lambda-2)}{(\lambda+1)(\lambda-1)} = \frac{\lambda-2}{\lambda+1}.$$

• Για $\lambda = -1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 6$ και είναι αδύνατη.

• Για $\lambda = 1$, η εξίσωση γίνεται $0x = 0$ και είναι ταυτότητα.

iii) Η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό $x = \frac{1}{4}$, αν και μόνο αν ισχύει

$$(\lambda-1)(\lambda+1)\frac{1}{4} = (\lambda-1)(\lambda-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(\lambda+1) = 4(\lambda-1)(\lambda-2) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\lambda-1)(3\lambda-9) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ή } \lambda = 3.$$

6. A) i) Έχουμε

$$180 = 60t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 18 = 6t - \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 36 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 36 = 0 \Leftrightarrow (t-6)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t = 6 \ \text{sec.}$$

ii) Έχουμε

$$100 = 60t - \frac{1}{2} \cdot 10t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 10 = 6t - \frac{1}{2}t^2 \Leftrightarrow 20 = 12t - t^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 12t + 20 = 0.$$

$$\Delta = (-12)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 20 = 144 - 80 = \\ = 64$$

Επομένως $t = \dfrac{12 \pm 8}{2} \Leftrightarrow t = 2$ sec ή $t = 10$ sec.

Στην περίπτωση i) το ύψος των 180 μέτρων είναι το μέγιστο ύψος που φθάνει το σώμα, αφού η συνάρτηση του ύψους είναι

$$h(t) = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot t^2 + 60t,$$ δηλαδή

$$h(t) = -5t^2 + 60t$$ και έχει μέγιστο

για $t = \frac{-60}{2(-5)} = 6$ sec,

το $h(6) = 180$ μέτρα.

Στη δεύτερη περίπτωση οι δύο λύσεις της εξίσωσης είναι οι χρονικές στιγμές που το σώμα θα βρεθεί σε ύψος 100 μέτρων, μια στην άνοδο όταν $t = 2$ sec και μια στην κάθοδο όταν $t = 10$ sec.

B) Για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0, θα πρέπει το h_0 να είναι μικρότερο ή το πολύ ίσο με το μέγιστο της συνάρτησης

$$h(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + \upsilon_0 t.$$

Το μέγιστο της συνάρτησης αυτής είναι ίσο με

$$h\left(\frac{-\upsilon_0}{2\left(-\frac{1}{2}\right)g}\right)=h\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)=$$

$$=-\frac{1}{2}g\left(\frac{\upsilon_0}{g}\right)^2+\upsilon_0\cdot\frac{\upsilon_0}{g}=$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{\upsilon_0^2}{g}+\frac{\upsilon_0^2}{g}=\frac{-\upsilon_0^2}{2g}+\frac{2\upsilon_0^2}{2g}=\frac{\upsilon_0^2}{2g}.$$

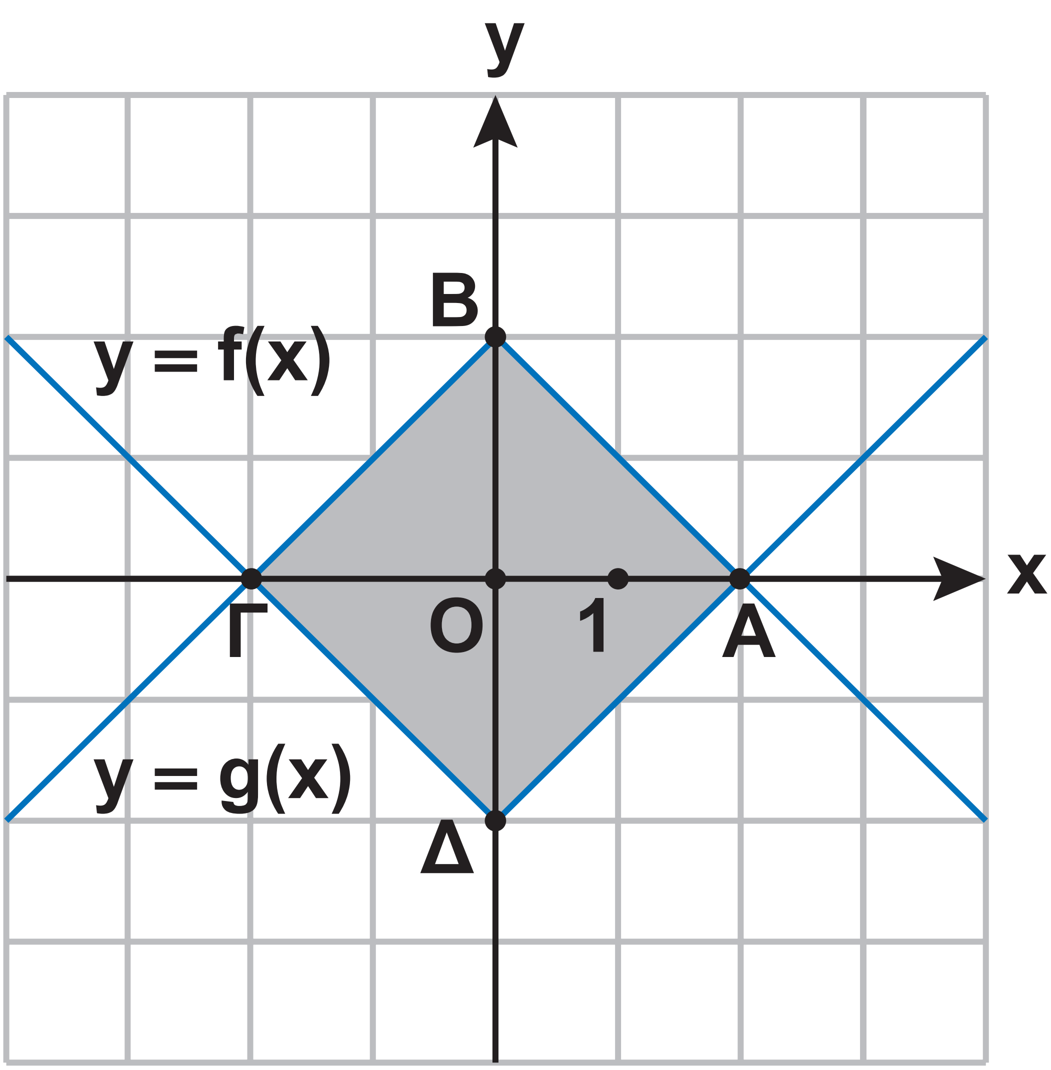
Άρα για να μπορεί το σώμα να φθάσει σε ύψος h_0

πρέπει $h_0\le\frac{\upsilon_0^2}{2g}$.

7. Η γραφική παράσταση της $f(x) = |x| - 2$ προκύπτει από μια κατακόρυφη μετατόπιση της $y = |x|$, κατά 2 μονάδες προς τα κάτω, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x) = 2 - |x|$ είναι συμμετρική της γραφικής παράστασης της f ως προς τον άξονα x΄x, διότι η g είναι αντίθετη της f (σχ.).
Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στα σημεία Α(2, 0), Β(0, 2), Γ(–2, 0) και Δ(0, –2). Το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΒΓΔ είναι ίσο με το τετραπλάσιο του εμβαδού του τριγώνου $\overset{\triangle}{OAB}$, δηλαδή είναι ίσο με

$$E_{ΑΒΓΔ} = 4 \cdot E_{OAB} = 4 \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\right) = 8 \text{ τμ.}$$

Σημείωση: Το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο, διότι έχει όλες του τις γωνίες ορθές και όλες του τις πλευρές ίσες, με μήκος $2\sqrt{2}$. Επομένως το εμβαδόν του είναι ίσο με $E_{ΑΒΓΔ} = \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 8$ τμ.



8. Η γραφική παράσταση της $f(x)=|x-1|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 1 μονάδα προς τα δεξιά, ενώ η γραφική παράσταση της $g(x)=|x-3|$ προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της $y=|x|$, κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά (σχ.). Οι γραφικές αυτές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο Α(2,1). Οι λύσεις της ανίσωσης $|x-1|<|x-3|$ είναι εκείνα τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $y=|x-1|$ βρίσκεται κάτω από την $y=|x-3|$. Αυτό συμβαίνει, όπως φαίνεται στο σχήμα, όταν $x<2$.

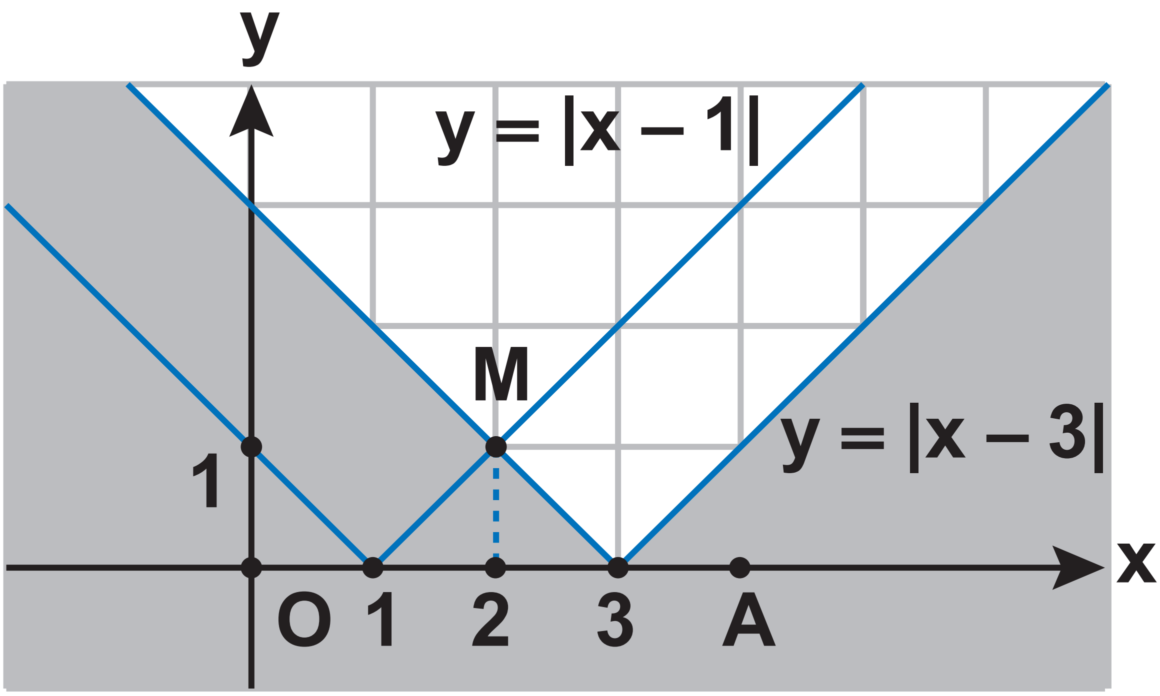
Το παραπάνω συμπέρασμα επιβεβαιώνεται αλγεβρικά ως εξής

