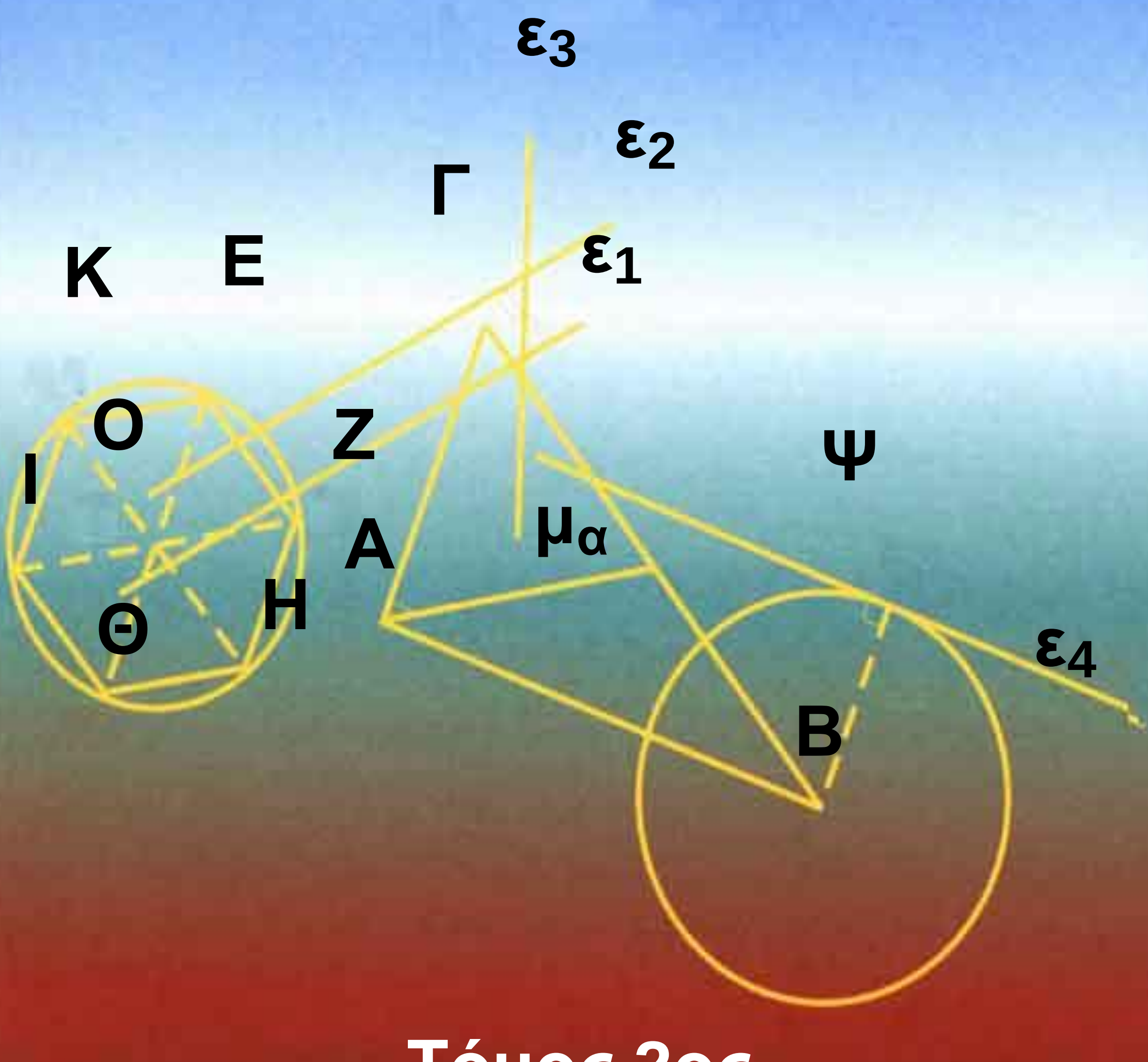
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

Α΄ και Β΄ Γενικού Λυκείου



Τόμος 2ος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΕΘΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΠΑΙΔΑΓΩΓΙΚΟ ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΤΟΜΟΣ 2ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 3.1 - 3.15

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολύχρονης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα:
Βανδουλάκης Ιωάννης
Διδάκτωρ Πανεπιστημίου Μ. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια:
Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων:
Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση:
Αλεξοπούλου Καίτη

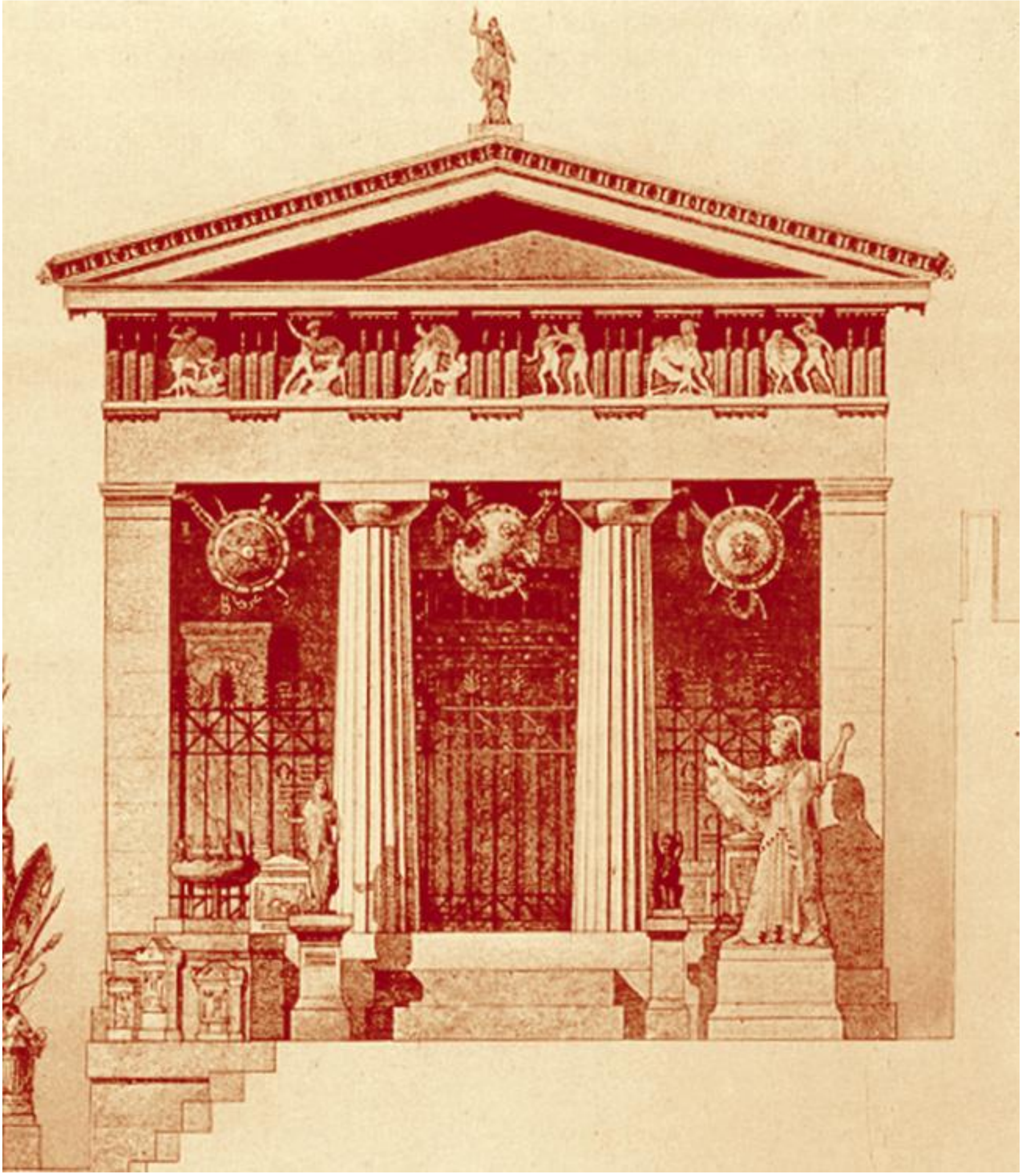
ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ
Ομάδα εργασίας του Υπουργείου Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης και Θρησκευμάτων

3 ΚΕΦΑΛΑΙΟ

Τρίγωνα

Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με το πλέον θεμελιώδες σχήμα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που είναι το τρίγωνο. Αρχικά δίνουμε τα κριτήρια ισότητας των τριγώνων. Ως εφαρμογή των κριτηρίων αυτών παρουσιάζουμε ιδιότητες των στοιχείων του κύκλου, των ισοσκελών τριγώνων, της μεσο-καθέτου ευθύγραμμου τμήματος και της διχοτόμου μιας γωνίας. Η μεσο-

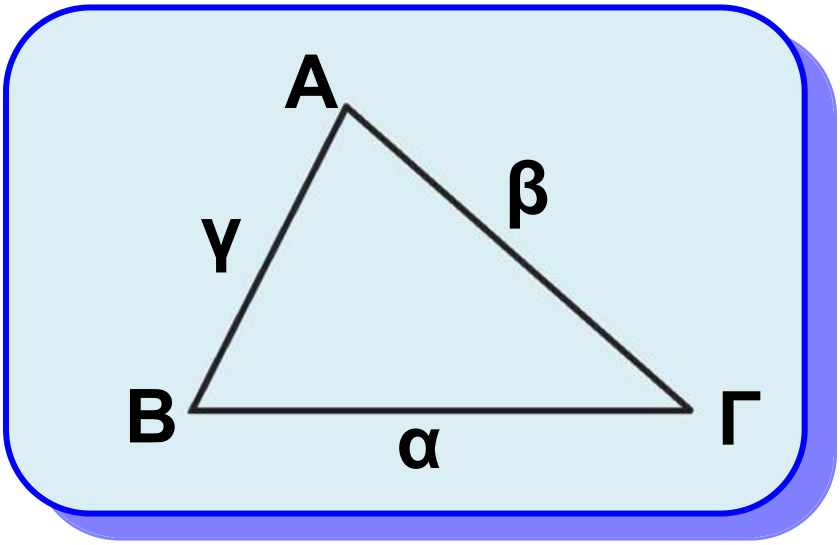
κάθετος και η διχοτόμος εξετάζονται και ως βασικοί γεωμετρικοί τόποι. Στη συνέχεια αναφέρουμε συνοπτικά την έννοια της συμμετρίας ως προς κέντρο και άξονα και μελετάμε ανισοτικές σχέσεις στο τρίγωνο και τις εφαρμογές τους στη σύγκριση κάθετων και πλάγιων τμημάτων. Επίσης, παρουσιάζουμε τις σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου, καθώς και τις σχετικές θέσεις δύο κύκλων. Το κεφάλαιο κλείνει με κάποιες βασικές γεωμετρικές κατασκευές.



Ο Θησαυρός των Αθηναίων
στους Δελφούς, 508 π.Χ.
Αναπαράσταση A. Tournaire

3.1 Στοιχεία και είδη τριγώνων

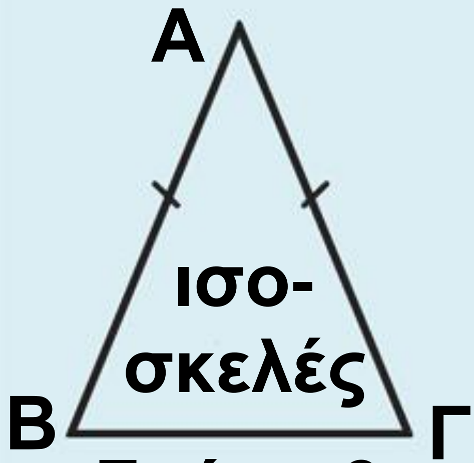
Ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.1) έχει τρεις κορυφές Α, Β, Γ, τρεις πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ και τρεις γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$. Για ευκολία οι πλευρές ΒΓ, ΓΑ, ΑΒ συμβολίζονται με α, β, γ αντίστοιχα, και οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $A\hat{B}\Gamma$ και $B\hat{\Gamma}A$ με Α, Β και Γ. Οι πλευρές και οι γωνίες ενός τριγώνου λέγονται κύρια στοιχεία του τριγώνου. Το άθροισμα α + β + γ των πλευρών του τριγώνου, δηλαδή η περίμετρός του συμβολίζεται συνήθως με 2τ. Συγκρίνοντας τις πλευρές ενός τριγώνου, μεταξύ τους, προκύπτουν τρία είδη τριγώνων: το σκαληνό, το ισοσκελές και το ισόπλευρο. Έτσι, ένα τρίγωνο λέγεται:



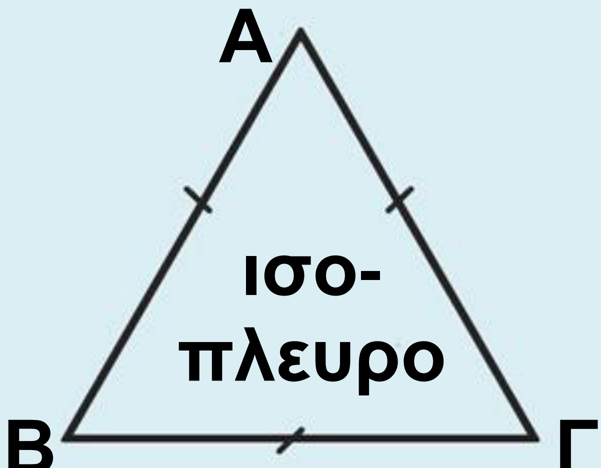
Σχήμα 1

- **σκαληνό,** όταν έχει όλες τις πλευρές του άνισες (σχ.2),
- **ισοσκελές,** όταν έχει δύο πλευρές του ίσες (σχ.3). Σε ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ η πλευρά ΒΓ λέγεται **βάση** του και το Α **κορυφή** του,
- **ισόπλευρο,** όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες (σχ.4).

Σχήμα 2



Σχήμα 3

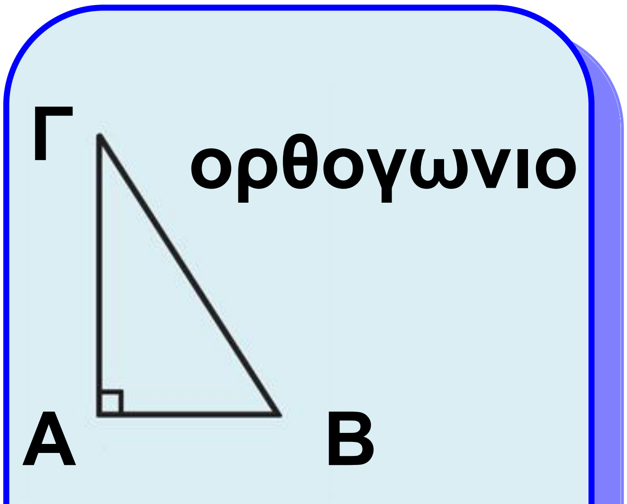


Σχήμα 4

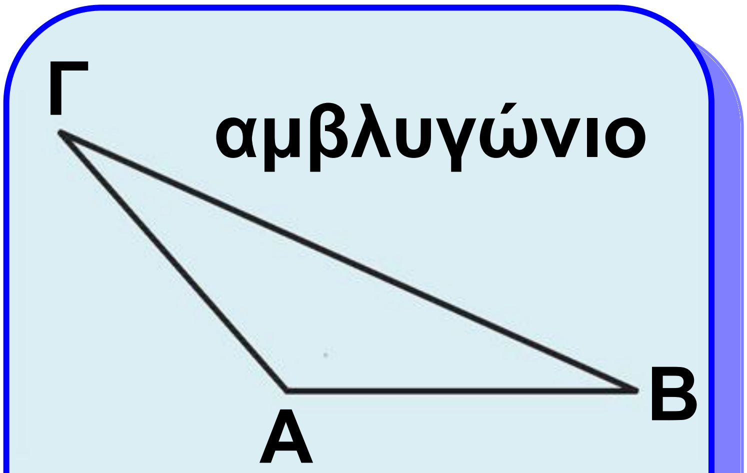
Ένα τρίγωνο, ανάλογα με το είδος των γωνιών του, λέγεται

- **οξυγώνιο,** όταν έχει όλες τις γωνίες του οξείες (σχ.5),
- **ορθογώνιο,** όταν έχει μια γωνία ορθή (σχ.6). Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** και οι άλλες δύο λέγονται **κάθετες πλευρές** του τριγώνου,
- **αμβλυγώνιο,** όταν έχει μια γωνία αμβλεία (σχ.7).