$$|x-1|<|x-3| \Leftrightarrow |x-1|^2<|x-3|^2 \Leftrightarrow$$

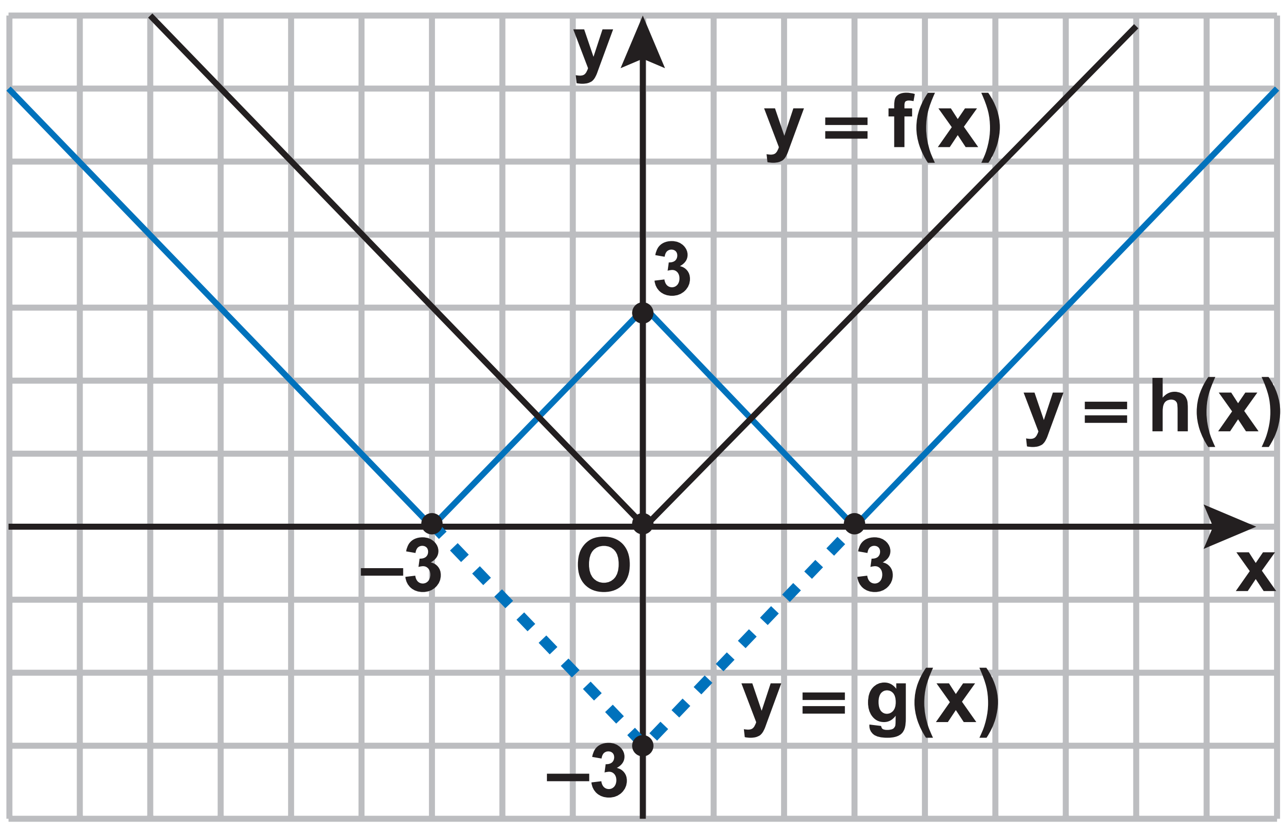
$$\Leftrightarrow (x-1)^2<(x-3)^2 \Leftrightarrow$$

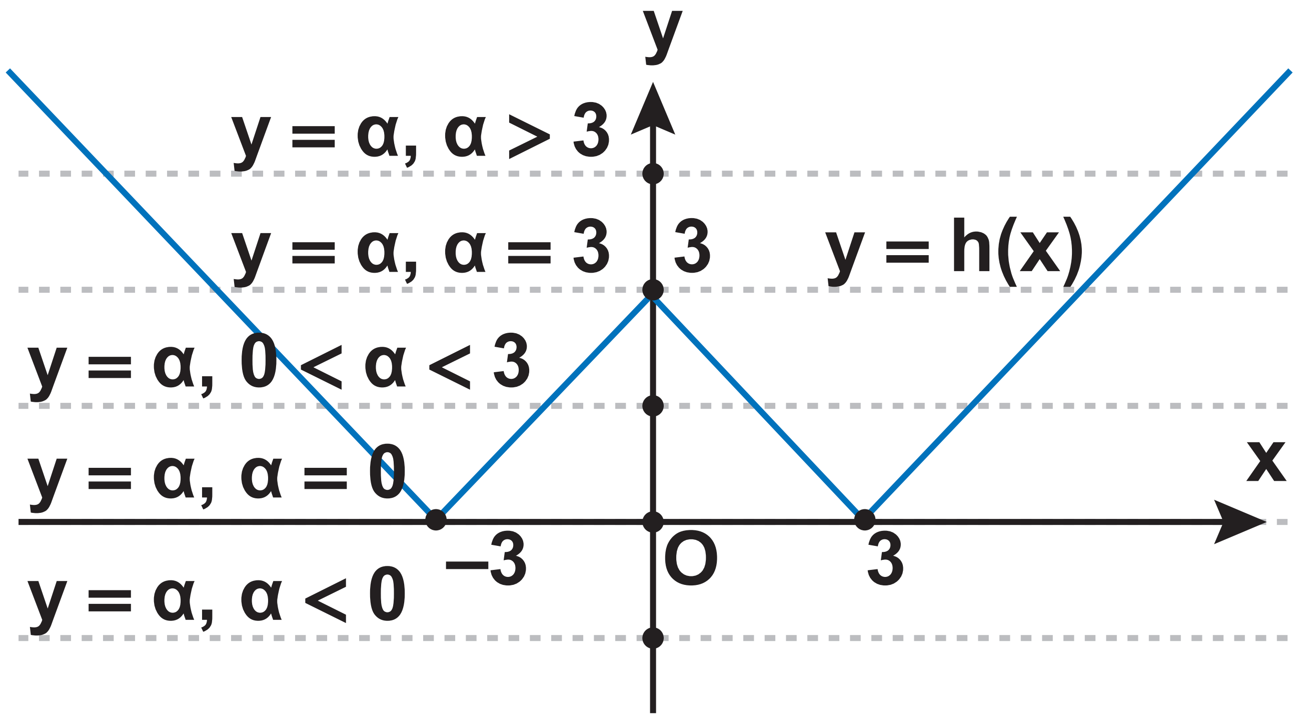
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 < x^2 - 6x + 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x < 8 \Leftrightarrow x < 2.$$



9. Α) Η γραφική παράσταση της g προκύπτει από τη γραφική παράσταση της f με κατακόρυφη μετατόπιση 3 μονάδες προς τα κάτω.
Η γραφική παράσταση της h προκύπτει από τη γραφική παράσταση της g, αν παρατηρήσουμε ότι $h(x) = g(x)$, για $x \leq 3$ ή $x \geq 3$ και $h(x) = -g(x)$ για $-3 \leq x \leq 3$.





Β) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος $\begin{cases} y = \left| |x| - 3 \right| \\ y = \alpha \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$ παριστάνεται από το πλήθος των σημείων τομής της οριζόντιας ευθείας $y = \alpha$ και της γραφικής παράστασης της συνάρτησης h.

Επομένως,

- Αν $\alpha < 0$, το σύστημα δεν έχει λύσεις, δηλαδή είναι αδύνατο.
- Αν $\alpha = 0$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $0 < \alpha < 3$, το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις.
- Αν $\alpha = 3$, το σύστημα έχει τρεις λύσεις.
- Αν $\alpha > 3$, το σύστημα έχει δύο λύσεις.

10. i) Έχουμε

$$y^2 - x^2 = 0 \Leftrightarrow (y-x)(y+x) = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow y = x$ ή $y = -x$, που είναι οι εξισώσεις των διχοτόμων των γωνιών των αξόνων.

ii) Η απόσταση των σημείων Κ(α, 0) και Μ(x, y) είναι ίση με

$$d = \sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-0)^2} =$$

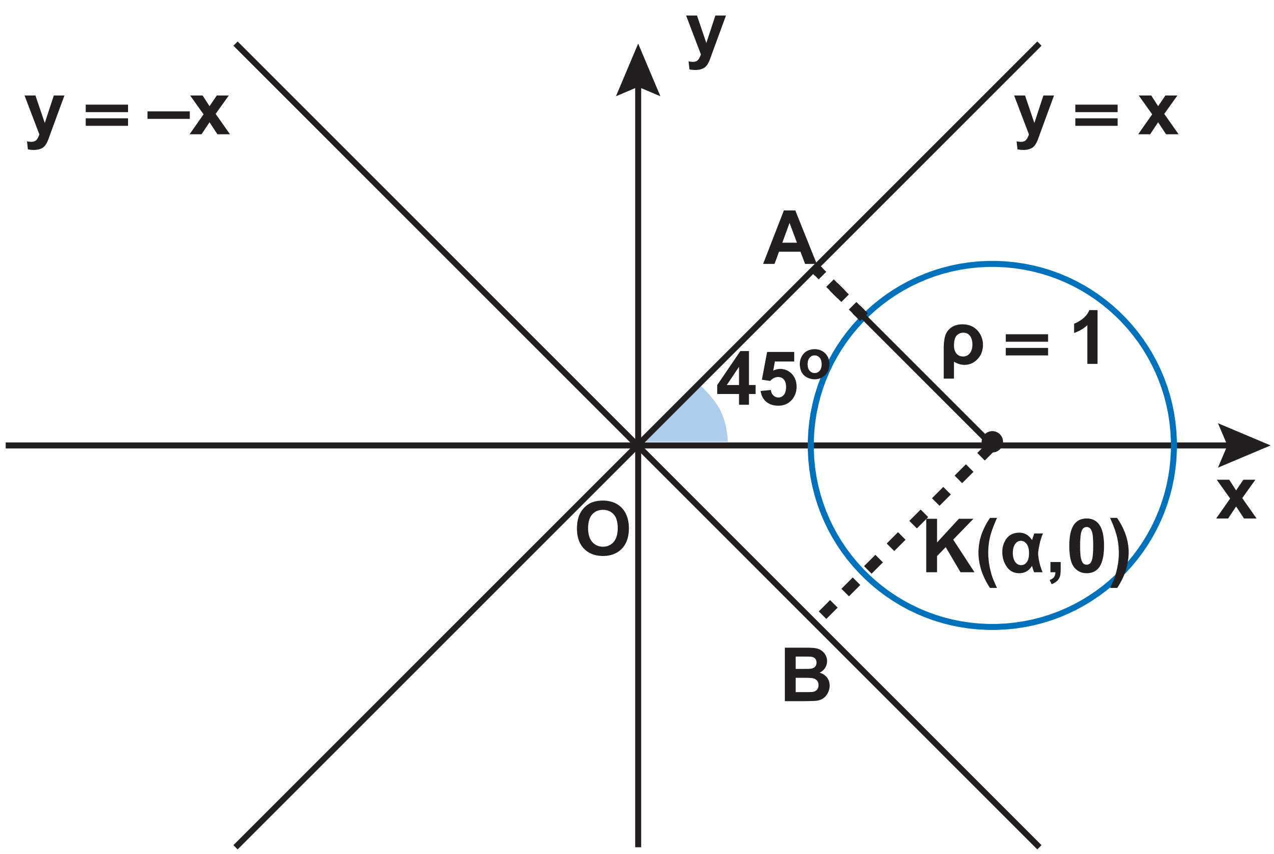
$$= \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2}\,.$$

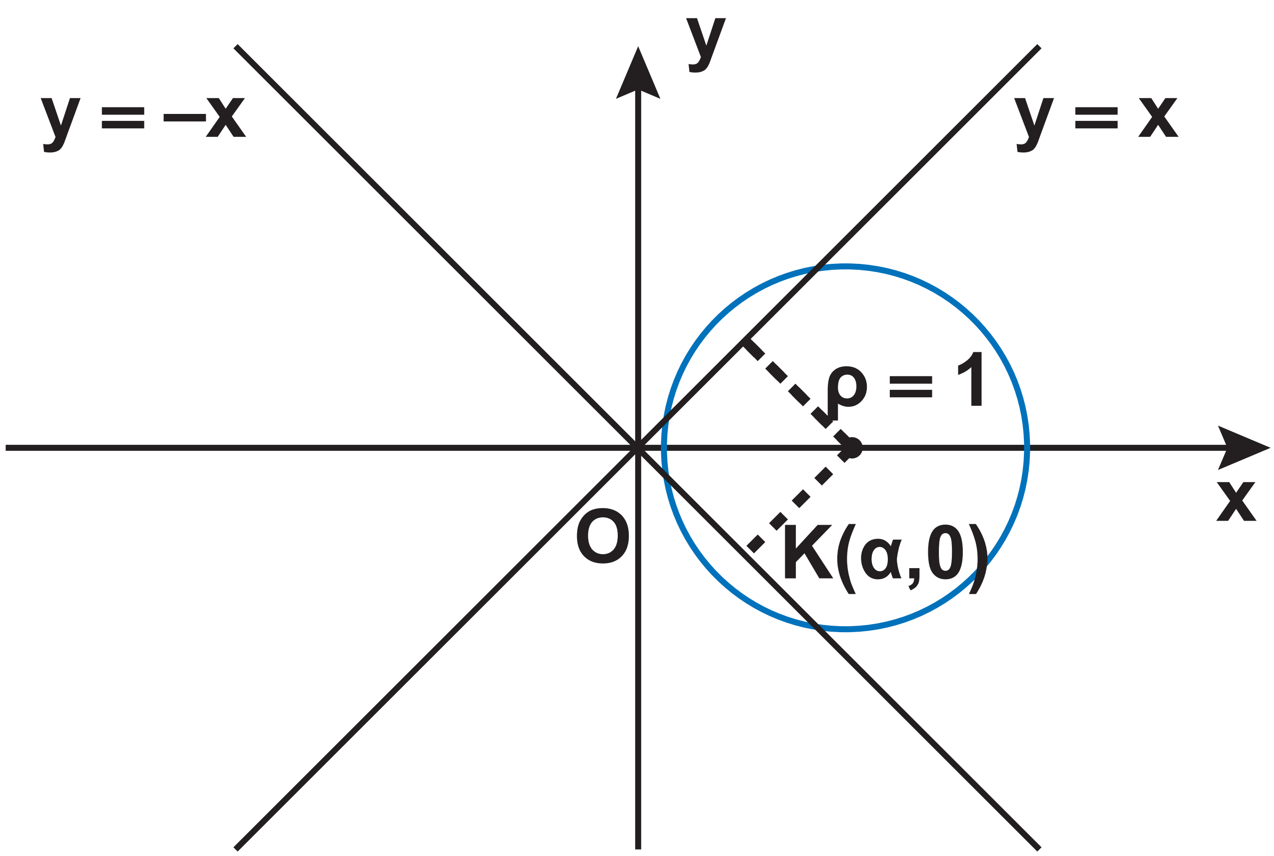
Ένα σημείο Μ(x, y) ανήκει στον κύκλο με κέντρο Κ(α, 0) και ακτίνα $\rho = 1$, αν και μόνο αν

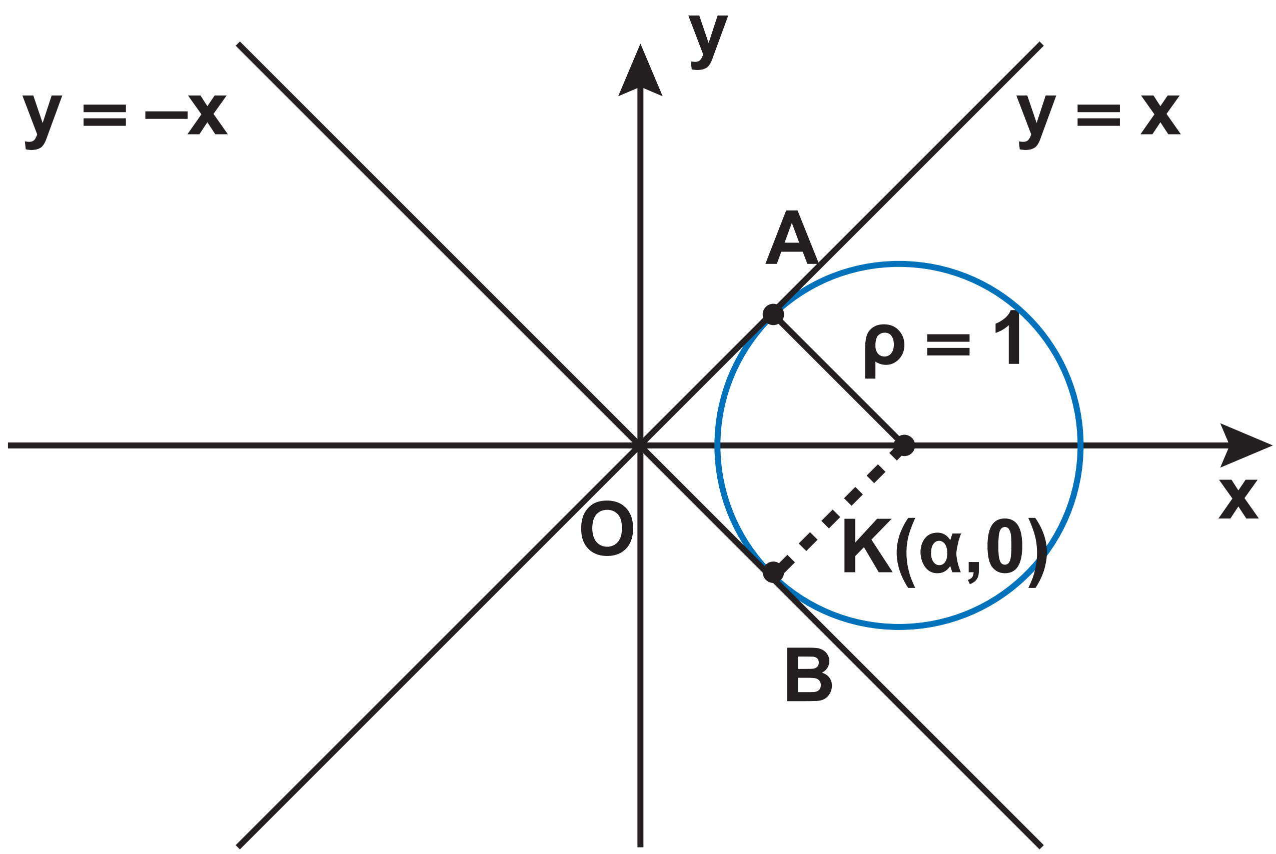
$$(KM) = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(x-\alpha)^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow$$

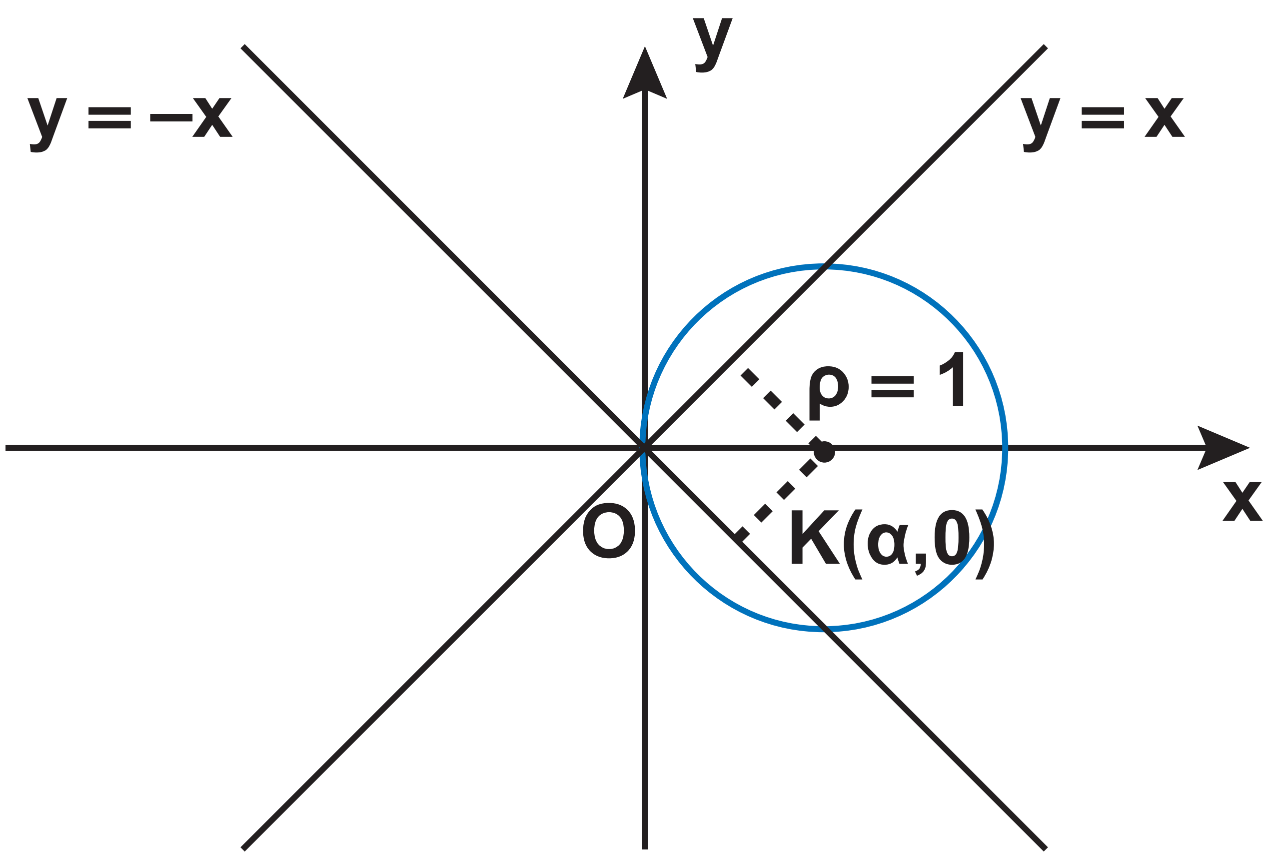
$$\Leftrightarrow (x-\alpha)^2 + y^2 = 1.$$

iii) Το πλήθος των λύσεων του συστήματος είναι όσο και το πλήθος των κοινών σημείων του κύκλου με τις ευθείες $y = x$ και $y = -x$.