Σχήμα 5



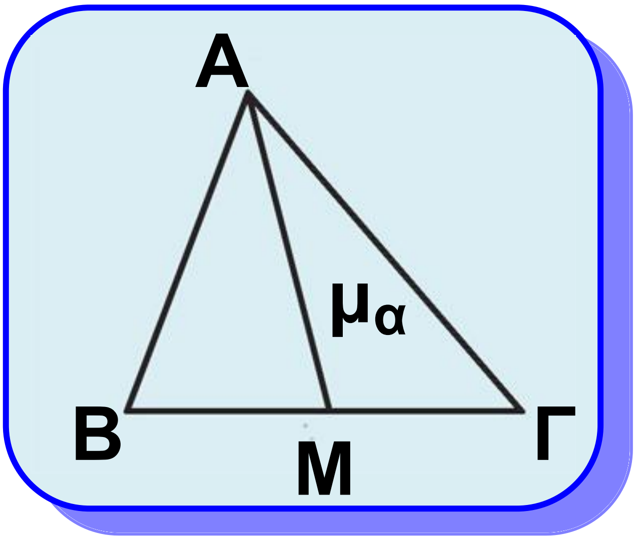
Σχήμα 6



Σχήμα 7

• Δευτερεύοντα στοιχεία τριγώνου

Διάμεσος ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει μια κορυφή με το μέσο της απέναντι πλευράς. Στο σχ.8 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΜ είναι η διάμεσος που αντιστοιχεί στην πλευρά α του τριγώνου ΑΒΓ και συμβολίζεται με $μ_α$. Οι διάμεσοι που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ συμβολίζονται με $μ_β$ και $μ_γ$ αντίστοιχα.

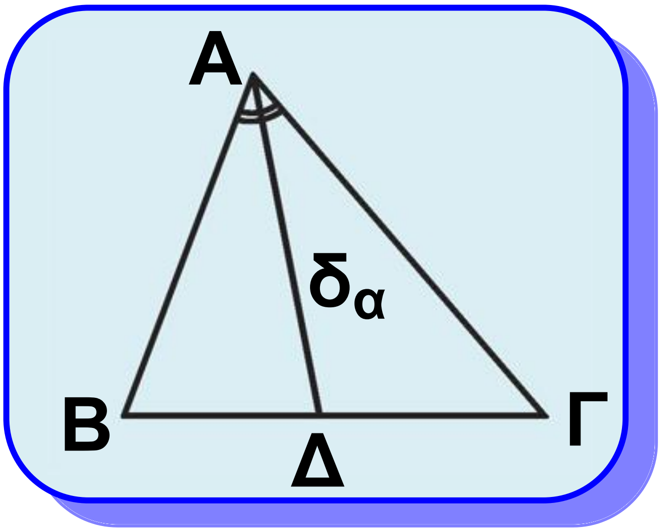


Σχήμα 8

Διχοτόμος μιας γωνίας ενός τριγώνου λέγεται το ευθύγραμμο τμήμα της διχοτόμου της γωνίας, από την κορυφή της μέχρι την απέναντι πλευρά. Στο σχ.9 το ευθύγραμμο τμήμα ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{Α}$ του

τριγώνου και συμβολίζεται με $δ_α$.

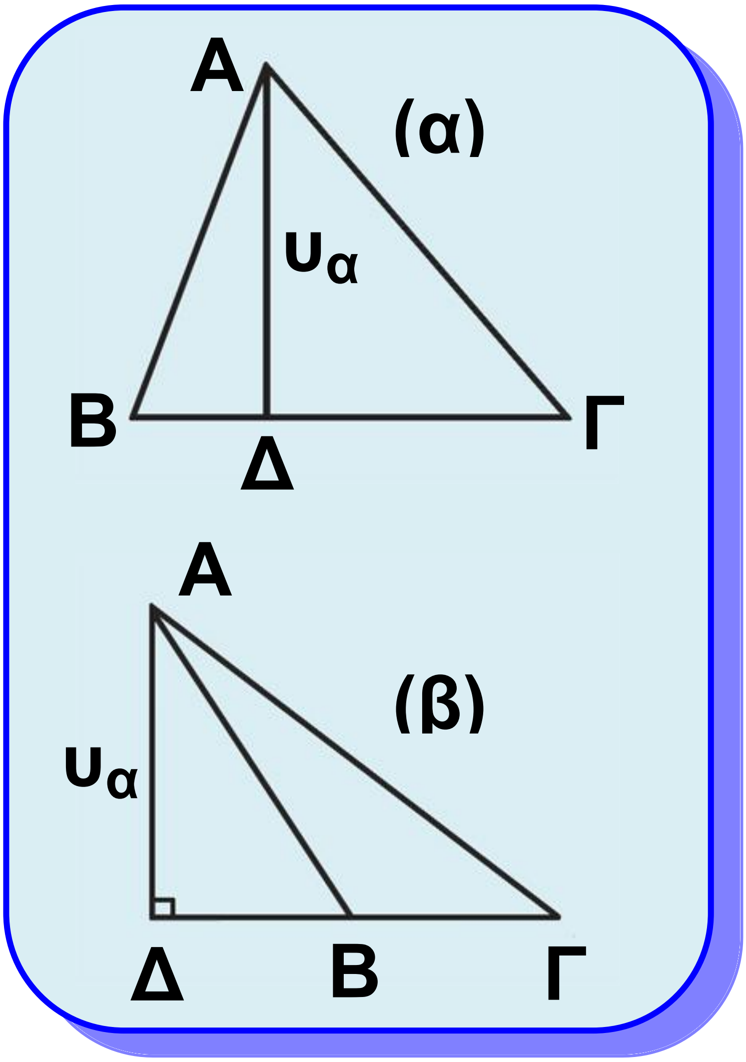
Οι διχοτόμοι των γωνιών $\hat{B}$ και $\hat{Γ}$ του τριγώνου συμβολίζονται με $δ_β$ και $δ_γ$ αντίστοιχα.



Σχήμα 9

Ύψος τριγώνου λέγεται το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα, που φέρεται από μια κορυφή προς την ευθεία της απέναντι πλευράς. Τα ύψη που φέρονται από τις κορυφές Α, Β και Γ συμβολίζονται αντίστοιχα με $υ_α$, $υ_β$ και $υ_γ$.

Στο σχ.10 το ΑΔ είναι το ύψος από την κορυφή Α. Το σημείο Δ λέγεται **προβολή** του Α πάνω στην ευθεία ΒΓ ή και **ίχνος** της καθέτου, που φέρεται από το Α στην ευθεία ΒΓ.
Οι διάμεσοι, οι διχοτόμοι και τα ύψη ενός τριγώνου λέγονται **δευτερεύοντα στοιχεία** του.



Σχήμα 10

Κριτήρια ισότητας τριγώνων

Είδαμε ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα, επομένως και δύο τρί- γωνα, είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Συνεπώς:

- **Δύο ίσα τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους και τις γωνίες τους ίσες μία προς μία.**
- **Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες και αντίστροφα.**

Οι ίσες πλευρές που βρίσκονται απέναντι από ίσες γωνίες λέγονται αντίστοιχες ή ομόλογες.

Στην ενότητα αυτή θα δώσουμε προτάσεις, που θα μας εξασφαλί- ζουν την ισότητα δύο τριγώνων από την ισότητα τριών μόνο κατάλληλων στοιχείων τους.

Οι προτάσεις αυτές αποτελούν τα κριτήρια ισότητας τριγώνων.

3.2 1ο Κριτήριο ισότητας τρίγωνων

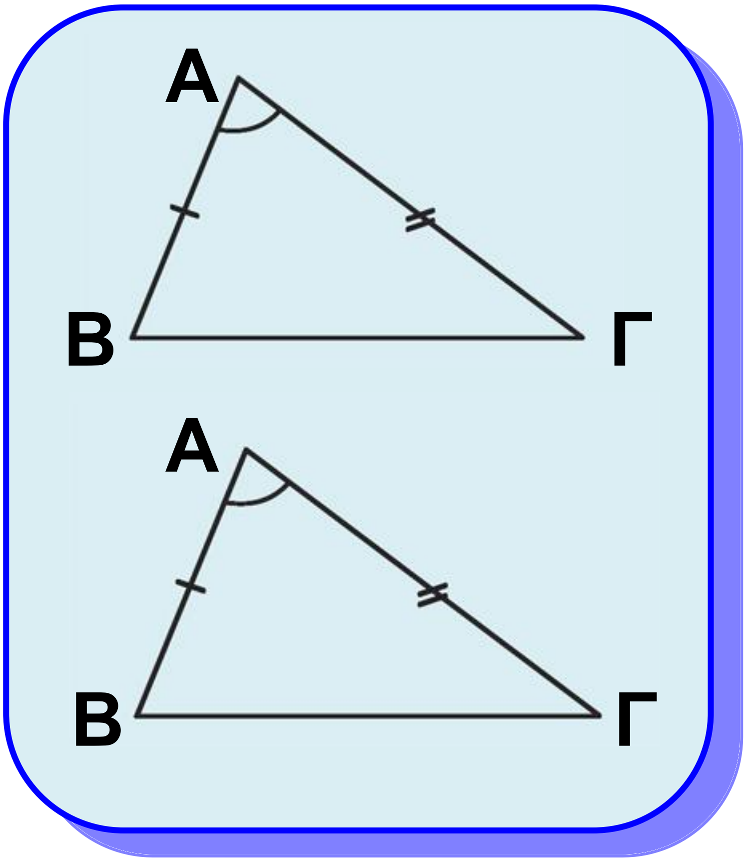
Θεώρημα Ι (1ο Κριτήριο - ΠΓΠ)
Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες, τότε είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΠΓΠ σημαίνει πλευρά, γωνία, πλευρά.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ' και $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.11). Μετατοπίζουμε το τρίγωνο Α'Β'Γ', ώστε το σημείο Α' να ταυτιστεί με το Α και η ημιευθεία Α'Β' να ταυτιστεί με την

ΑΒ. Επειδή $\hat{A} = \hat{A}'$ και η ημιευθεία Α'Γ' θα ταυτισθεί με την ΑΓ. Τότε, αφού ΑΒ = Α'Β' και ΑΓ = Α'Γ', το σημείο Β' ταυτίζεται με το Β και το Γ' με το Γ. Επομένως τα δύο τρίγωνα συμπίπτουν, άρα είναι ίσα.



Σχήμα 11

ΠΟΡΙΣΜΑ Ι

Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο:

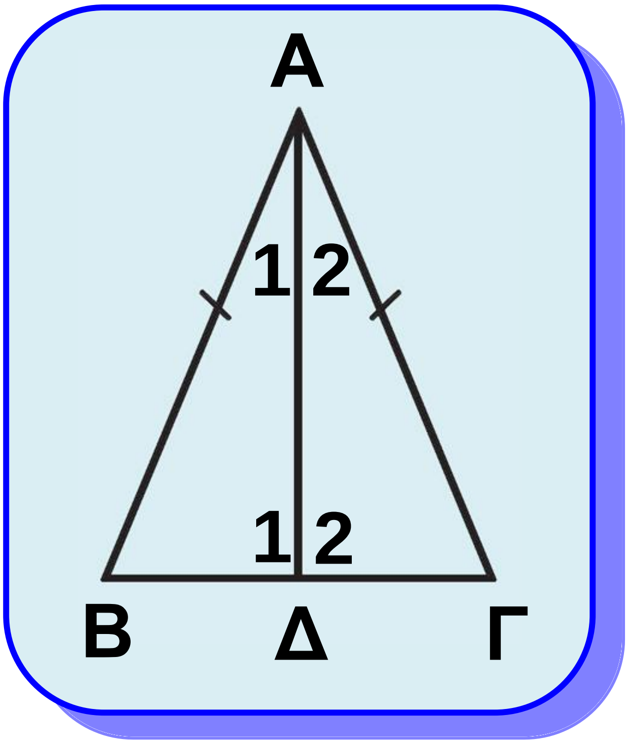
• Οι προσκείμενες στη βάση γωνίες είναι ίσες.

• Η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι διάμεσος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ (σχ.12). Φέρουμε τη διχοτόμο του ΑΔ. Τα τρίγωνα ΑΔΒ και ΑΔΓ έχουν ΑΒ = ΑΓ, ΑΔ κοινή και $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.

Από την ίδια ισότητα τριγώνων προκύπτει ότι ΒΔ = ΔΓ, οπότε η ΑΔ είναι διάμεσος και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από την τελευταία ισότητα και επειδή $\hat{\Delta}_1 + \hat{\Delta}_2 = 180^\circ$ προκύπτει ότι $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2 = 90^\circ$, οπότε συμπεραίνουμε ότι το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.



Σχήμα 12

Πόρισμα ΙΙ

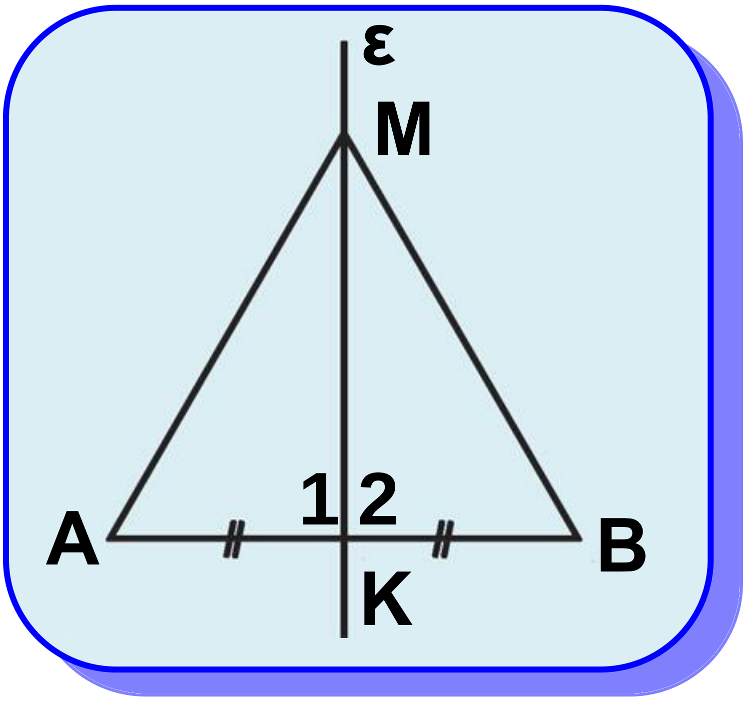
Οι γωνίες ισόπλευρου τριγώνου είναι ίσες.

Πόρισμα ΙΙΙ

Κάθε σημείο της μεσοκαθέτου ενός ευθύγραμμου τμήματος ισαπέχει από τα άκρα του.

Απόδειξη

Έστω ε η μεσοκάθετος ενός τμήματος ΑΒ (σχ.13) και Μ ένα σημείο της. Τα τρίγωνα ΜΚΑ και ΜΚΒ έχουν ΚΑ = ΚΒ, ΜΚ κοινή και $\hat{K}_1 = \hat{K}_2 = 90°$ (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα, οπότε ΜΑ = ΜΒ.



Σχήμα 13

ΠΟΡΙΣΜΑ IV

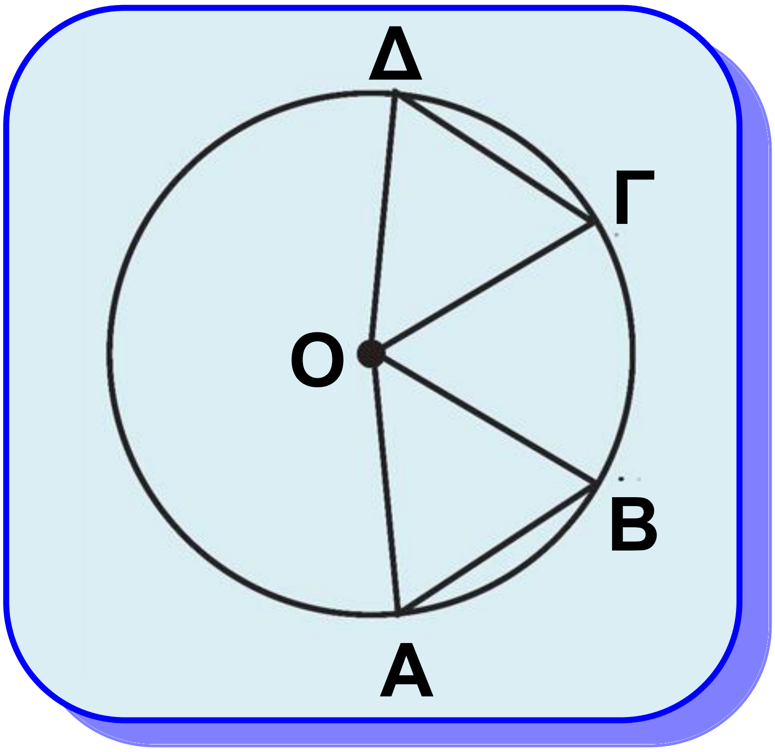
Αν δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, τότε και οι χορδές τους είναι ίσες.