y
y = –x
y = x
A
ρ = 1
45°
x
O
K(α,0)
B


y
y = –x
y = x
ρ = 1
x
O
K(α,0)


y
y = –x
y = x
A
ρ = 1
x
O
K(α,0)
B


y
y = –x
y = x
ρ = 1
x
O
K(α,0)

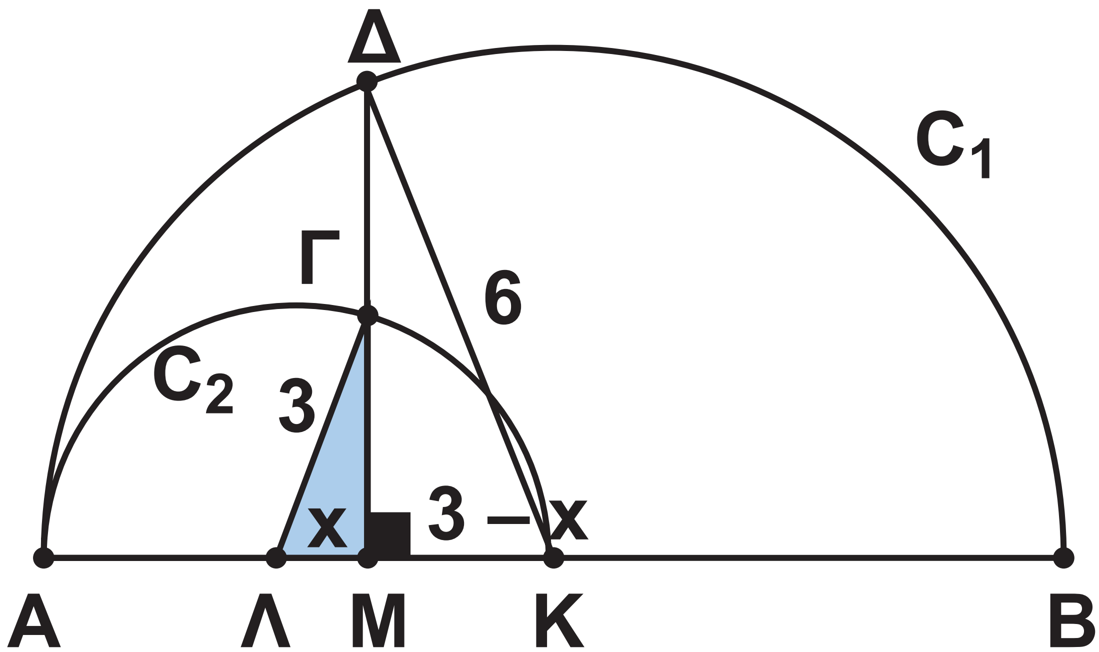
Επειδή, για $\alpha \geq 0$, η απόσταση του κέντρου Κ του κύκλου από τις ευθείες αυτές είναι ίση με

$d = KA = KB = \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}}$, έχουμε:

- Αν $d > \rho \Leftrightarrow \dfrac{\alpha}{\sqrt{2}} > 1 \Leftrightarrow \alpha > \sqrt{2}$, ο κύκλος και οι ευθείες δεν έχουν κανένα κοινό σημείο, οπότε το σύστημα είναι αδύνατο.
- Αν $d = \rho \Leftrightarrow \alpha = \sqrt{2}$, ο κύκλος εφάπτεται των ευθειών, οπότε το σύστημα έχει δύο λύσεις.
- Αν $d < \rho \Leftrightarrow 0 \leq \alpha < \sqrt{2}$, ο κύκλος τέμνει και τις δύο ευθείες, οπότε το σύστημα έχει τέσσερις λύσεις, με εξαίρεση την περίπτωση $\alpha = 1$ κατά την οποία ο κύκλος έχει με τις ευθείες τρία διακεκριμένα κοινά σημεία, οπότε το

σύστημα έχει τρεις λύσεις.
Λόγω συμμετρίας, αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε και όταν $\alpha \leq 0$.

11. Επειδή το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΜΓΛ}}$ είναι ορθογώνιο, θα ισχύει
$\text{ΜΓ}^2 = \text{ΛΓ}^2 - \text{ΜΛ}^2 = 3^2 - x^2 = 9 - x^2$,
οπότε θα είναι
$\text{ΜΔ} = 2\text{ΜΓ} = 2\sqrt{9 - x^2}$ και επειδή
το τρίγωνο $\overset{\triangle}{\text{ΜΚΔ}}$ είναι ορθογώνιο θα ισχύει $\text{ΚΔ}^2 = \text{ΜΚ}^2 + \text{ΜΔ}^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 6^2 = (3 - x)^2 + \left(2\sqrt{9 - x^2}\right)^2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 36 = x^2 - 6x + 9 + 4(9 - x^2) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ ή $x = -3$
Άρα $x = 1$, αφού $x > 0$.


Δ
C1
Γ
6
C2
3
x
3 – x
A
Λ
M
K
B

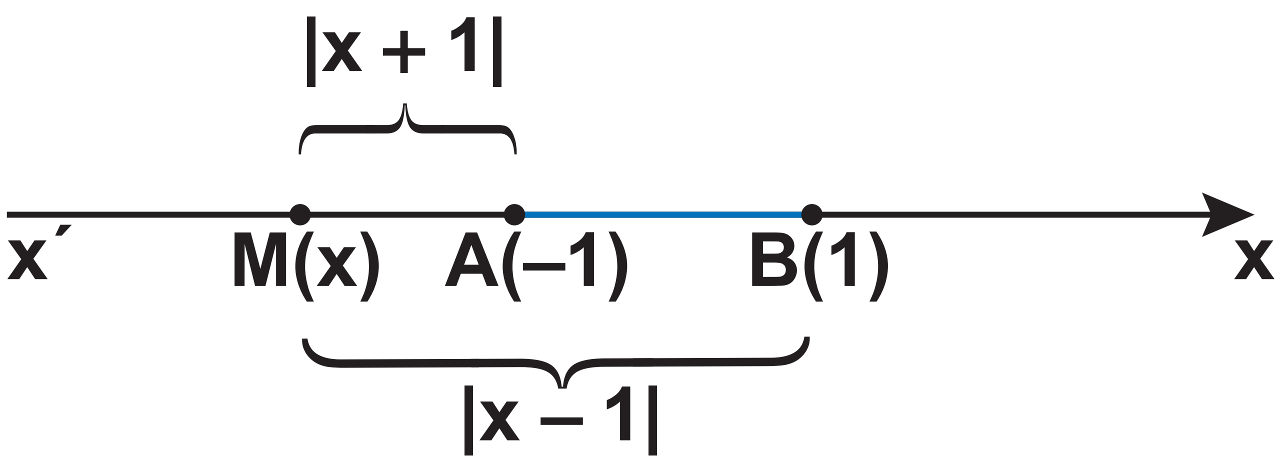
12. i) Από τον ορισμό της απόστασης δυο σημείων του άξονα προκύπτει ότι

$(MA) = |x+1|$ και $(MB) = |x-1|$.

Επομένως, έχουμε

$f(x) = (MA) + (MB) = |x+1| + |x-1|$.

$g(x) = \big||x+1| - |x-1|\big|$.



ii) Για να απλοποιήσουμε τον τύπο της συνάρτησης f και g, βρίσκουμε το πρόσημο των $x+1$ και $x-1$ για τις διάφορες τιμές του x που φαίνονται στον παρακάτω πίνακα.

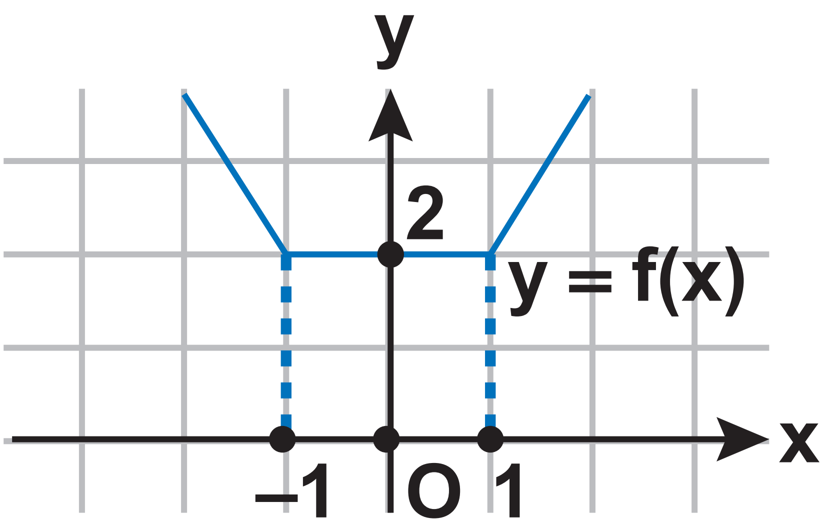
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	

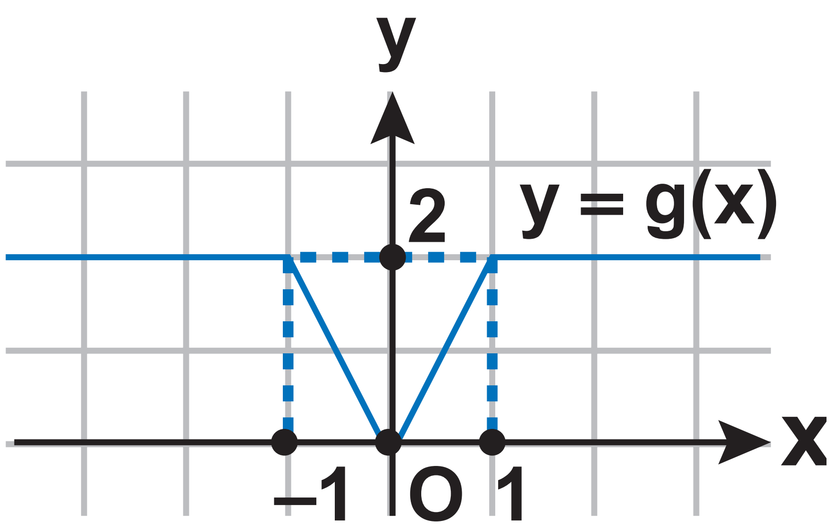
Έτσι έχουμε,

$$f(x)=\begin{cases} -2x, \text{ αν } x<-1 \\ 2, \text{ αν } -1\leq x<1 \text{ και} \\ 2x, \text{ αν } x\geq 1 \end{cases}$$

$$g(x)=\begin{cases} 2, \text{ αν } x<-1 \\ -2x, \text{ αν } -1\leq x<1 \\ 2x, \text{ αν } 0\leq x<1 \\ 2, \text{ αν } x\geq 1 \end{cases}$$

οπότε οι γραφικές παραστάσεις των f και g είναι οι ακόλουθες:





iii) Από τις προηγούμενες γραφικές παραστάσεις συμπεραίνουμε ότι

• Η συνάρτηση f

✔ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty,-1]$, σταθερή του $[-1,1]$ και γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και

✔ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in[-1,1]$.

• Η συνάρτηση g

✔ είναι σταθερή στο $(-\infty, -1]$, γνησίως φθίνουσα στο $[-1, 0]$, γνησίως αύξουσα στο $[0, 1]$ και σταθερή στο $[1, +\infty)$,

✔ παρουσιάζει ελάχιστο, ίσο με 0, για $x = 0$ και

✔ παρουσιάζει μέγιστο, ίσο με 2, για κάθε $x \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$.

13. i) • Η f έχει ολικό μέγιστο για $x=0$, το $f(0)=2$.

• Η g έχει ολικό μέγιστο για $x=1$, το $g(1)=2$ και ολικό ελάχιστο για $x=-1$, το $g(-1)=-2$.

• Η h έχει ολικό μέγιστο για $x=-1$ και $x=1$, το $h(-1)=h(1)=2$ και ολικό ελάχιστο για $x=0$, το $h(0)=0$.

ii) • Για την f αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει

$$f(x)\le 2 \Leftrightarrow \frac{2}{x^2+1}\le 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1\le x^2+1 \Leftrightarrow x^2\ge 0$$ που ισχύει.

• Για την g πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες $g(x)\le 2$ και $h(x)\ge 0$.

Έχουμε $g(x) \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+1} \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \le x^2+1 \Leftrightarrow (x-1)^2 \ge 0$

που ισχύει

και $g(x) \ge -2 \Leftrightarrow \dfrac{4x}{x^2+1} \ge -2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x \ge -x^2-1 \Leftrightarrow (x+1)^2 \ge 0$

που ισχύει.

- Για την h πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $h(x) \ge 0$ και $h(x) \le 2$.

Έχουμε $h(x) \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x^4+1} \ge 0$

που είναι φανερό ότι ισχύει και

$h(x) \le 2 \Leftrightarrow \dfrac{4x^2}{x^4+1} \le 2 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2x^2 \le x^4+1 \Leftrightarrow$

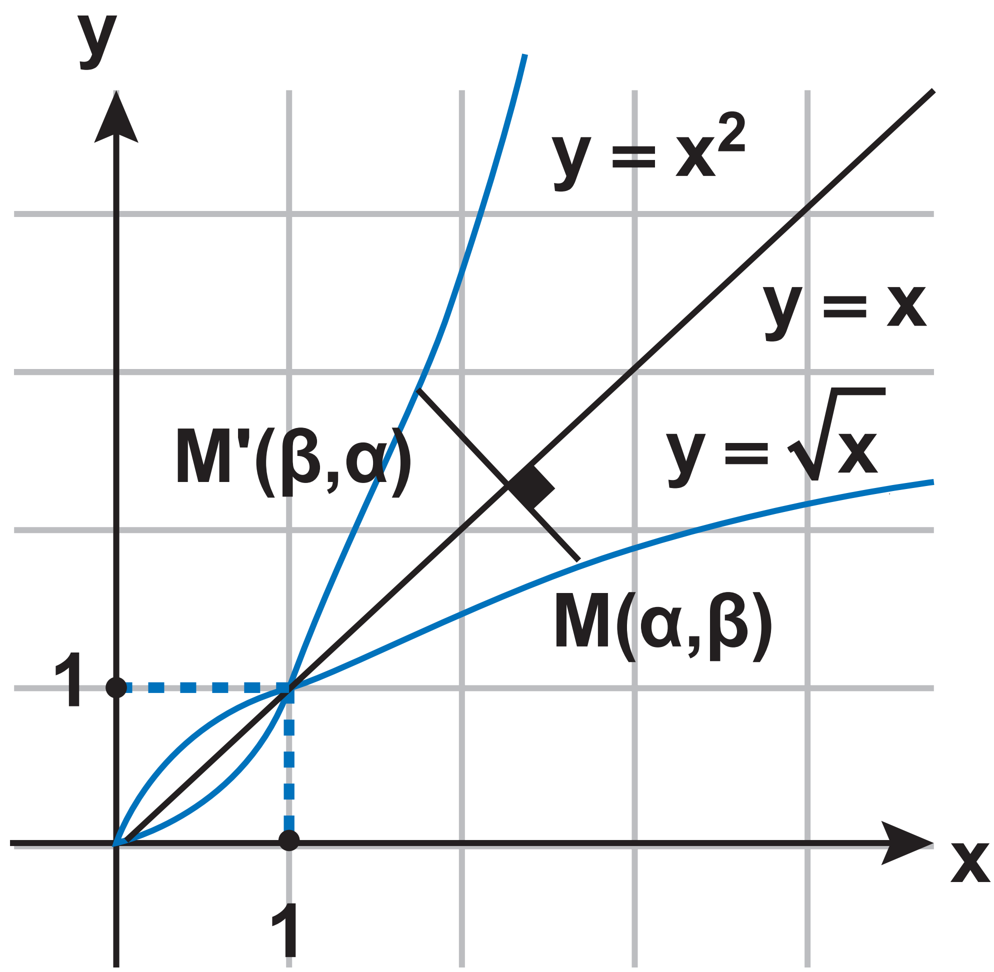
$\Leftrightarrow x^4-2x^2+1>0 \Leftrightarrow (x^2-1)^2 \ge 0$,

που ισχύει.

14. A) i) Πρέπει $x \geq 0$.
Άρα $A = [0, +\infty)$.

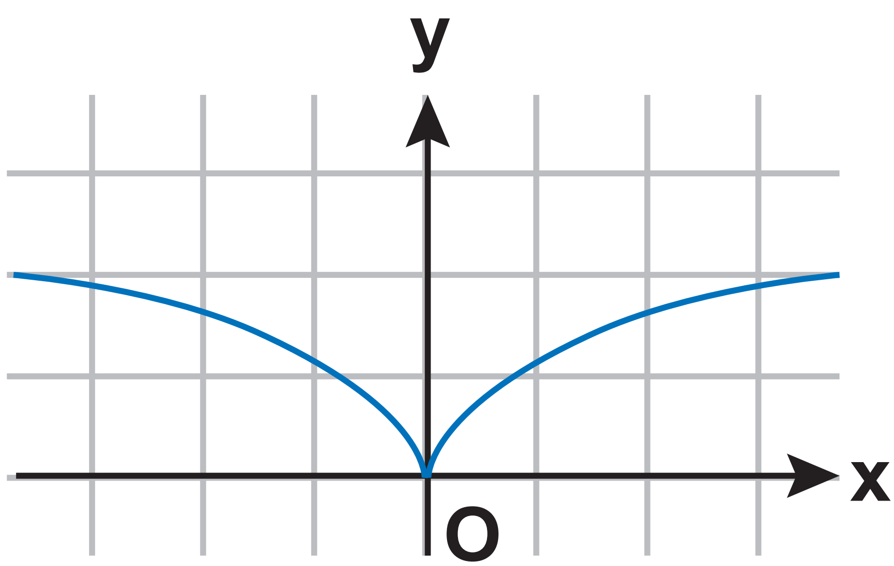
ii) Αφού το Μ(α, β) ανήκει στη γραφική παράσταση της f έχουμε
$\beta = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$. (1)
Για να ανήκει το Μ΄(β, α) στη γραφική παράσταση της g, πρέπει $g(\beta) = \alpha \Leftrightarrow \beta^2 = \alpha$ που ισχύει.

iii) Επειδή τα σημεία Μ(α, β) και Μ΄(β, α) είναι συμμετρικά ως προς τη διχοτόμο της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων συμπεραίνουμε ότι η γραφική παράσταση της $f(x) = \sqrt{x}$ είναι η συμμετρική της γραφικής της $g(x) = x^2$ ως προς την ευθεία $y = x$ για $x \geq 0$.



Από τη γραφική παράσταση της f προκύπτει ότι η $f(x)=\sqrt{x}$ είναι γνησίως αύξουσα στο $A=[0,+\infty)$ και έχει ολικό ελάχιστο για $x=0$ το $f(0)=0$.

B) Το πεδίο ορισμού της h είναι όλο το $\mathbb{R}$.
Έχουμε
$$h(-x) = \sqrt{|-x|} = \sqrt{|x|} = h(x).$$
Άρα η h είναι άρτια και η γραφική της παράσταση αποτελείται από τη γραφική παράσταση της f και τη συμμετρική της ως προς τον άξονα y΄y.