Απόδειξη

Έστω $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{ΓΔ}$ δύο ίσα τόξα ενός κύκλου (Ο,ρ) (σχ.14). Τότε είναι

$A\hat{O}B = Γ\hat{O}Δ$. Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ έχουν ΟΑ = ΟΓ(= ρ), ΟΒ =

= ΟΔ(= ρ) και $A\hat{O}B = Γ\hat{O}Δ$.
Επομένως είναι ίσα, οπότε
ΑΒ = ΓΔ.



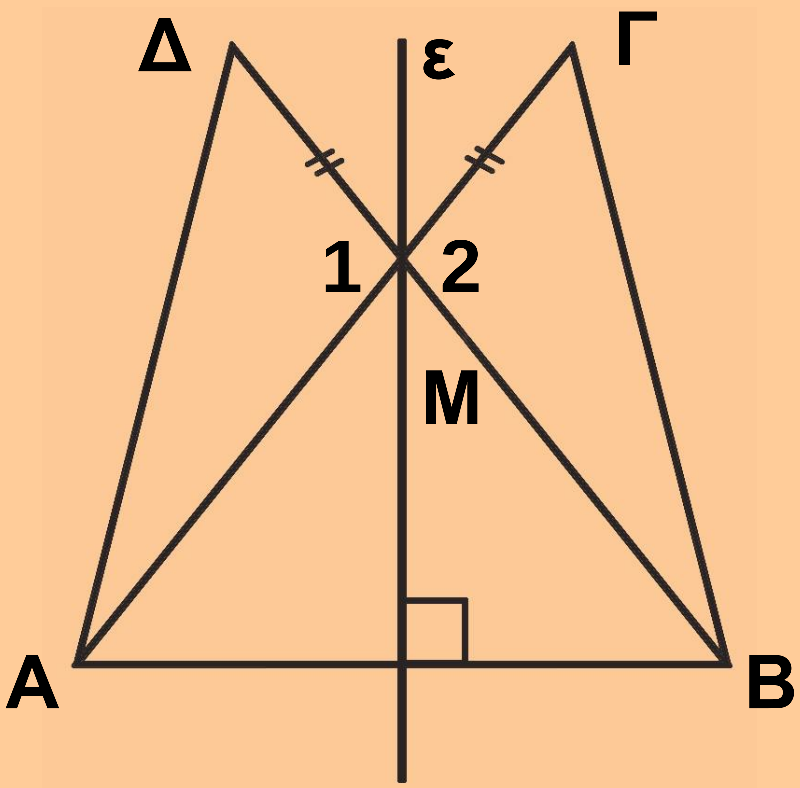
Σχήμα 14

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ, η μεσοκάθετός του ε και σημείο Μ της ε (σχ.15). Στις προεκτάσεις των ΑΜ και ΒΜ προς το Μ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Γ, Δ, ώστε ΜΓ = ΜΔ. Να αποδείξετε ότι:

(i) $M\hat{A}B = M\hat{B}A$,

(ii) ΑΔ = ΒΓ.



Σχήμα 15

Λύση

(i) Επειδή το Μ είναι σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ είναι ΜΑ = ΜΒ, επομένως το τρίγωνο ΜΑΒ είναι ισοσκελές, οπότε $M\hat{A}B = M\hat{B}A$.

(ii)Τα τρίγωνα ΜΑΔ και ΜΒΓ έχουν ΜΑ = ΜΒ, ΜΓ = ΜΔ (υπόθεση) και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ (κατακορυφήν), άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε ΑΔ = ΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Η ισότητα τριγώνων είναι η βασική μέθοδος για την απόδειξη της ισότητας τμημάτων ή γωνιών.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΠΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εξωτερικό ενός τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τμήματα ΑΑ = ΑΒ και ΑΕ = ΑΓ, ώστε ΒΑΑ = ΓΑΑΕ. Να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΑ.

2. Σε ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τις πλευρές ΑΒ, ΒΓ, ΓΑ και στις προεκτάσεις τους θεωρούμε τμήματα ΒΚ = ΓΛ = ΑΜ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΚΛΜ είναι ισόπλευρο.

3. Να αποδείξετε ότι στις ομόλογες πλευρές δύο ίσων τριγώνων αντιστοιχούν ίσες διάμεσοι.

4. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ η

διχοτόμος της $\hat{Α}$ στην οποία θεωρούμε τμήματα ΑΕ = ΑΒ και ΑΖ = ΑΓ. Να αποδείξετε ότι $Α\hat{Γ}Ε = Α\hat{Ζ}Β$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Κ σημείο εξωτερικό του τριγώνου. Αν στις προεκτάσεις των ΑΚ, ΒΚ, ΓΚ

θεωρήσουμε τμήματα ΚΛ = ΑΚ, ΚΕ = ΒΚ, ΚΖ = ΓΚ, να αποδείξετε ότι $\mathrm{E}\hat{\Delta}\mathrm{Z} = \mathrm{B}\hat{\mathrm{A}}\Gamma$.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών του ΒΑ, ΓΑ θεωρούμε ίσα τμήματα ΑΔ, ΑΕ αντίστοιχα. Αν Μ το μέσο της βάσης ΒΓ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΜΔΕ είναι ισοσκελές.

3. Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και χορδή του ΑΒ. Προεκτείνουμε την ΑΒ και προς τα δύο της άκρα, κατά ίσα τμήματα ΑΓ και ΒΔ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $\mathrm{O}\hat{\Gamma}\mathrm{A} = \mathrm{O}\hat{\mathrm{A}}\mathrm{B}$.

3.3 2ο Κριτήριο ισότητας τρίγωνων

Με τη βοήθεια του 1ου κριτηρίου αποδεικνύουμε το 2ο και 3ο κριτήριο ισότητας τριγώνων.

Θεώρημα (2ο Κριτήριο - ΓΠΓ)
Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΓΠΓ σημαίνει γωνία, πλευρά, γωνία.

Απόδειξη

Έστω ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' (σχ.16) έχουν ΒΓ = Β'Γ', $\hat{B} = \hat{B}'$ και $\hat{Γ} = \hat{Γ}'$.

Θα αποδείξουμε ότι έχουν και
AB = A'B'. Έστω ότι AB ≠ A'B', π.χ. AB > A'B'. Τότε υπάρχει σημείο Δ στην AB, ώστε να είναι BΔ = B'A'. Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν

ΒΓ = Β'Γ', ΒΔ = Β'Α' και $\hat{B} = \hat{B}'$, επομένως (ΠΓΠ) είναι ίσα, οπότε

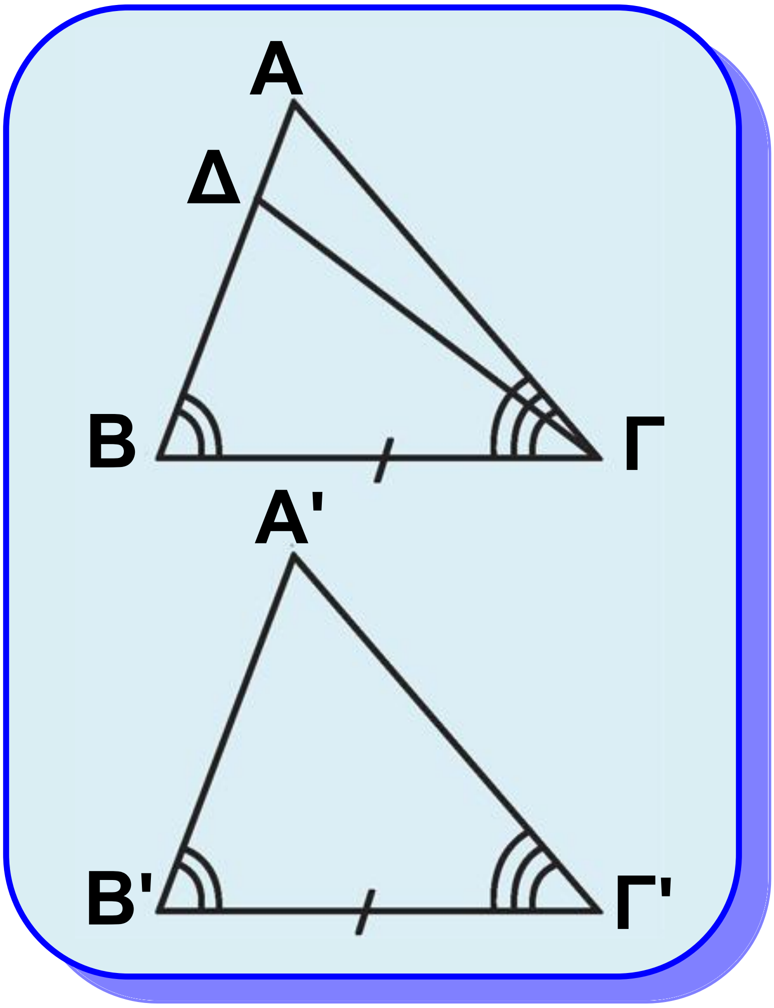
$\widehat{B\Gamma\Delta} = \hat{\Gamma}$. Αλλά $\hat{\Gamma}' = \hat{\Gamma}$, οπότε $\widehat{B\Gamma\Delta} = \hat{\Gamma}$ που είναι άτοπο, γιατί το Δ είναι

εσωτερικό σημείο της γωνίας $\widehat{A\Gamma B}$

και επομένως $\widehat{B\Gamma\Delta} < \hat{\Gamma}$. Οδηγηθή-καμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι AB ≠ A'B', άρα AB = A'B'. Τα τρίγωνα, λοιπόν, ΑΒΓ και Α'Β'Γ έχουν ΒΓ = Β'Γ', AB = A'B' και

$\hat{B} = \hat{B}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.
* Σημείωση: Το παραπάνω θεώρημα μπορεί να αποδειχθεί και

με τη μέθοδο της μετατόπισης, όπως το θεώρημα Ι (σελ. 19).



Σχήμα 16

3.4 3ο Κριτήριο ισότητας τριγώνων

Η ισότητα δύο τριγώνων εξασφαλίζεται και από την ισότητα των τριών πλευρών τους, μία προς μία, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα (3ο Κριτήριο - ΠΠΠ)
Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

ΣΧΟΛΙΟ
Η συντομογραφία ΠΠΠ σημαίνει πλευρά, πλευρά, πλευρά.

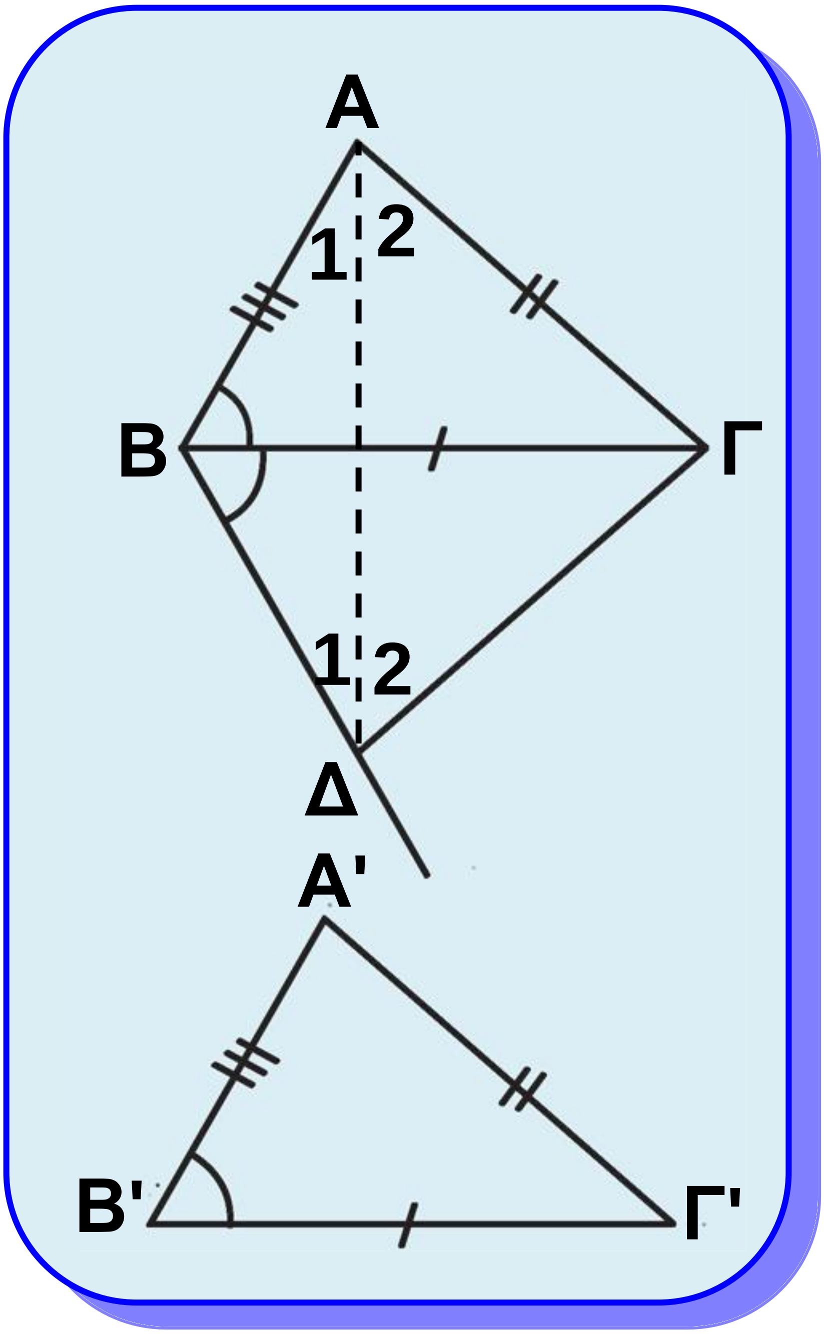
Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με ΑΒ = Α'Β', ΒΓ = Β'Γ', ΓΑ = Γ'Α' (σχ.17). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$. Υποθέτουμε ότι τα τρίγωνα είναι οξυγώνια. Θεωρούμε την ημιευθεία Βx, ώστε $\widehat{\Gamma B x} = \hat{B}'$ (σχ.17) και σημείο της Δ, ώστε ΒΔ = Α'Β'. Τα τρίγωνα ΔΒΓ

και Α'Β'Γ' είναι ίσα, γιατί έχουν

ΒΓ = Β'Γ', ΒΔ = Α'Β' και $\widehat{\Gamma B \Delta} = \widehat{B'}$.
Από την ισότητα αυτή προκύπτει

ότι ΓΔ = Γ'Α' και $\widehat{\Delta} = \widehat{A'}$.



Σχήμα 17

Επειδή ΒΔ = Α'Β' και Α'Β' = ΑΒ, το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές, οπότε

$$\hat{A}_1 = \hat{\Delta}_1 \quad (1).$$

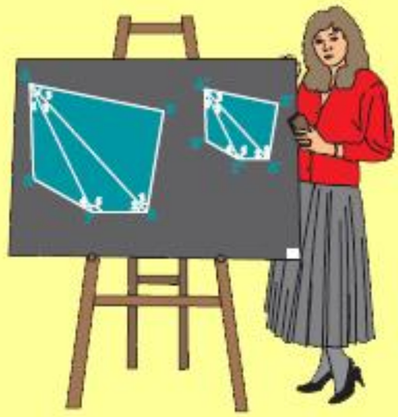
Επίσης, αφού ΓΔ = Α'Γ' και Α'Γ' = ΑΓ, προκύπτει ότι

$$\hat{A}_2 = \hat{\Delta}_2 \quad (2).$$

Επειδή τα τρίγωνα είναι οξυγώνια το τμήμα ΑΔ βρίσκεται στο εσωτερικό των γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{\Delta}$, οπότε με πρόσθεση των (1) και (2) προκύπτει ότι $\hat{A} = \hat{\Delta}$. Επειδή $\hat{\Delta} = \hat{A}'$, έχουμε Α = Α', που είναι το ζητούμενο.

Δραστηριότητα

Εξετάστε τις άλλες δύο περιπτώσεις της απόδειξης του 3ου Κριτηρίου:



i) $B > 90^\circ$ και $B' > 90^\circ$.

ii) $B = 90^\circ$ και $B' = 90^\circ$.

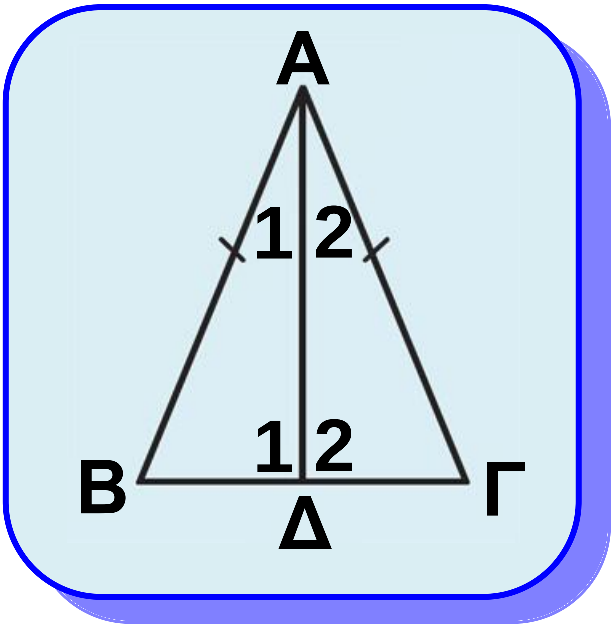
Με τη βοήθεια του κριτηρίου ΠΠΠ αποδεικνύονται τα επόμενα πορίσματα.

Πόρισμα I

Η διάμεσος ισοσκελούς τριγώνου, που αντιστοιχεί στη βάση του, είναι διχοτόμος και ύψος.

Απόδειξη

Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ=ΑΓ και ΑΔ η διάμεσός του (σχ.18). Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΓΔ έχουν ΑΒ=ΑΓ, ΑΔ κοινή και ΒΔ=ΔΓ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα, οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$, και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$. Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αντίστοιχα ότι η ΑΔ είναι διχοτόμος και ύψος.



Σχήμα 18

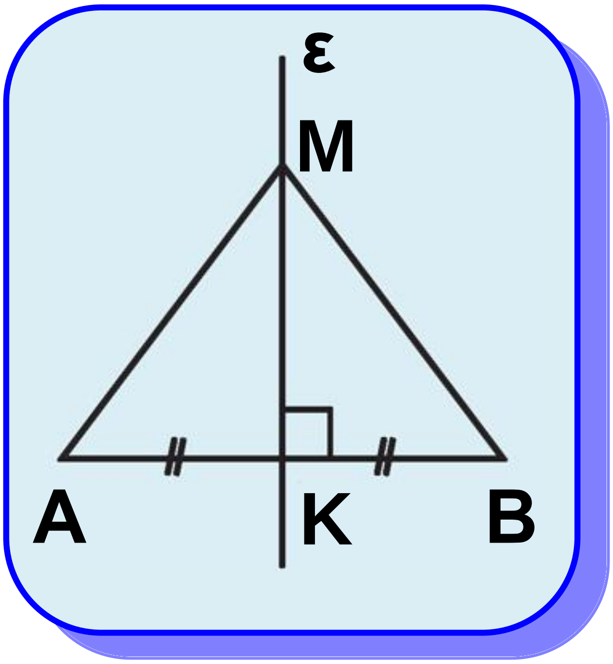
Πόρισμα ΙΙ

Κάθε σημείο που ισαπέχει από τα άκρα ενός τμήματος ανήκει στη μεσοκάθετό του.

Απόδειξη

Έστω ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ (σχ.19), Μ ένα σημείο, ώστε

ΜΑ = ΜΒ και Κ το μέσο του ΑΒ. Τότε το τρίγωνο ΑΜΒ είναι ισοσκελές και η ΜΚ διάμεσός του, οπότε σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα, η ΜΚ θα είναι και ύψος δηλαδή η ΜΚ είναι μεσοκάθετος του ΑΒ.



Σχήμα 19

Από το παραπάνω πόρισμα και το πόρισμα ΙΙΙ του θεωρήματος Ι (§3.2) προκύπτει ότι η μεσοκάθετος ενός ευθύγραμμου τμήματος είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων

του επιπέδου που ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις κορυφές ενός τριγώνου

Πόρισμα III

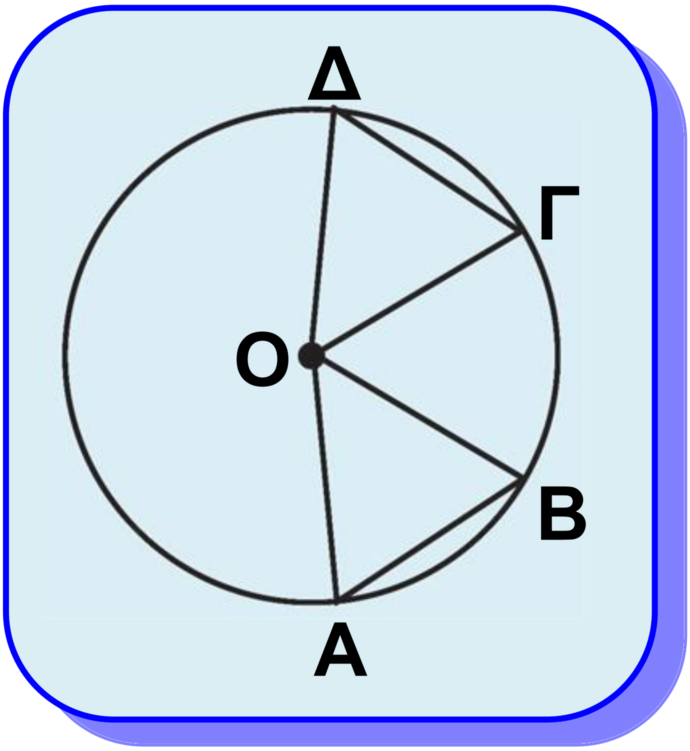
Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου, μικρότερων του ημικυκλίου, είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$ και $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ ενός κύκλου (Ο,ρ) μικρότερα του ημικυκλίου, με ΑΒ = ΓΔ. Τότε τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΓΔ (σχ.20)

έχουν: ΟΑ= ΟΓ (= ρ), ΟΒ = ΟΔ(= ρ) και ΑΒ = ΓΔ, άρα (ΠΠΠ) είναι ίσα.

Επομένως, $\hat{AOB} = \hat{ΓOΔ}$, οπότε $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{ΓΔ}$.



Σχήμα 20

Πόρισμα IV

Αν οι χορδές δύο τόξων ενός κύκλου μεγαλύτερων του ημικυκλίου είναι ίσες, τότε και τα τόξα είναι ίσα.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Από τα πορίσματα ΙΙΙ και IV προκύπτει ότι για να κατασκευάσουμε ίσα τόξα πάνω σε έναν κύκλο ή σε ίσους κύκλους αρκεί να πάρουμε, με το διαβήτη, ίσες χορδές.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Όλες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:

Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν:

- **δύο πλευρές ίσες μία προς μία και τις περιεχόμενες σε αυτές γωνίες ίσες (ΠΓΠ),**
- **μια πλευρά και τις προσκείμενες σε αυτή γωνίες ίσες μία προς μία (ΓΠΓ),**
- **και τις τρεις πλευρές ίσες μία προς μία (ΠΠΠ).**

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

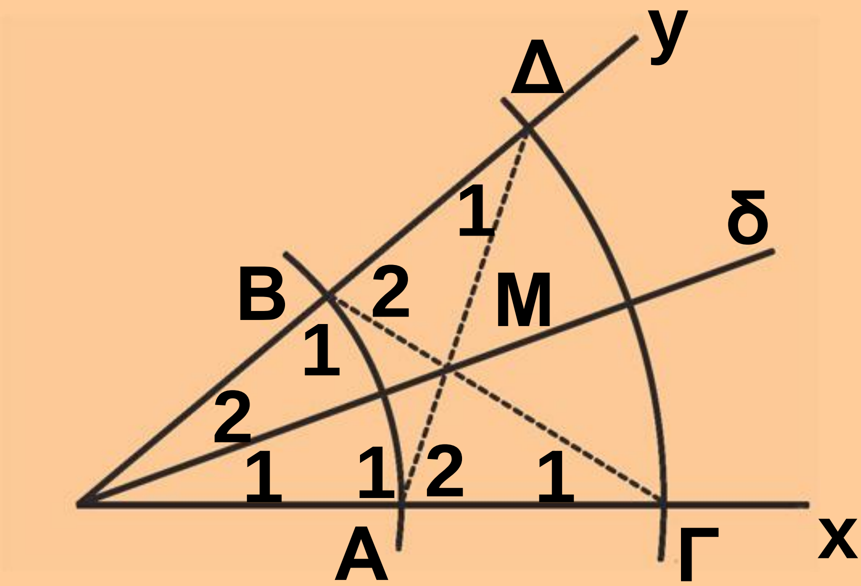
Θεωρούμε γωνία $x\hat{O}y$ και δύο κύκλους (O,ρ), (0,R) με ρ < K (σχ.21). Αν ο πρώτος κύκλος τέμνει τις πλευρές Οχ, Οy στα Α, Β, ο δεύτερος στα Γ, Δ και Μ είναι το σημείο τομής των ΑΔ, ΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(i) τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι ίσα,

(ii) τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ είναι ίσα,

(iii) τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα,

(iv) η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.



Σχήμα 21

Απόδειξη

(i) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουν ΟΑ = ΟΒ (= ρ), ΟΓ = ΟΔ(= R) και $\hat{O}$ κοινή (ΠΓΠ), επομένως είναι ίσα.

(ii) Από την προηγούμενη ισότητα προκύπτει ότι $\hat{A}_1 = \hat{B}_1$ ή $180^\circ - \hat{A}_2 = 180^\circ - \hat{B}_2$ ή $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_\Gamma$

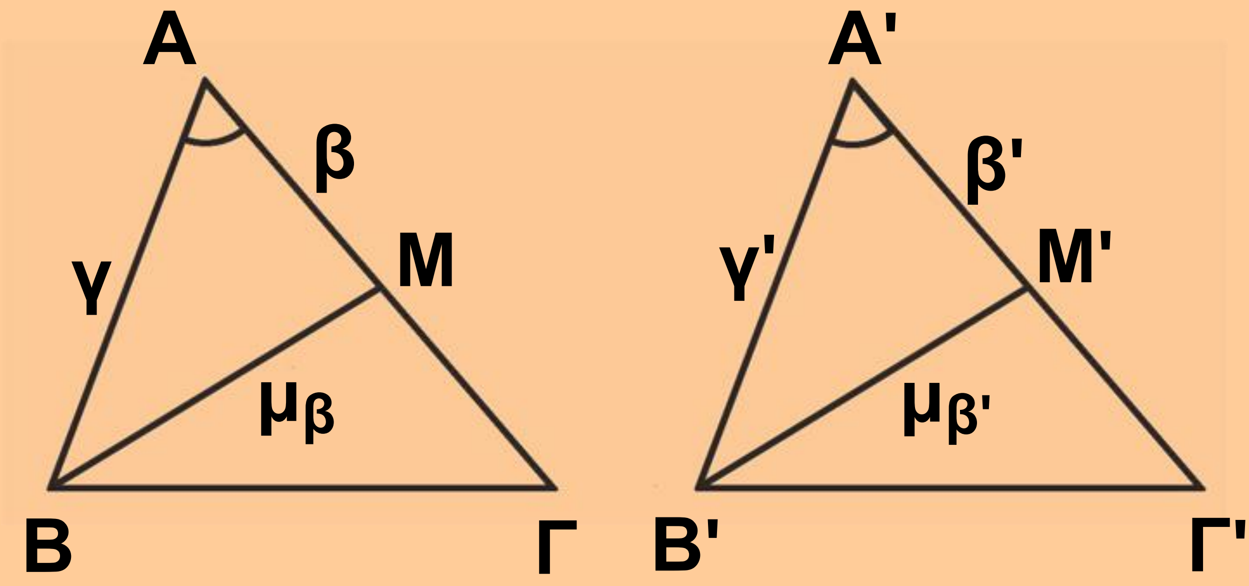
Επομένως, τα τρίγωνα ΜΑΓ και ΜΒΔ έχουν ΑΓ = ΒΔ, $\hat{A}_2 = \hat{B}_2$ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Delta}_1$ (ΓΠΓ), άρα είναι ίσα.

(iii) Από το (ii) προκύπτει ότι ΜΑ=ΜΒ, οπότε τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ έχουν ΟΑ = ΟΒ, ΜΑ = ΜΒ και ΟΜ κοινή (ΠΠΠ), άρα είναι ίσα.
(iv) Επειδή τα τρίγωνα ΟΑΜ και ΟΒΜ είναι ίσα, έχουμε ότι $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, δηλαδή η ΟΜ είναι η διχοτόμος της $x\hat{O}y$.

ΣΧΟΛΙΟ
Η εφαρμογή 1 δίνει έναν τρόπο κατασκευής της διχοτόμου μιας γωνίας.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$ και $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα είναι ίσα.



Σχήμα 22

Απόδειξη

Εξετάζουμε πρώτα τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ' (σχ.22). Αυτά έχουν ΑΒ = Α'Β', ΒΜ = ΒΜ' (από την υπόθεση) και ΑΜ =Α'Μ', ως μισά των ίσων πλευρών ΑΓ και Α'Γ'. Άρα, τα τρίγωνα ΑΒΜ και Α'Β'Μ είναι ίσα (ΠΠΠ), οπότε $\hat{A} = \hat{A}'$. Επομένως, τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', γ = γ' και $\hat{A} = \hat{A}'$, άρα (ΠΓΠ) είναι ίσα.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:**

i) Ένα τρίγωνο είναι οξυγώνιο όταν μία γωνία του είναι οξεία. Σ Λ

ii) Ένα τρίγωνο είναι σκαληνό όταν δύο πλευρές του είναι άνισες. Σ Λ

2. **Διατυπώστε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.**

3. **Συμπληρώστε τα κενά:**

i) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διχοτόμος της γωνίας της κορυφής είναι ……………………………………

ii) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο η διάμεσος που αντιστοιχεί στη βάση του είναι ……………………………………

iii) Ένα σημείο Μ βρίσκεται στη μεσοκάθετο ενός τμήματος ΑΒ, όταν ……………………………………

iv) Δύο τόξα ενός κύκλου είναι ίσα, όταν ……………………………………

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', γ = γ' και Α = Α'. Αν Ι είναι το σημείο τομής των διχοτόμων ΑΔ και ΒΕ του τριγώνου ΑΒΓ και Ι' το σημείο τομής των διχοτόμων Α'Δ' και Β΄Ε' του Α'Β'Γ' να αποδείξετε ότι:**

i) ΑΔ = Α'Δ' και ΒΕ = Β'Ε'

ii) ΑΙ = Α'Ι' και ΒΙ = Β'Ι'.

2. **Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν β = β', $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\delta_\alpha = \delta_{\alpha'}$. Να αποδείξετε ότι:**

i) $\hat{\Gamma} = \hat{\Gamma}'$,

ii) α = α' και γ = γ'.