Γ) Στο τυχαίο τρίγωνο $N\hat{M'}N'$ έχουμε $(NN') = f(\nu+1) = \sqrt{\nu+1}$

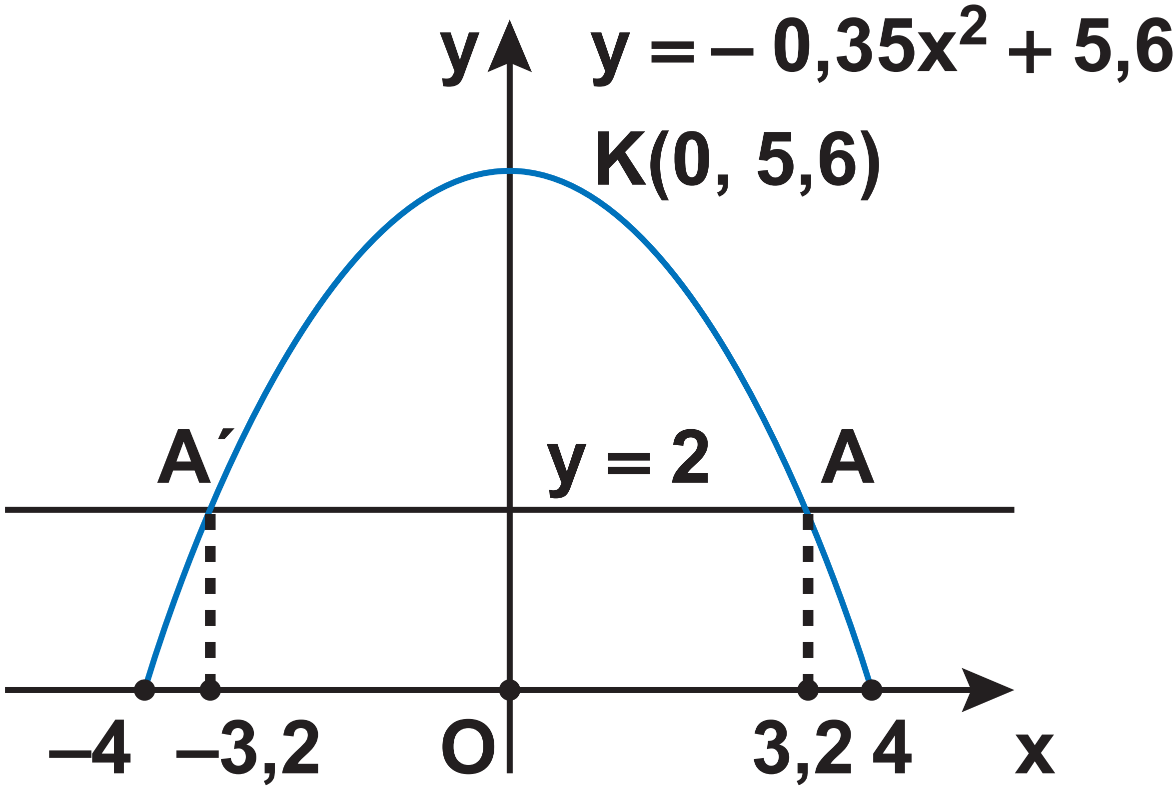
και $(NM') = \sqrt{(NM)^2 + (MM')^2} =$

$= \sqrt{(\nu+1-\nu)^2 + \left(\sqrt{\nu}\right)^2} =$

$= \sqrt{1+\nu} = (NN')$.

Άρα το τρίγωνο $N\hat{M'}N'$ είναι ισοσκελές.

15. Στο κατακόρυφο επίπεδο της γέφυρας θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων, στο οποίο παίρνουμε ως άξονα των x τη χορδή του παραβολικού τόξου και ως άξονα των y τη μεσοκάθετο αυτής (σχήμα).



Στο σύστημα αυτό το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση της μορφής $y = \alpha x^2 + \gamma$, με $y \geq 0$ και η κορυφή του είναι το σημείο K(0, 5,6). Συνεπώς, η εξίσωση του παραβολικού τόξου παίρνει τη μορφή $y = \alpha x^2 + 5{,}6$, με $y \geq 0$ (1) Επειδή το πλάτος της γέφυρας είναι 8 m, το παραβολικό τόξο θα τέμνει τον άξονα x΄x στα σημεία B(4, 0) και B΄(–4, 0), των οποίων οι συντεταγμένες θα επαληθεύουν την

εξίσωση (1). Επομένως θα ισχύει
$0=\alpha 4^2+5,6 \Leftrightarrow \alpha=-0,35$.
Άρα, το παραβολικό τόξο έχει εξίσωση
$y=-0,35x^2+5,6$ με $-4 \leq x \leq 4$ (2)
Επειδή το ύψος της καρότσας είναι 2 m τέμνει το παραβολικό τόξο στα σημεία Α και Α΄, για να περάσει το γεωργικό μηχάνημα θα πρέπει ΑΑ΄ > 6 m, που είναι το πλάτος του φορτηγού. Για να βρούμε το ΑΑ΄ αρκεί αν βρούμε τις συντεταγμένες των Α, Α΄.
Αν θέσουμε στην εξίσωση (2)
$y=2$ βρίσκουμε
$-0,35x^2+5,6=2 \Leftrightarrow x^2 \approx 10,6 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \approx 3,2$.
Άρα Α(3,2, 0) και Α΄(–3,2, 0), οπότε ΑΑ΄ ≈ 6,4 m > 6 m. Επομένως το γεωργικό μηχάνημα μπορεί να περάσει.

16. i) Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις

- Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΑΒ, δηλαδή όταν $0 \leq x \leq 20$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου ΟΑΜ θα είναι ίσο με

$$E = \frac{OA \cdot AM}{2} = \frac{10 \cdot x}{2} = 5x$$

οπότε θα είναι $f(x) = 5x$.

- Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΒΓ, δηλαδή όταν $20 \leq x \leq 40$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

$$E = \frac{OA + BM}{2} \cdot AB =$$

$$= \frac{10 + (x - 20)}{2} \cdot 20 = 10(x - 10)$$

οπότε θα είναι $f(x) = 10x - 100$.

• Όταν το σημείο Μ διαγράφει το ευθ. τμήμα ΓΔ, δηλαδή όταν $40 \leq x \leq 60$, τότε το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου θα είναι ίσο με

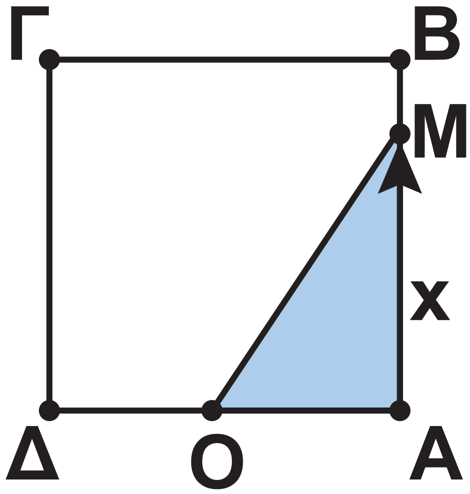
$$E = E_{ΑΒΓΔ} - E_{ΟΔΜ} =$$

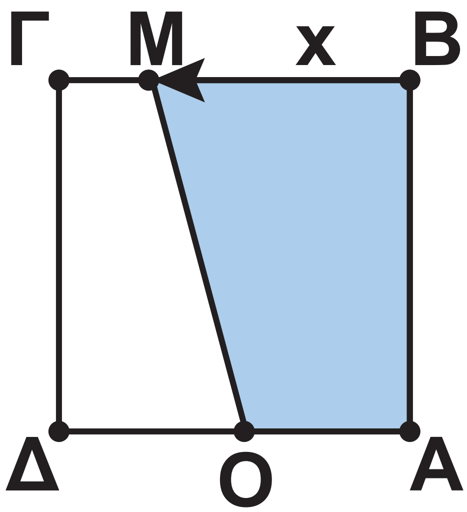
$$= 20 \cdot 20 - \frac{10 \cdot (60 - x)}{2} = 5x + 100$$

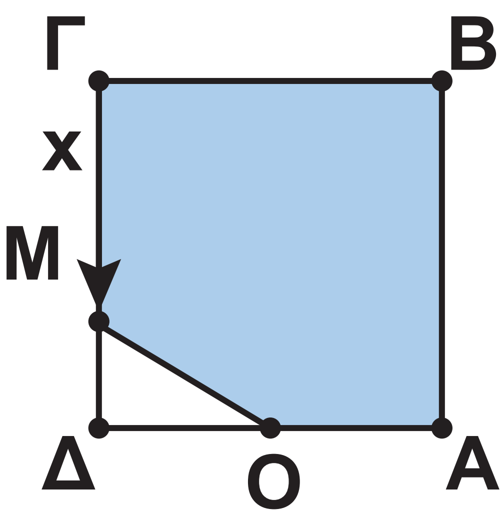
οπότε θα είναι $f(x) = 5x + 100$. Επομένως, είναι

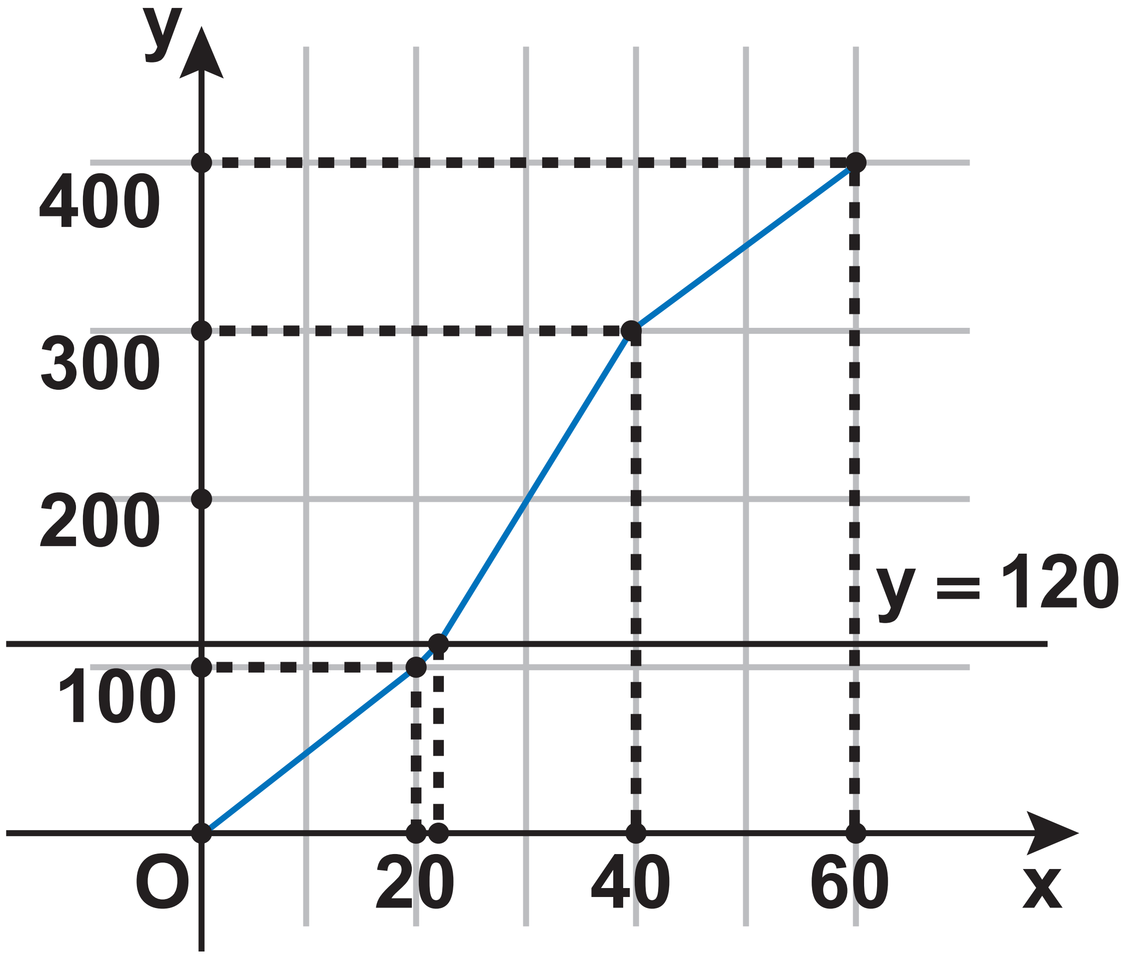
$$f(x) = \begin{cases} 5x, & 0 \leq x \leq 20 \\ 10x - 100, & 20 \leq x \leq 40 \\ 5x + 100, & 40 \leq x \leq 60. \end{cases}$$

ii) Η γραφική παράσταση της f είναι η πολυγωνική γραμμή του παρακάτω σχήματος.