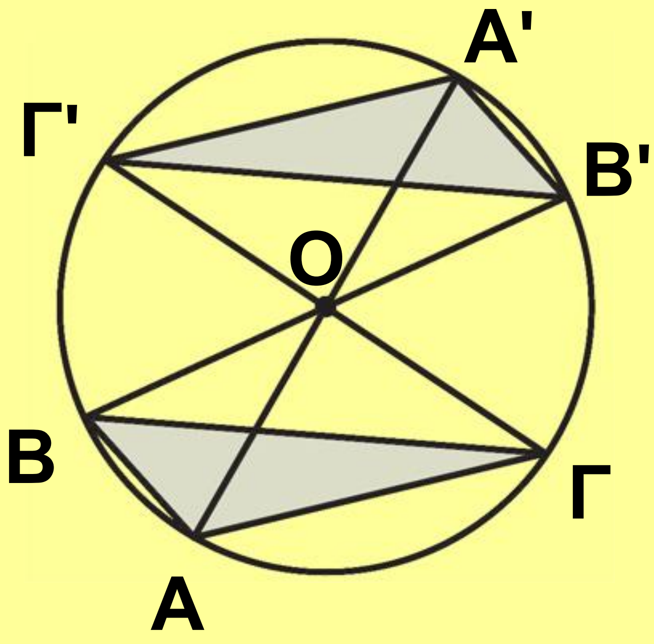
3. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ προεκτείνουμε τη διάμεσο ΑΜ κατά ίσο τμήμα ΜΔ.**

Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΓΔ είναι ίσα.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Να αποδείξετε ότι οι διχοτόμοι των γωνιών της βάσης ισοσκελούς τριγώνου είναι ίσες.**

2. **Αν ΑΑ', ΒΒ' και ΓΓ' είναι τρεις διάμετροι κύκλου (βλ. σχήμα), να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα.**



3. **Σε ένα κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = ΓΔ και $\hat{Β} = \hat{Γ}$. Να αποδείξετε ότι $\hat{Α} = \hat{Δ}$.**

Σύνθετα θέματα

1. **Θεωρούμε δύο ίσα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ'. Η διάμεσος ΑΜ και η διχοτόμος ΒΔ του ΑΒΓ τέμνονται στο Θ, ενώ η αντίστοιχη διάμεσος Α 'Μ' και η αντίστοιχη διχοτόμος Β'Δ' του Α'Β'Γ' τέμνονται στο Θ'. Να αποδείξετε ότι:**

i) ΒΔ = Β 'Δ',

ii) $B\hat{A}M = B'\hat{A}'M'$,

iii) Τα τρίγωνα ΑΒΘ και Α'Β'Θ' είναι ίσα,

iv) ΑΘ = Α'Θ' και ΘΔ = Θ'Δ'.

2. **Δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ έχουν την ίδια μεσοκάθετο ε. Αν η ε και η μεσοκάθετος του ΑΓ τέμνονται, να αποδείξετε ότι από το σημείο τομής τους διέρχεται και η μεσοκάθετος του ΒΔ.**

3. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ). Η μεσοκάθετος της πλευ-**

ράς ΑΓ τέμνει την προέκταση της ΓΒ στο Δ. Προεκτείνουμε τη ΔΑ κατά τμήμα ΑΕ = ΔΒ. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΔΑΓ είναι ισοσκελές,

ii) το τρίγωνο ΓΔΕ είναι επίσης ισοσκελές.

3.5 Ύπαρξη και μοναδικότητα καθέτου

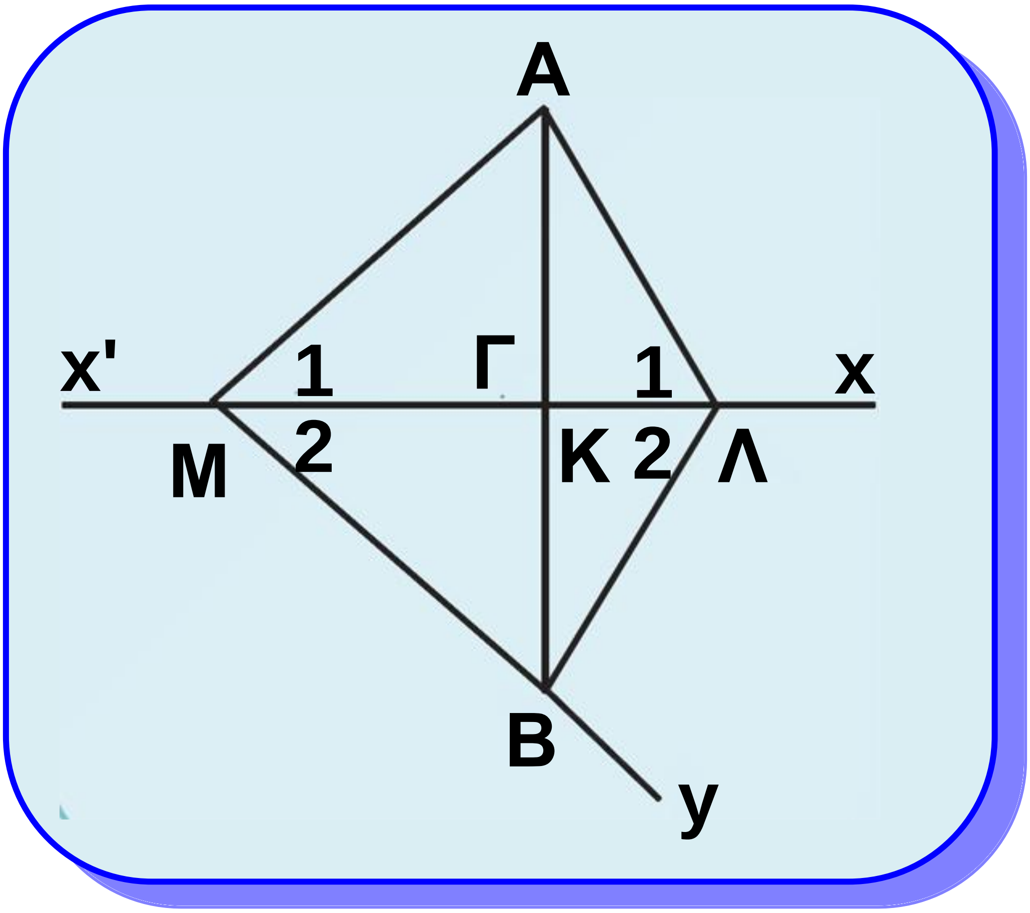
Στο 2ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στην κάθετη που φέρεται από σημείο σε ευθεία. Στην παρούσα παράγραφο θα μελετήσουμε τη μοναδικότητα και την ύπαρξή της.

Θεώρημα

Από σημείο εκτός ευθείας διέρχεται μοναδική κάθετος στην ευθεία.

Απόδειξη

Έστω ευθεία x'x, σημείο Α εκτός αυτής και σημείο Μ της x'x (σχ.23).



Σχήμα 23

Αν η ΑΜ είναι κάθετη στην x'x, τότε το θεώρημα ισχύει ως προς την ύπαρξη της καθέτου. Έστω ότι η ΑΜ δεν είναι κάθετη στην x'x. Στο ημιεπίπεδο που ορίζει η x'x και δεν περιέχει το Α θεωρούμε την ημιευθεία Μy ώστε να είναι

$x\hat{M}y = A\hat{M}x$ και πάνω σε αυτή σημείο Β, ώστε ΜΑ = ΜΒ. Επειδή τα σημεία Α,Β είναι εκατέρωθεν της x'x, η x'x τέμνει την ΑΒ σε ένα εσωτερικό σημείο, έστω Κ. Αφού ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, η ΜΚ είναι διχοτόμος στο ισοσκελές τρίγωνο ΜΑΒ, άρα είναι και ύψος και επομένως ΑΒ⊥x'x.
Έστω ότι υπάρχει και άλλη ευθεία ΑΛ κάθετη στην x'x . Τότε τα τρίγωνα ΑΜΛ και ΒΜΛ είναι ίσα, γιατί έχουν ΜΛ κοινή, ΜΑ = ΜΒ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$, οπότε θα είναι και $\hat{\Lambda}_1 = \hat{\Lambda}_2$.

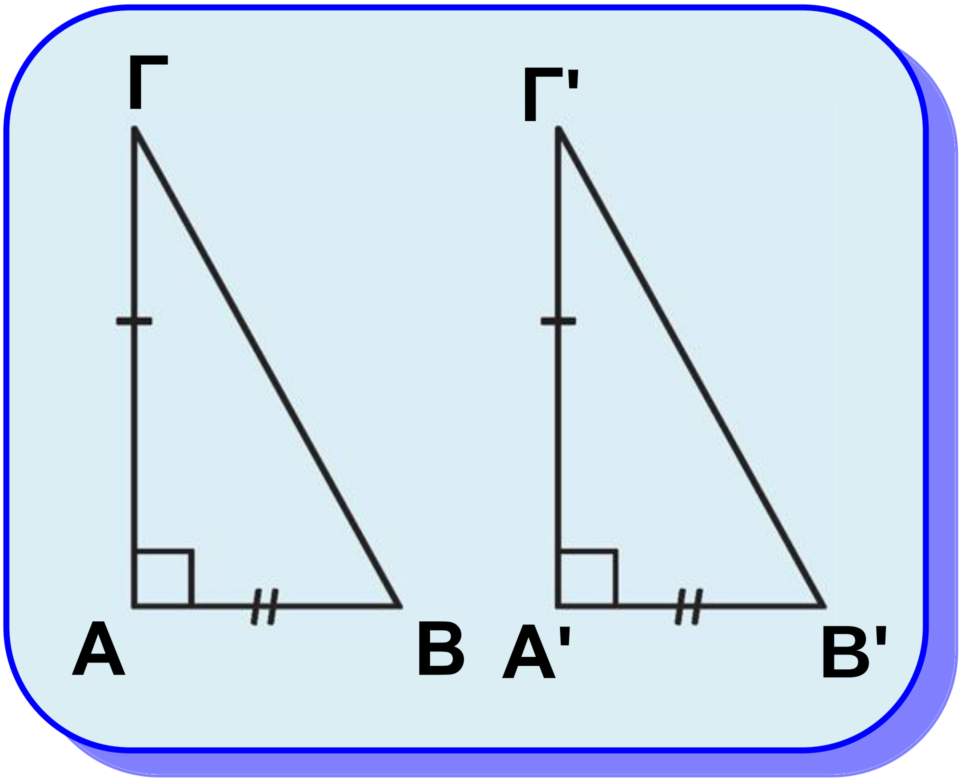
Όμως $\hat{\Lambda}_1 = 90°$, άρα και $\hat{\Lambda}_2 = 90°$,

οπότε $\hat{\Lambda}_1 + \hat{\Lambda}_2 = 180°$ το οποίο σημαίνει ότι τα σημεία Α,Λ,Β είναι συνευθειακά, δηλαδή η ΑΛ ταυτίζεται με την ΑΚ, που είναι άτοπο.

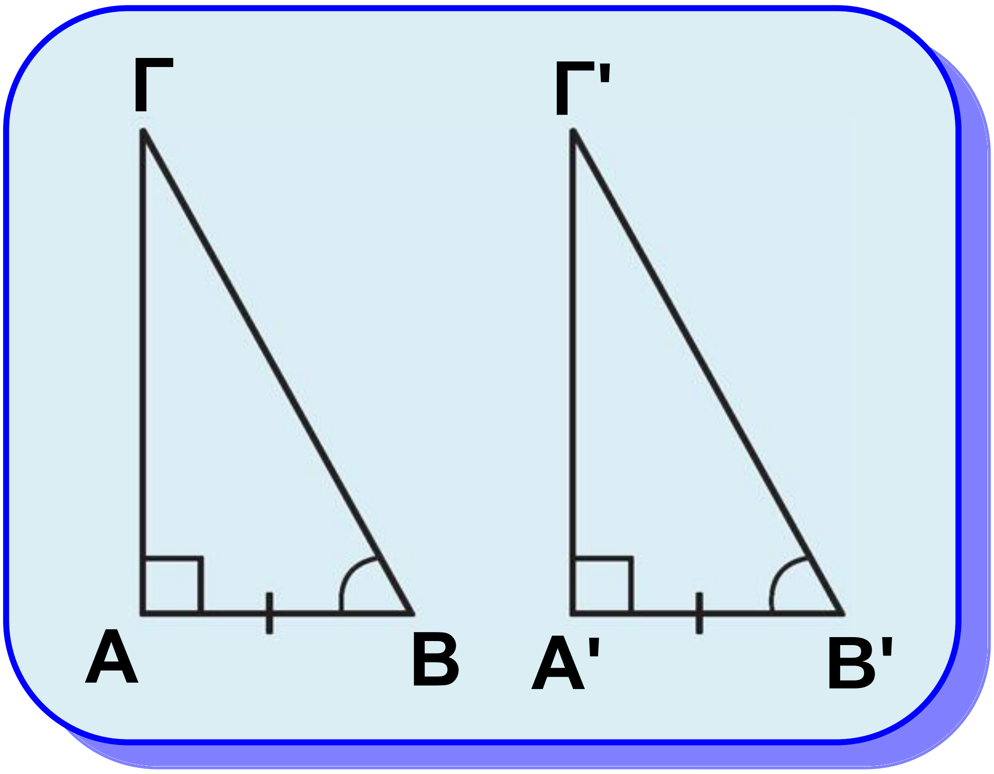
3.6 Κριτήρια ισότητας ορθογώνιων τριγώνων

Επειδή δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μια γωνία ίση, την ορθή, από το 1ο (ΠΓΠ) και 2ο (ΓΠΓ) κριτήριο ισότητας τυχαίων τριγώνων προκύπτει άμεσα ότι:

- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν τις κάθετες πλευρές τους ίσες μία προς μία, είναι ίσα. (σχ.24).**
- **Δύο ορθογώνια τρίγωνα, που έχουν μια κάθετη πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία ίσες μία προς μία, είναι ίσα (σχ.25).**



Σχήμα 24



Σχήμα 25

Η ισότητα ορθογώνιων τριγώνων εξασφαλίζεται ακόμη και από τα επόμενα θεωρήματα.

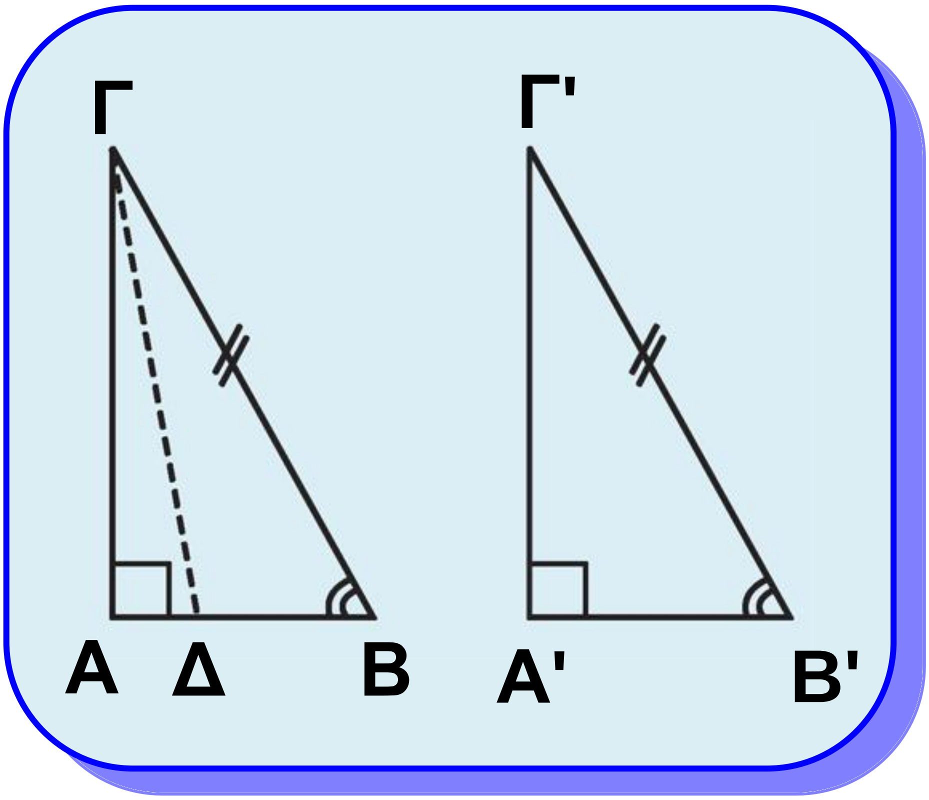
Θεώρημα Ι

Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με $\hat{Α} = \hat{Α}' = 90°$, ΒΓ = Β'Γ' και $\hat{Β} = \hat{Β}'$ (σχ.26). Θα αποδείξουμε ότι είναι και ΑΒ = Α'Β'. Έστω ότι ΑΒ ≠ Α'Β' , π.χ. ΑΒ > Α'Β'. Τότε στην πλευρά ΒΑ υπάρχει σημείο Δ, ώστε ΒΔ = Α'Β'.

Τα τρίγωνα ΔΒΓ και Α'Β'Γ' έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΔΒ = Α'Β' και $\hat{Β} = \hat{Β}'$, επομένως είναι ίσα, οπότε θα είναι



Σχήμα 26

Δ = Α' = 90°, δηλαδή ΓΔ ⊥ ΑΒ. Έτσι έχουμε ΓΑ ⊥ ΑΒ και ΓΔ ⊥ ΑΒ που είναι άτοπο (μοναδικότητα καθέτου). Οδηγηθήκαμε σε άτοπο γιατί υποθέσαμε ότι ΑΒ ≠ Α'Β'. Άρα ΑΒ = Α'Β', οπότε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ίσα, γιατί έχουν ΒΓ = Β'Γ', ΒΑ = Β'Α' και Β = Β' (ΠΓΠ).

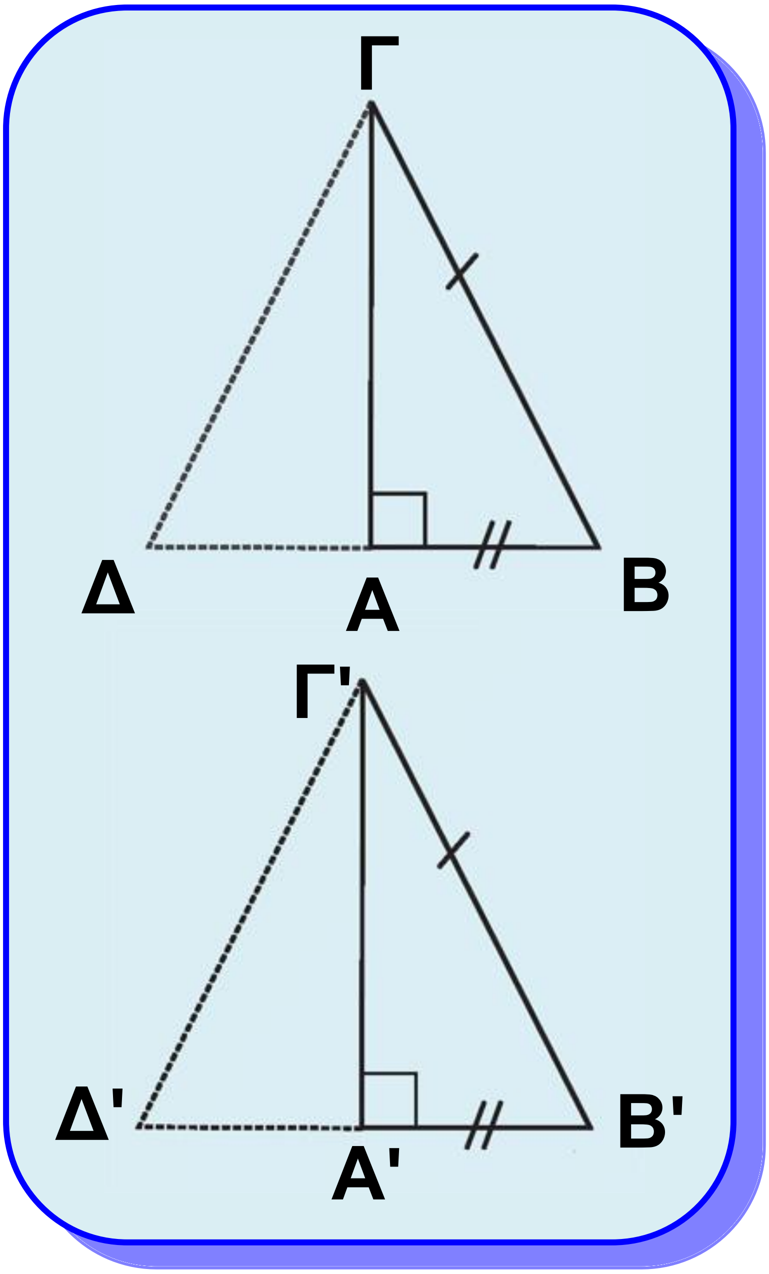
Θεώρημα II

Αν δυο ορθογώνια τρίγωνα έχουν την υποτείνουσα και μία κάθετη πλευρά αντίστοιχα ίσες μία προς μία, τότε είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' (σχ.27) με $\hat{A} = \hat{A}' = 90°$, ΒΓ = Β'Γ' και ΑΒ = Α'Β'. Θα αποδείξουμε ότι και $\hat{B} = \hat{B}'$. Στις προεκτάσεις των ΒΑ και Β'Α' θεωρούμε αντίστοιχα τα σημεία Δ και Δ', ώστε να είναι ΑΔ = ΑΒ και Α'Δ' = Α'Β'. Τότε η ΓΑ είναι μεσοκάθετος του ΔΒ και η Γ'Α' μεσοκάθετος του Δ'Β'. Συμπεραίνουμε, λοιπόν, ότι ΓΔ = ΓΒ και Γ'Δ' = Γ'Β'. Από τις τελευταίες ισότητες και την ΒΓ = Β'Γ' προκύπτει ότι ΓΔ = Γ'Δ'. Έτσι τα τρίγωνα ΓΔΒ και Γ'Δ'Β'

έχουν ΓΔ = Γ'Δ', ΒΓ = Β'Γ' και ΔΒ = Δ'Β' (ως διπλάσια των ίσων τμημάτων ΑΒ και Α'Β'), επομένως είναι ίσα, οπότε $\hat{B} = \hat{B}'$. Τότε και τα αρχικά τρίγωνα είναι ίσα (ΠΓΠ).



Σχήμα 27

Πόρισμα Ι

Το ύψος ισοσκελούς τριγώνου που αντιστοιχεί στη βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος της γωνίας της κορυφής.

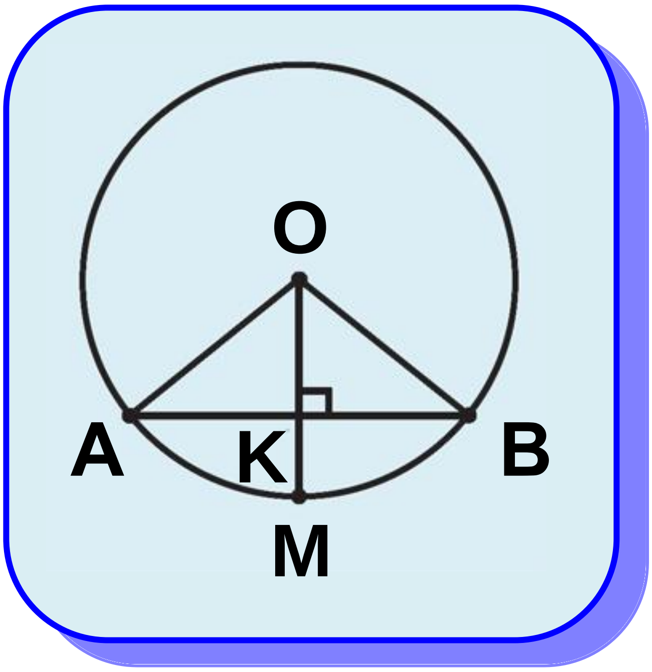
Πόρισμα ΙΙ

Η κάθετος που φέρεται από το κέντρο ενός κύκλου προς μια χορδή του διχοτομεί τη χορδή και το αντίστοιχο τόξο της.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (Ο, ρ), μια χορδή του ΑΒ και την κάθετη ΟΚ της ΑΒ, που τέμνει τον κύκλο στο σημείο Μ (σχ.28). Επειδή το τμήμα ΟΚ είναι ύψος στο ισοσκελές τρίγωνο ΟΑΒ (ΟΑ= ΟΒ = ρ), σύμφωνα με το προηγούμενο πόρισμα είναι διάμεσος και διχοτόμος, δηλαδή το Κ είναι μέσο

του AB και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Αφού $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ προκύπτει ότι $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$.



Σχήμα 28

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ολες οι παραπάνω περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων διατυπώνονται συνοπτικά ως εξής:.

Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν:

- **Δύο ομόλογες πλευρές τους ίσες μία προς μία.**

- **Μία πλευρά και την προσκείμενη σε αυτή οξεία γωνία αντίστοιχα ίσες μία προς μία.**

Θεώρημα III

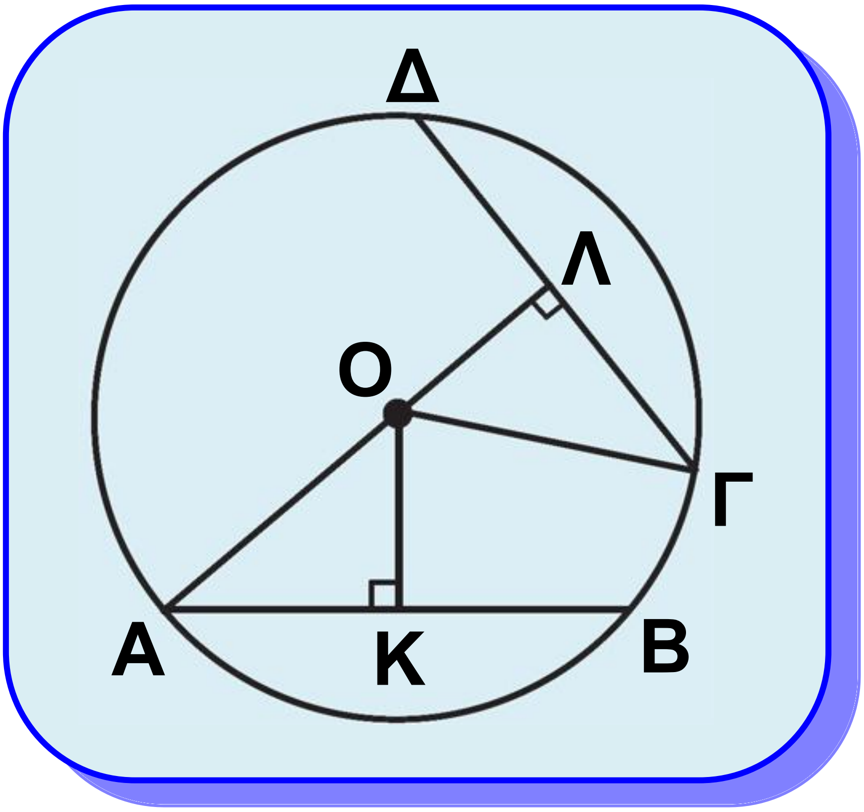
Δύο χορδές ενός κύκλου είναι ίσες αν και μόνο αν τα αποστήματά τους είναι ίσα.

Απόδειξη

Έστω οι ίσες χορδές ΑΒ και ΓΔ ενός κύκλου (Ο,ρ) και ΟΚ, ΟΛ τα αποστήματά τους αντίστοιχα (σχ.29). Τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ, έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ (= ρ) και ΑΚ = ΓΛ (αφού ΑΒ = ΓΔ). Επομένως είναι ίσα, οπότε ΟΚ = ΟΛ.

Αντίστροφα. Έστω ότι τα αποστήματα ΟΚ και ΟΛ είναι ίσα. Τότε τα τρίγωνα ΚΟΑ και ΛΟΓ έχουν $\hat{K} = \hat{\Lambda} = 90°$, ΟΑ = ΟΓ και ΟΚ = ΟΛ, επομένως είναι ίσα, οπότε

$$ΑΚ = ΓΛ \quad ή \quad \frac{ΑΒ}{2} = \frac{ΓΔ}{2} \quad ή \quad ΑΒ = ΓΔ.$$



Σχήμα 29

Θεώρημα IV

Κάθε σημείο της διχοτόμου μιας γωνίας ισαπέχει από τις πλευρές της και αντίστροφα κάθε

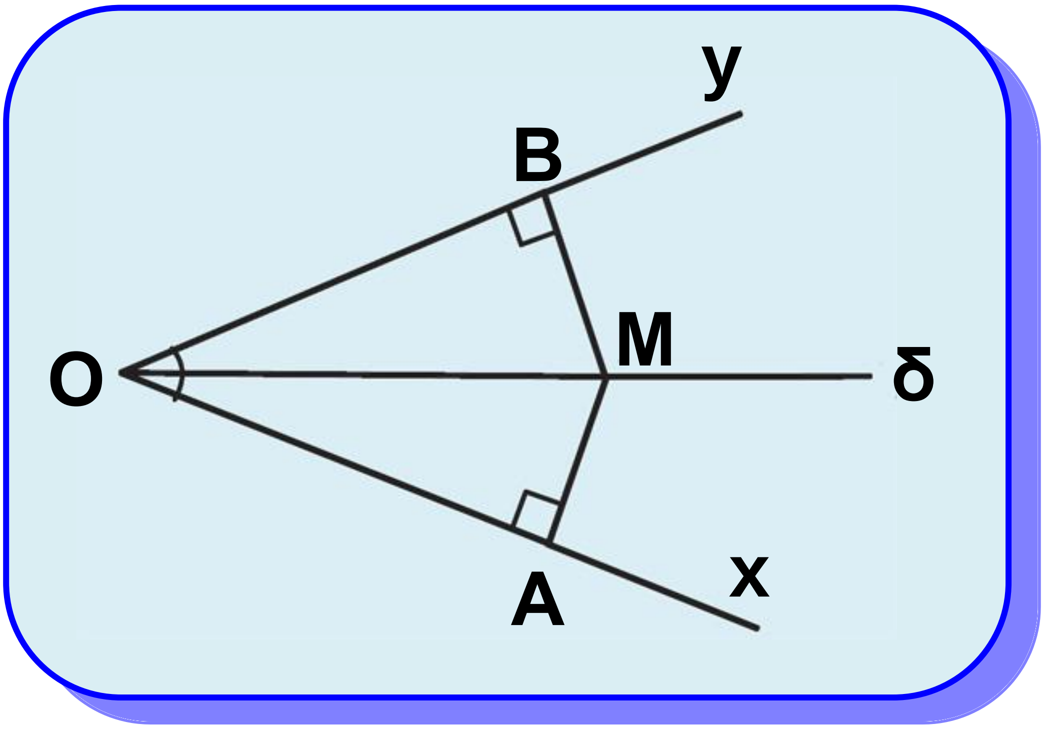
εσωτερικό σημείο της γωνίας που ισαπέχει από τις πλευρές είναι σημείο της διχοτόμου.

Απόδειξη

Έστω μια γωνία $x\hat{O}y$ και Μ ένα σημείο της διχοτόμου της Οδ (σχ.30). Φέρουμε ΜΑ $\perp$ Οx και ΜΒ $\perp$ Οy. Τότε τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, επομένως ΜΑ = ΜΒ .

Αντίστροφα. **Έστω Μ ένα εσωτερικό σημείο της γωνίας. Φέρουμε ΜΑ$\perp$Οx και ΜΒ$\perp$Οy και υποθέτουμε ότι ΜΑ = ΜΒ. Τότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και ΒΟΜ είναι πάλι ίσα, αφού $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, ΟΜ κοινή και**

ΜΑ = ΜΒ και επομένως $M\hat{O}A = M\hat{O}B$, οπότε το Μ είναι σημείο της διχοτόμου Οδ.



Σχήμα 30

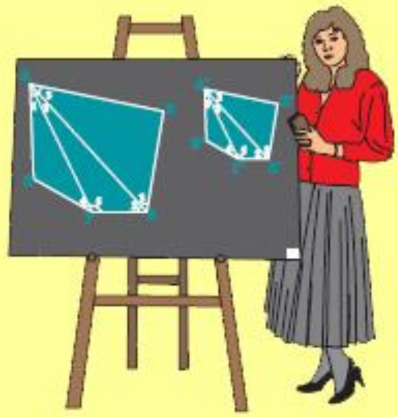
Από το παραπάνω θεώρημα συμπεραίνουμε ότι:

Η διχοτόμος μιας γωνίας είναι ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν από τις πλευρές της.

Με τη βοήθεια του συμπεράσματος αυτού αντιμετωπίζεται η επόμενη δραστηριότητα.