Γ
B
M
x
Δ
O
A


Γ
M
x
B
Δ
O
A


Γ
B
x
M
Δ
O
A



iii) Από την παραπάνω γραφική παράσταση προκύπτει ότι η f παίρνει την τιμή 120, όταν x μεταξύ 20 και 40.
Επομένως
$f(x) = 120 \Leftrightarrow 10x - 100 = 120 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 22$.

17. i) Είναι

$$E_{MAB} = \frac{AB \cdot MP}{2} = \frac{AB \cdot AP}{2} =$$

$$= \frac{2 \cdot x}{2} = x \text{ και}$$

$$E_{M\Sigma\Gamma\Delta} = \frac{M\Sigma + \Gamma\Delta}{2} \cdot \Sigma\Delta =$$

$$= \frac{x+2}{2} \cdot (2-x) = \frac{4-x^2}{2} =$$

$$= -0{,}5x^2 + 2$$

Επομένως

$f(x) = x,\ 0 \le x \le 2$ και

$g(x) = -0{,}5x^2 + 2,\ 0 \le x \le 2$

ii) Είναι

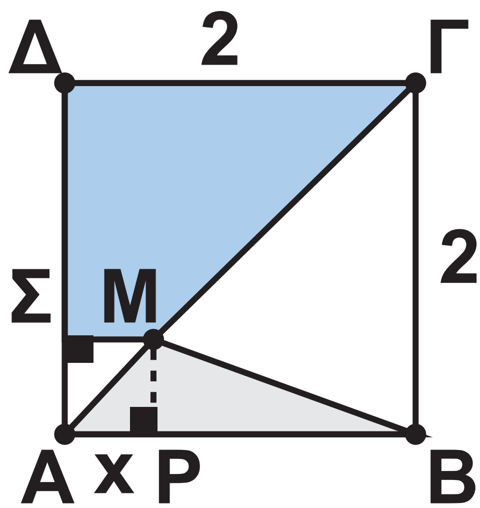
$$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x = -0{,}5x^2 + 2 \Leftrightarrow$$

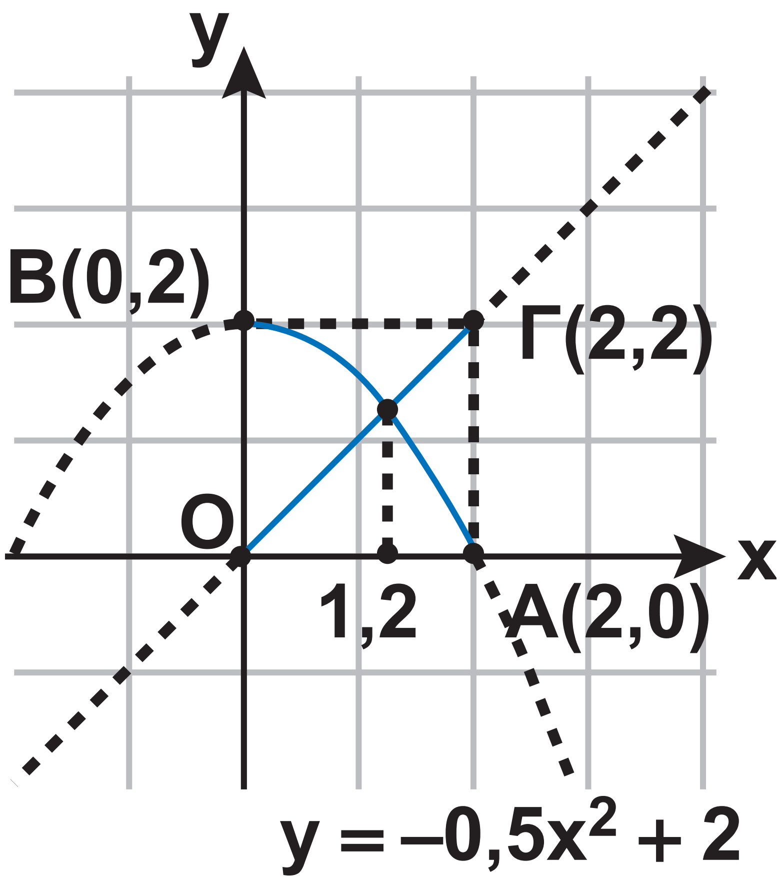
$$\Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-2 + 2\sqrt{5}}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{5} - 1, \text{ διότι } x > 0.$$

iii) Η γραφική παράσταση της f είναι το τμήμα ΟΓ της ευθείας $y = x$, ενώ η γραφική παράσταση της g είναι το τόξο ΑΒ της παραβολής $y = -0,5x^2 + 2$. Επομένως, η λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η τετμημένη του σημείου τομής των C_f και C_g και είναι περίπου 1,2, όσο είναι με προσέγγιση δεκάτου η ρίζα $x = \sqrt{5} - 1$ της εξίσωσης που βρήκαμε στο ερώτημα ii).

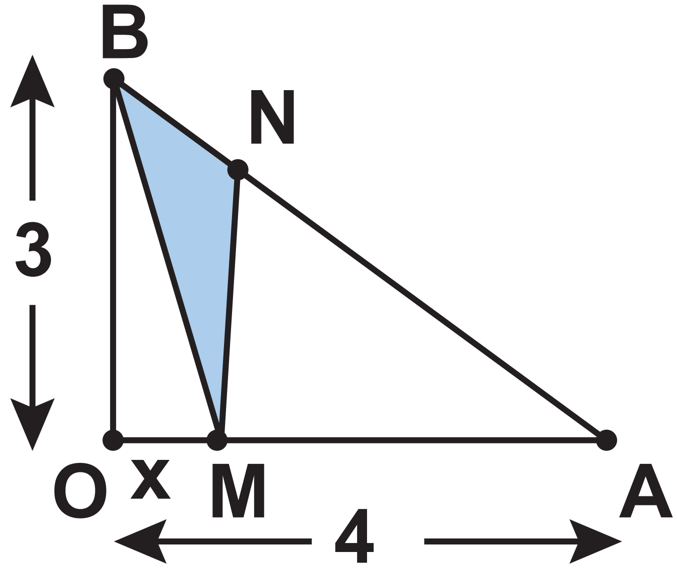

Δ
2
Γ
2
Σ
Μ
Α
x
Ρ
Β


y
B(0,2)
Γ(2,2)
O
x
1,2
A(2,0)
y = –0,5x2 + 2

18. i) Έχουμε $\overset{\triangle}{AMN} \approx \overset{\triangle}{AOB}$, αφού MN//OB ως κάθετες στην OA. Επομένως

$$\frac{(NM)}{(BO)} = \frac{(MA)}{(OA)} \Leftrightarrow \frac{(NM)}{3} = \frac{4-x}{4},$$

οπότε $(MN) = \dfrac{3(4-x)}{4}$.



Το εμβαδόν του τριγώνου BMN είναι ίσο με $\frac{1}{2}(MN)(OM)$,

(αφού η OM είναι η απόσταση

των παραλλήλων ΜΝ και ΟΒ).

Επομένως, $E(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{3(4-x)}{4}\cdot x$

Άρα $E(x)=-\frac{3}{8}x^2+\frac{3}{2}x$.

ii) Το εμβαδόν E(x) μεγιστοποιεί-

ται όταν $x=\frac{-\frac{3}{2}}{2\left(-\frac{3}{8}\right)}=2$,

οπότε

$E(2)=-\frac{3}{8}\cdot 2^2+\frac{3}{2}\cdot 2=-\frac{3}{2}+3=1,5$

τετραγωνικές μονάδες.

19. i) Έστω $y = \alpha x + \beta$ η εξίσωση της ευθείας ΑΒ. Η εξίσωση αυτή επαληθεύεται από τα ζεύγη (0, 4) και (2, 2). Επομένως

$$\begin{cases} 4 = \alpha \cdot 0 + \beta \\ 2 = 2\alpha + \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = 4 \\ 2 = 2\alpha + 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -1 \\ \beta = 4 \end{cases}.$$

Άρα η εξίσωση της ΑΒ είναι $y = -x + 4$.