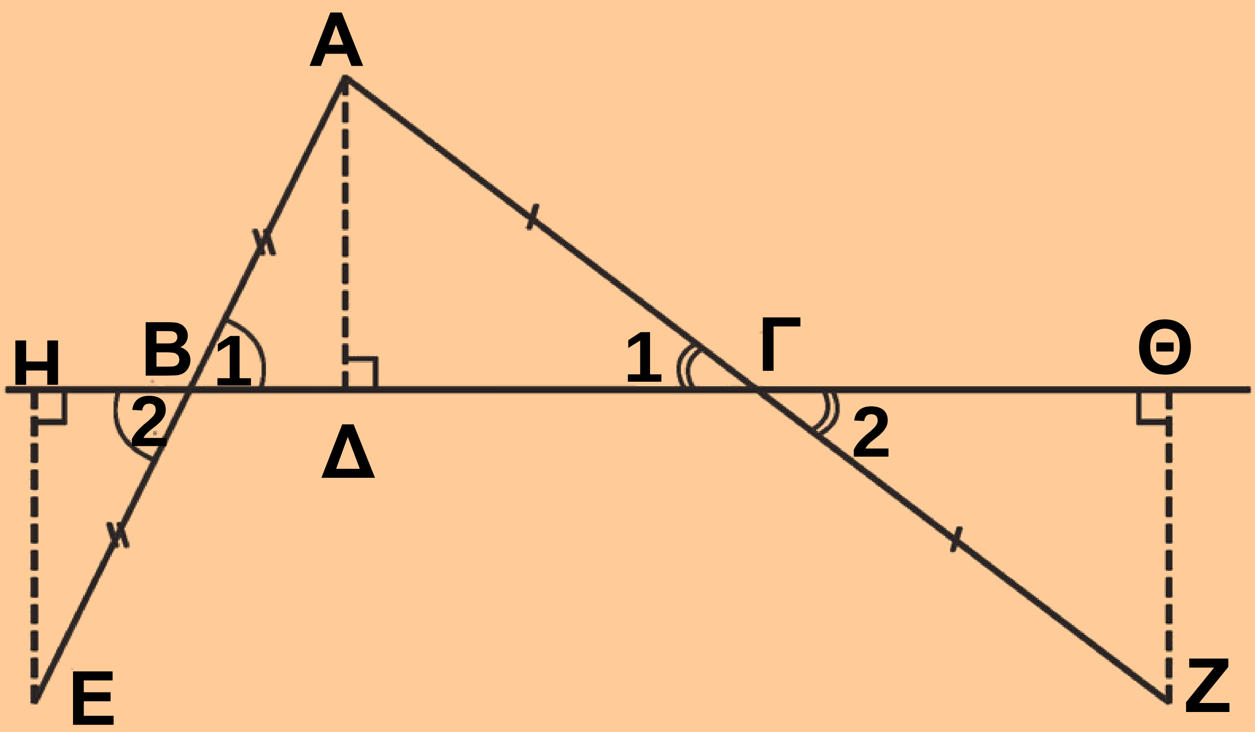
Δραστηριότητα

Να βρεθεί σημείο που ισαπέχει από τις πλευρές ενός τριγώνου



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της πλευράς ΑΒ (σχ.31) παίρνουμε σημείο Ε, ώστε ΒΕ=ΑΒ και στην προέκταση της ΑΓ παίρνουμε σημείο Ζ, ώστε ΓΖ=ΑΓ. Αν ΑΔ το ύψος του τριγώνου και ΕΗ, ΖΘ τα κάθετα τμήματα προς την ευθεία ΒΓ, τότε:
(i) να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ, καθώς και τα ΑΓΔ και ΖΓΘ,
(ii) να αποδειχθεί ότι ΕΗ = ΖΘ.



Σχήμα 31

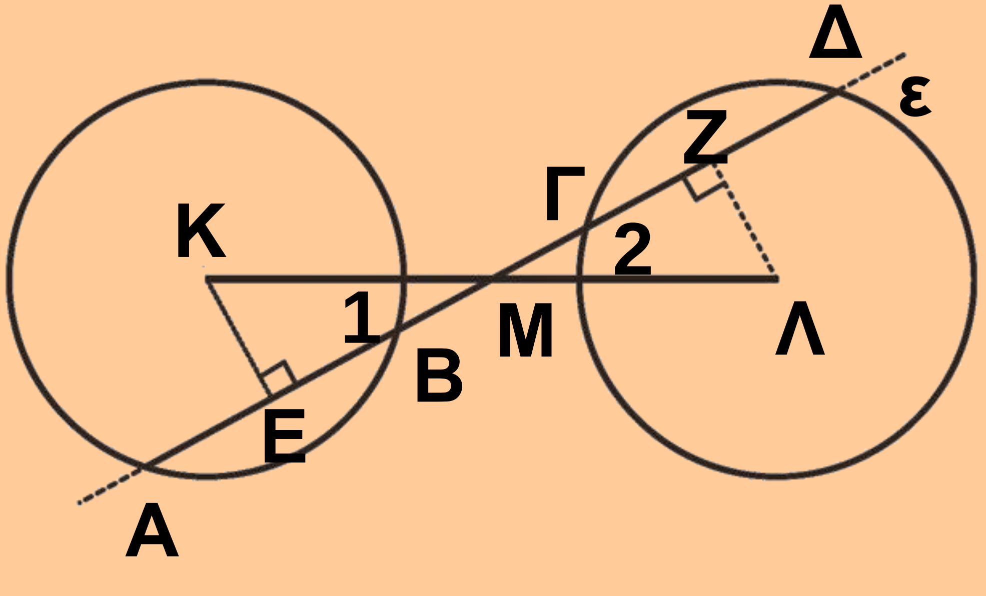
Λύση

(i) Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΕΒΗ είναι ορθογώνια ($\hat{\Delta} = \hat{H} = 90°$) και έχουν ΑΒ = ΒΕ (από υπόθεση) και $\hat{B}_1 = \hat{B}_2$ (κατακορυφήν). Άρα, είναι ίσα.
Όμοια και τα τρίγωνα ΑΓΔ και ΖΓΘ είναι ίσα γιατί έχουν $\hat{\Delta} = \hat{\Theta} = 90°$, ΑΓ = ΓΖ και $\hat{\Gamma}_1 = \hat{\Gamma}_2$.
(ii)Από την ισότητα των τριγώνων

ΑΒΔ και ΕΒΗ προκύπτει ότι ΕΗ = ΑΔ. Όμοια από την άλλη ισότητα των τριγώνων προκύπτει ΖΘ = ΑΔ. Επομένως ΕΗ = ΖΘ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε δύο ίσους κύκλους με κέντρα Κ, Λ και από το μέσο Μ του ΚΛ ευθεία ε που τέμνει τους κύκλους (σχ.32) στα σημεία Α, Β και Γ, Δ αντίστοιχα. Να αποδειχθεί ότι ΑΒ = ΓΔ.



Σχήμα 32

Απόδειξη

Επειδή τα τμήματα ΑΒ και ΓΔ είναι χορδές ίσων κύκλων, για να είναι ΑΒ = ΓΔ αρκεί τα αποστήματά τους ΚΕ και ΛΖ, αντίστοιχα, να είναι ίσα. Τα τρίγωνα ΕΜΚ και ΖΜΛ είναι ορθογώνια ($\hat{E} = \hat{Z} = 90°$) και έχουν ΚΜ = ΜΛ, γιατί το Μ είναι μέσο του ΚΛ και $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ ως κατακορυφήν. Άρα είναι ίσα, οπότε ΚΕ = ΛΖ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Αν ΑΒ ⊥ ε και ΑΓ ⊥ ε (Β, Γ σημεία της ε) τότε:

i)	Β = Γ	Σ	Α
ii)	Β ≠ Γ	Σ	Α
iii)	ΑΒ = ΑΓ	Σ	Α

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ), Δ σημείο της βάσης και οι προτάσεις:**

$π_1$: Το ΑΔ είναι ύψος του τριγώνου.

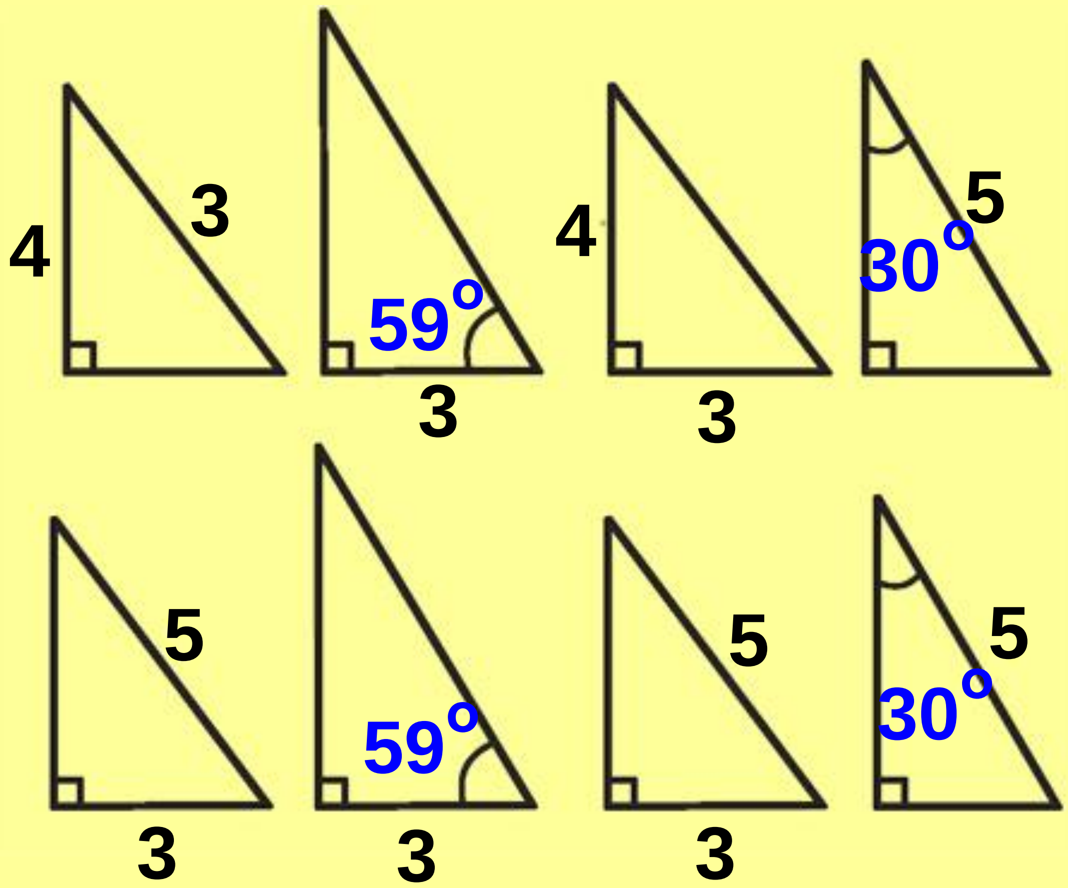
$π_2$: Το ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου.

$π_3$: Το ΑΔ είναι διχοτόμος του τριγώνου.

Αν για το ΑΔ ισχύει μία από τις $π_1$, $π_2$, $π_3$, τότε ισχύουν οι άλλες δύο προτάσεις;

3. **Διατυπώστε τις δύο ανακεφαλαιωτικές περιπτώσεις ισότητας ορθογώνιων τριγώνων.**

4. **Στο παρακάτω σχήμα έχουμε σχεδιάσει οκτώ ορθογώνια τρίγωνα. Καθένα από αυτά είναι ίσο με ένα από τα υπόλοιπα. Να βρείτε τα ζεύγη των ίσων τριγώνων και να αναφέρετε το λόγο για τον οποίο είναι ίσα.**



5. **Συμπληρώστε τα κενά στην επόμενη πρόταση:**

Ο φορέας του αποστήματος μιας χορδής είναι μεσοκάθετος της …………………… και διχοτομεί ………………. ………………………..

6. **Αν ΑΒ, ΓΔ είναι χορδές ενός κύκλου (Κ) και ΚΕ, ΚΖ είναι αντίστοιχα τα αποστήματά τους τότε:**

α. $AB = ΓΔ \Leftrightarrow KE = \frac{1}{2} KZ$,

β. $AB = ΓΔ \Leftrightarrow KE > KZ$,

γ. $AB = ΓΔ \Leftrightarrow KE = KZ$,

δ. $AB = ΓΔ \Leftrightarrow \frac{1}{2} KE = \frac{1}{3} KZ$,

ε. $AB = ΓΔ \Leftrightarrow KE < KZ$.

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

7. Ποια είναι η χαρακτηριστική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου μιας γωνίας;

8. Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν δύο πλευρές ίσες είναι πάντοτε ίσα; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να αποδείξετε ότι τα ύψη ισοσκελούς τριγώνου που

αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές του είναι ίσα.

2. **Να αποδείξετε ότι τα μέσα των ίσων πλευρών ισοσκελούς τριγώνου ισαπέχουν:**

i) από τη βάση,

ii) από τις ίσες πλευρές.

3. **Να αποδείξετε ότι τα άκρα ενός τμήματος ισαπέχουν από κάθε ευθεία που διέρχεται από το μέσο του.**

4. **Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, να αποδείξετε ότι και τα ύψη τους που αντιστοιχούν στις ίσες πλευρές είναι ίσα.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Μ το μέσο της βάσης του ΒΓ. Να αποδείξετε ότι:**

i) το Μ ισαπέχει από τις ίσες πλευρές του τριγώνου,
ii) η ΑΜ είναι διχοτόμος της γωνίας που σχηματίζουν οι αποστάσεις του Μ από τις ίσες πλευρές μεταξύ τους.

2. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α' Β' Γ' είναι α = α', $υ_α = υ_{α'}$ και $μ_α = μ_{α'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

3. Να αποδείξετε ότι αν σε δύο οξυγώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι α = α', $υ_β=υ_{β'}$ και $υ_γ=υ_{γ'}$, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1L$) και η διχοτόμος του ΒΔ. Από το Δ φέρουμε ΔΕ $\perp$ ΒΓ, που τέμνει την ΑΒ στο Ζ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΓΖ είναι ισοσκελές.

5. Δίνεται κύκλος (O, R), οι ίσες χορδές του AB, ΓΔ και τα αποστήματά τους OK και OΛ αντίστοιχα. Αν οι προεκτάσεις των BA και ΔΓ τέμνονται στο M, να αποδείξετε ότι:

i) τα τρίγωνα MOK και MOΛ είναι ίσα,

ii) MA = MΓ και MB = MΔ.

Σύνθετα Θέματα

1. Θεωρούμε τρίγωνο ABΓ. Η διχοτόμος της γωνίας A τέμνει τη μεσοκάθετο της BΓ στο σημείο Δ. Έστω E και Z οι προβολές του Δ στις πλευρές AB και AΓ αντίστοιχα.

i) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα ΔBE και ΔΓZ.

ii) Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα θεωρώντας την εξωτερική διχοτόμο της $\hat{A}$, η οποία τέμνει τη μεσοκάθετο της BΓ στο σημείο Δ', με προβολές τα σημεία Ε', Ζ' στις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα.

iii) Να αποδείξετε ότι ΕΕ' = ΑΓ και ΖΖ' = ΑΒ.

2. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ, Α' Β' Γ' έχουν μία κάθετη πλευρά ίση και η περίμετρος του ενός είναι ίση με την περίμετρο του άλλου, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.

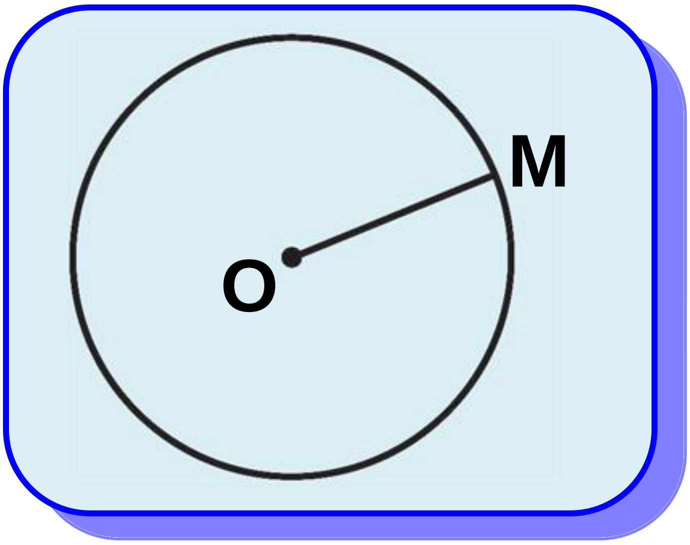
3.7 Κύκλος - Μεσοκάθειος - Διχοτόμος

Όπως έχουμε αναφέρει, γεωμετρικός τόπος λέγεται το σύνολο όλων των σημείων, που έχουν μια (κοινή) χαρακτηριστική ιδιότητα.