Για $y = 0$ έχουμε $x = 4$. Άρα η ευθεία ΑΒ τέμνει τον $x'x$ στο $\Gamma(4, 0)$.

ii) Για $x < 4$, αλλά και για $x > 4$, έχουμε:

$$E = \text{Εμβ}(\text{ΑΜΓ}) - \text{Εμβ}(\text{ΜΒΓ}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\text{ΜΓ})(\text{ΟΑ}) - \frac{1}{2}(\text{ΜΓ})(\text{ΚΒ})$$

Όμως

$(M\Gamma)=|x-4|$, $(OA)=4$ και $(KB)=2$

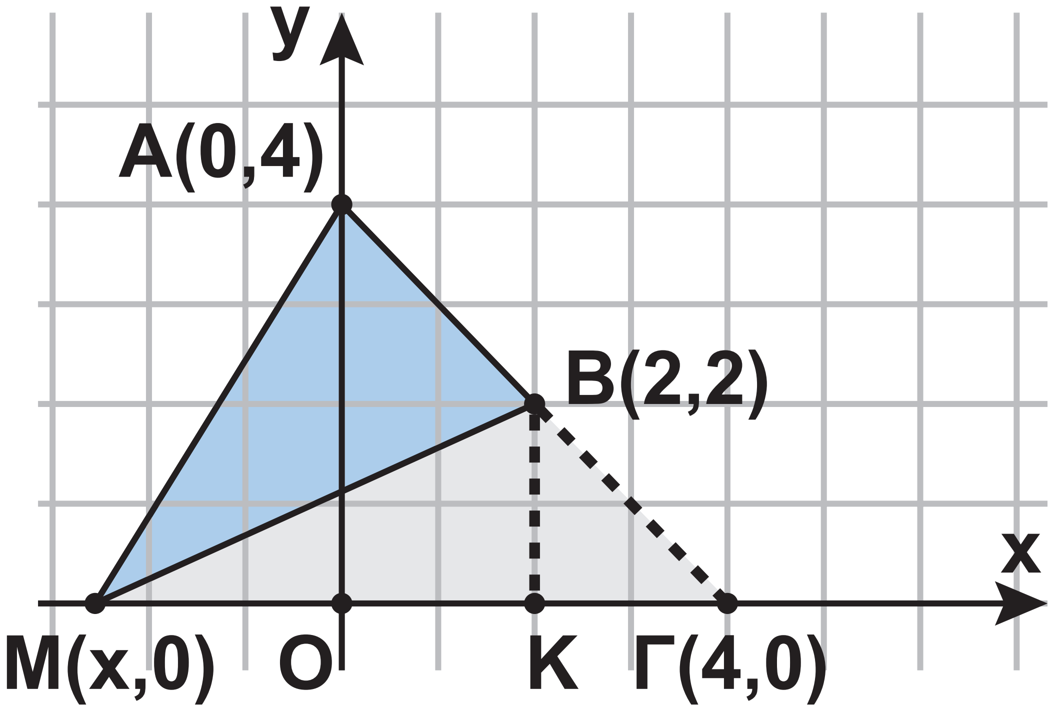
Επομένως

$$E=\frac{1}{2}|x-4|\cdot 4-\frac{1}{2}|x-4|\cdot 2=$$

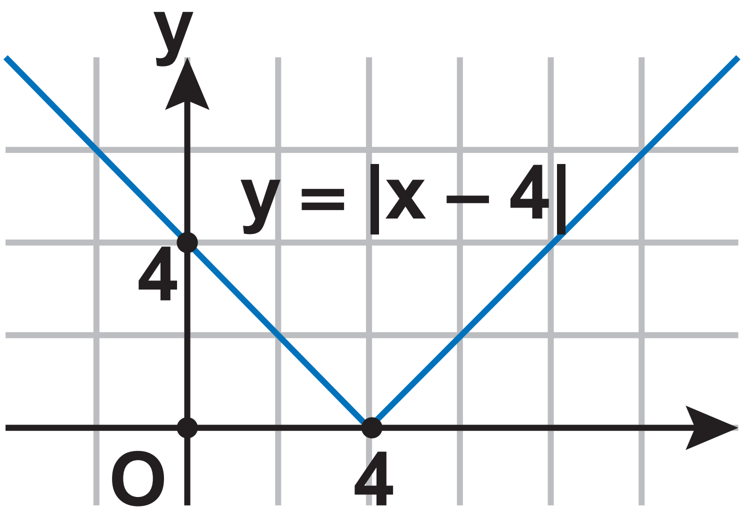
$$=2|x-4|-|x-4|=|x-4|.$$

Στην περίπτωση που είναι $x=4$, έχουμε $E=0$. Άρα, σε κάθε περίπτωση, ισχύει:

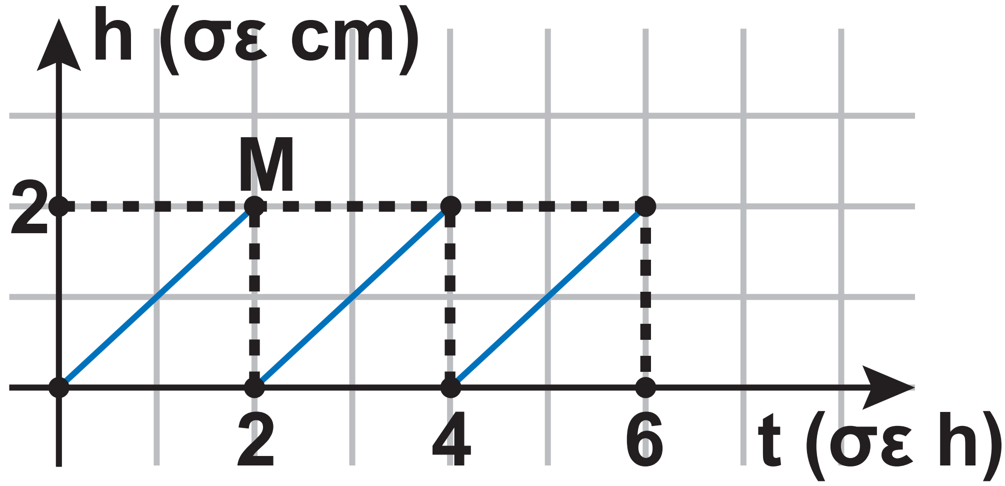
$$E(x)=|x-4|=\begin{cases}-x+4, & x<4\\ x-4, & x\geq 4\end{cases}$$



και η γραφική παράσταση της Ε(x) φαίνεται στο σχήμα.



20. i) Η κίνηση από το Α στο Β και αντιστρόφως από το Β στο Α, επαναλαμβάνεται η ίδια ακριβώς κάθε δύο ώρες.
Επομένως το διάγραμμα του ύψους h, του χιονιού στο Α, θα επαναλαμβάνεται κάθε δύο ώρες, ακριβώς το ίδιο ως προς τη μορφή. Ως προς τη θέση θα είναι απλώς μετατοπισμένο κατά 2 μονάδες κάθε φορά, προς τα δεξιά του άξονα t΄t του χρόνου.



Βρίσκουμε λοιπόν το τμήμα του διαγράμματος, που αντιστοιχεί στις 2 πρώτες ώρες. Δίνεται ότι ο ρυθμός αύξησης του ύψους είναι σταθερός, οπότε το ύψος h(t) και ο χρόνος t είναι ποσά ανάλογα. Αυτό σημαίνει ότι, όταν $t \in [0,2]$, τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbb{R}$ για το οποίο ισχύει

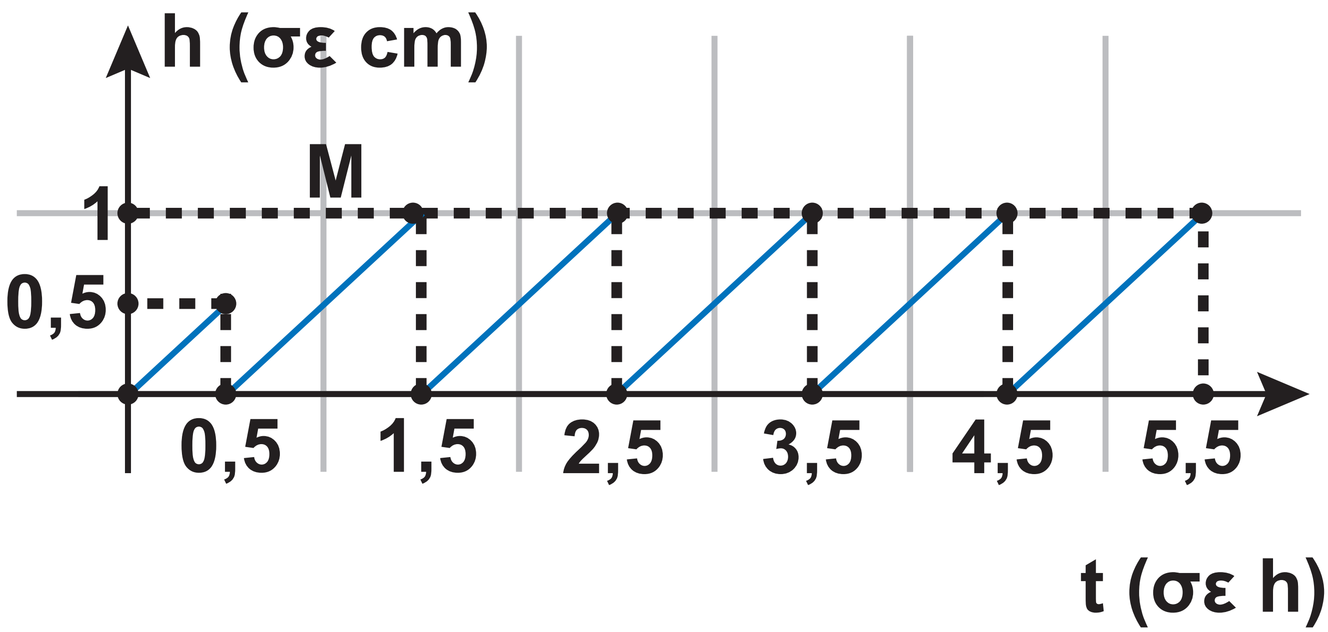
$$h(t) = \alpha t \qquad (1)$$

Επειδή για $t = 1h$ το ύψος είναι $h = 1$ cm, το ζεύγος (1, 1) θα επαληθεύει την (1), οπότε $1 = \alpha \cdot 1$ και άρα $\alpha = 1$.

Η (1) τότε γίνεται $h(t) = t$ και η γραφική της παράστασης είναι το ευθύγραμμο τμήμα ΟΜ της διχοτόμου της 1ης γωνίας των αξόνων (σχ.).

Τέλος παρατηρούμε ότι όταν $t = 2h$, του ύψος h του χιονιού είναι μηδέν, για αυτό το άκρο Μ του ΟΜ δεν ανήκει στο διάγραμμα. Επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω για τα διαστήματα [2, 4], [4, 6],... έχουμε το πλήρες διάγραμμα (σχ.).

ii) Με συλλογισμούς ανάλογους με τους παραπάνω καταλήγουμε για το ύψος του χιονιού στο Μ, στο διάγραμμα του παρακάτω σχήματος.



21. Έχουμε $P(\Omega)=1$

$$P(0)+P(1)+P(2)+\ldots+P(100)=1$$

$$P(0)+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=1$$

$$P(0)=1-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}\right).$$

Όμως

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{100}-1}{\frac{1}{2}-1}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-\frac{1}{2^{100}}}{\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2^{100}}.$$

Άρα $P(0)=1-1+\frac{1}{2^{100}}=\frac{1}{2^{100}}.$

22. Επειδή $P(A') \leq 0,28$ έχουμε
$1 - P(A) \leq 0,28$, οπότε $P(A) \geq 0,72$
και επειδή $P(B') \leq 0,71$, έχουμε
$1 - P(B') \leq 0,71$, οπότε $P(B) \geq 0,29$.

i) Έχουμε διαδοχικά

$$P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A \cup B)$$

$$P(A \cap B) \geq 1,01 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)$$

$P(A) + P(B) \geq 1,01$ που ισχύει.

ii) Αν ήταν $A \cap B = \varnothing$,
τότε θα είχαμε

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \geq 0,72 + 0,29 = 1,01$$

που είναι άτοπο, αφού γνωρίζουμε ότι $P(A \cup B) \leq 1$.