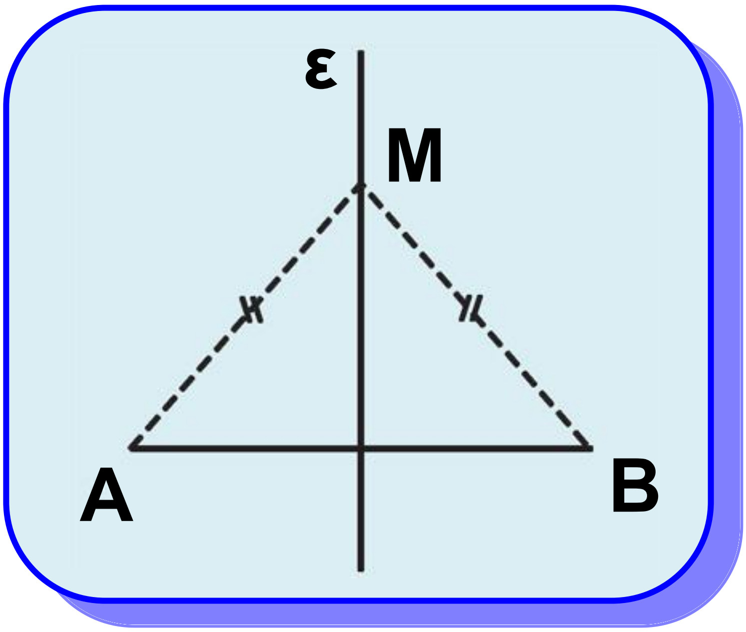
Επομένως:

- ο κύκλος (σχ.33) είναι ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία του και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να απέχουν μια ορισμένη απόσταση από ένα σταθερό σημείο.
- η μεσοκάθετος ενός τμήματος (σχ.34) είναι επίσης ένας γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά έχουν την ιδιότητα να ισαπέχουν από τα άκρα του τμήματος.

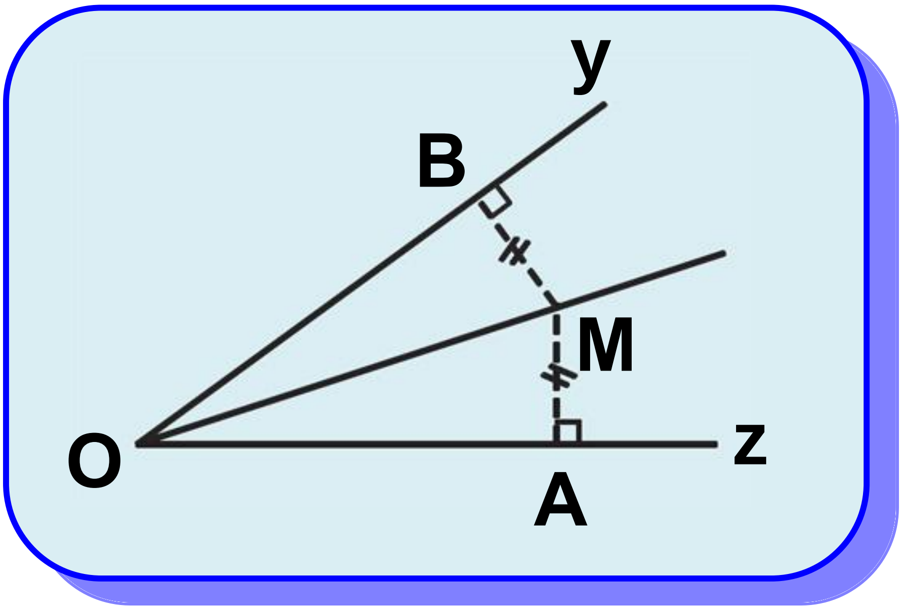
- η διχοτόμος μιας γωνίας (σχ.35) είναι ένας άλλος γεωμετρικός τόπος, αφού όλα τα σημεία της και μόνον αυτά (από τα σημεία της γωνίας) ισαπέχουν από τις πλευρές της γωνίας.



Σχήμα 33



Σχήμα 34



Σχήμα 35

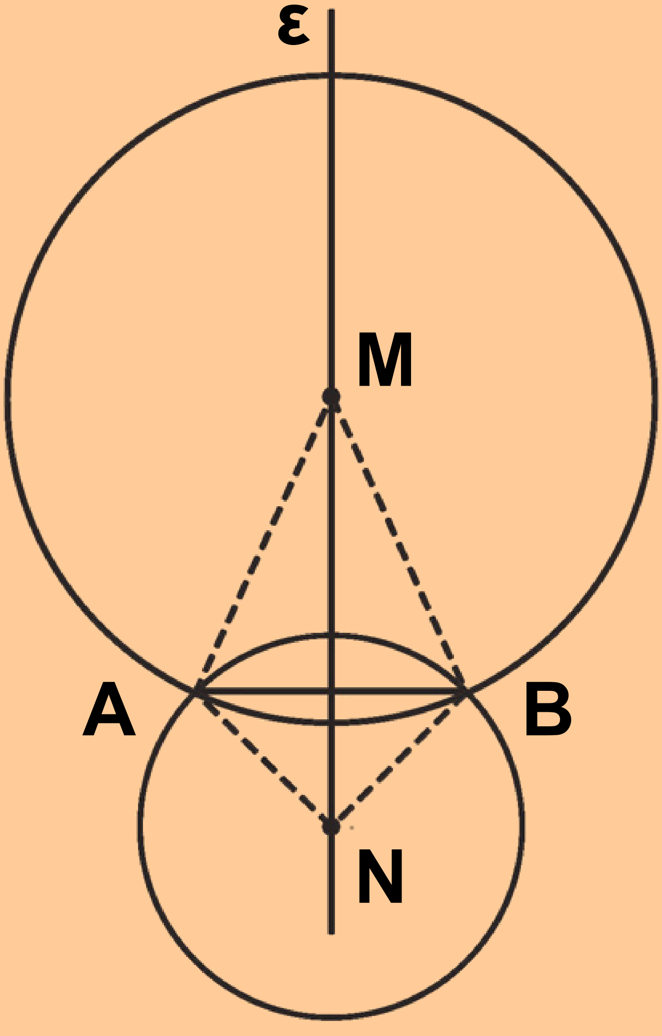
Η αντιμετώπιση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου απαιτεί μια ιδιαίτερη διαδικασία η οποία παρουσιάζεται στο επόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κέντρων των κύκλων, που διέρχονται από δύο σταθερά σημεία Α και Β.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή το κέντρο ενός κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β (σχ.36). Τότε ΜΑ = ΜΒ, ως ακτίνες του ίδιου κύκλου και επομένως το Μ ανήκει στη μεσοκάθετο ε του τμήματος ΑΒ.



Σχήμα 36

Αντίστροφα. Έστω Ν ένα σημείο της μεσοκαθέτου ε του ΑΒ. Τότε θα είναι ΝΑ=ΝΒ, οπότε ο κύκλος (Ν,ΝΑ) διέρχεται και από το Β. Επομένως κάθε σημείο της ε είναι κέντρο κύκλου που διέρχεται από τα Α,Β.
Άρα ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η μεσοκάθετος ε του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο παράδειγμα γίνεται φανερό ότι η λύση ενός προβλήματος γεωμετρικού τόπου ακολουθεί τα εξής στάδια:
Θεωρούμε ένα τυχαίο σημείο Μ του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου και με βάση τη χαρακτη-ριστική ιδιότητα που έχει, προσδιορίζουμε τη γραμμή Γ

πάνω στην οποία βρίσκεται.
Στη συνέχεια κατασκευάζουμε με τον κανόνα και το διαβήτη τη γραμμή αυτή και εξετάζουμε αν το τυχαίο σημείο Ν της γραμμής αυτής ικανοποιεί τη χαρακτηριστική ιδιότητα του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Αν αυτό συμβαίνει, τότε η γραμμή Γ είναι ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Συμπληρώστε τα κενά στις επόμενες προτάσεις.
i) Ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών των ισοσκελών τριγώνων με γνωστή βάση είναι ………………………………

ii) Ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ισαπέχουν δύο τεμνόμενες ευθείες είναι ………… ……………………………………………

Ασκήσεις Εμπέδωσης

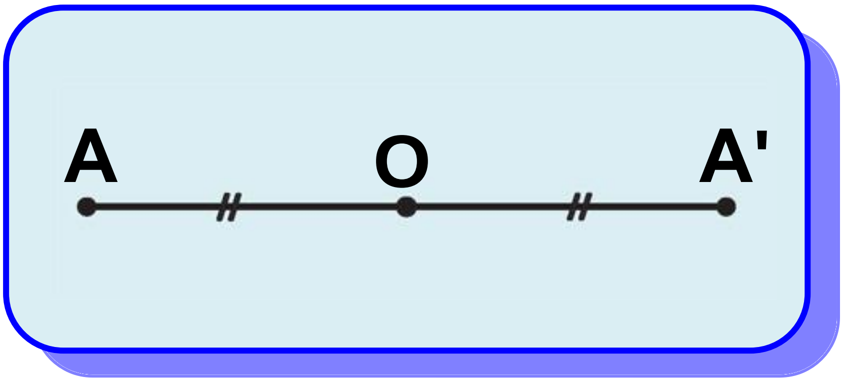
1. Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των κορυφών Α των τριγώνων ΑΒΓ, που έχουν σταθερή την πλευρά ΒΓ = α και τη διάμεσο ΑΜ με γνωστό μήκος.

2. Δίνεται κύκλος (Ο,R). Αν Ν τυχαίο σημείο του κύκλου και Μ σημείο στην προέκταση της ΟΝ, ώστε ΟΝ = ΝΜ, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος του Μ, όταν το Ν διαγράφει τον κύκλο.

Συμμετρικά σχήματα

3.8 Κεντρική συμμετρία

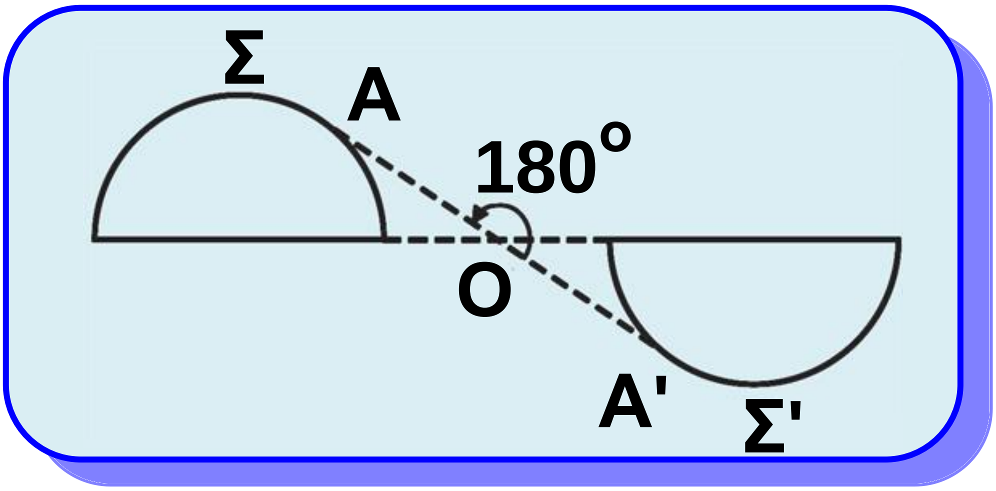
Στην §2.10 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α' λέγονται συμμετρικά ως προς κέντρο ένα σημείο Ο (σχ.37).



Σχήμα 37

Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' λέγονται συμμετρικά ως προς ένα σημείο Ο (σχ.38), αν και μόνο αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς το Ο και αντίστροφα. Το σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας του

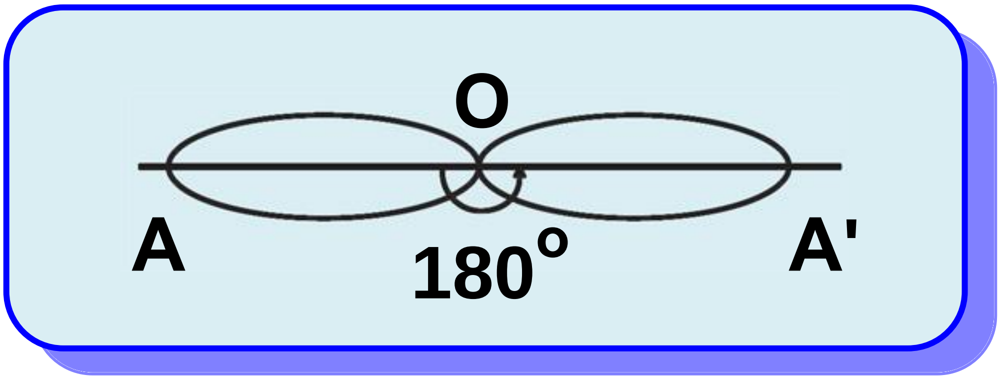
σχήματος, που αποτελείται από τα συμμετρικά ως προς το Ο σχήματα Σ και Σ'. Δηλαδή ένα σημείο Ο λέγεται κέντρο συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α', ως προς το Ο, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με κέντρο συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει κεντρική συμμετρία.



Σχήμα 38

Αν στρέψουμε ένα σχήμα Σ, με κέντρο συμμετρίας το Ο (σχ.39), κατά 180° γύρω από το Ο, θα

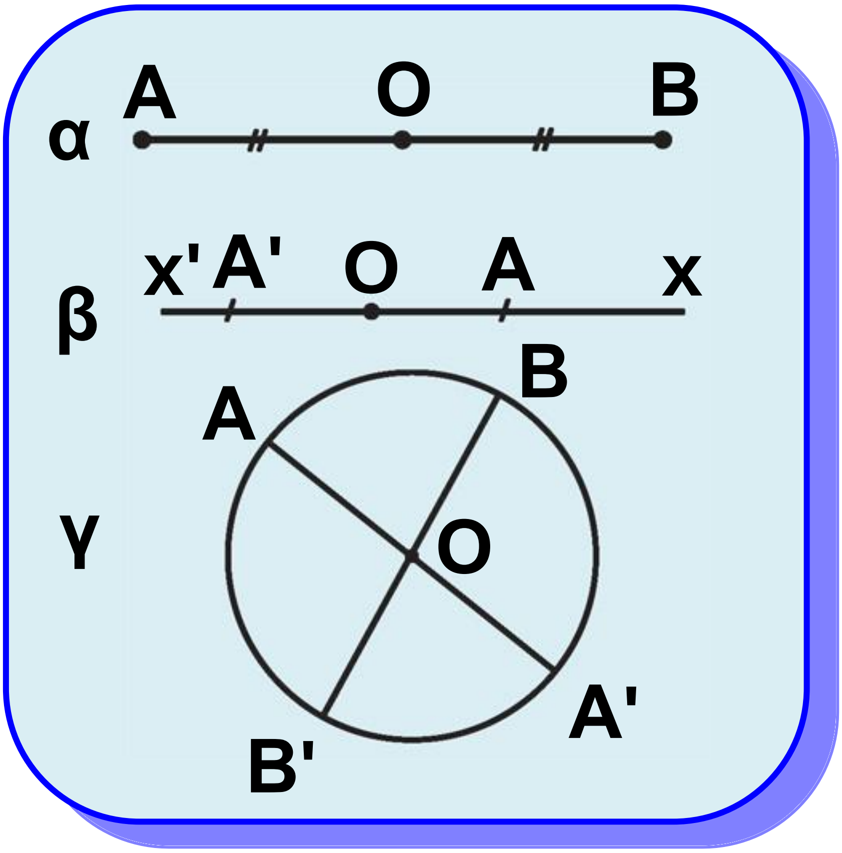
πάρουμε ένα σχήμα που θα συμπίπτει με το αρχικό.



Σχήμα 39

Από τα γνωστά μας, μέχρι τώρα σχήματα:

- **Το ευθύγραμμο τμήμα έχει κέντρο συμμετρίας το μέσο του (σχ.40α).**
- **Η ευθεία έχει κέντρο συμμετρίας οποιοδήποτε σημείο της (σχ.40β).**
- **Ο κύκλος έχει κέντρο συμμετρίας το κέντρο του (σχ.40γ).**



Σχήμα 40

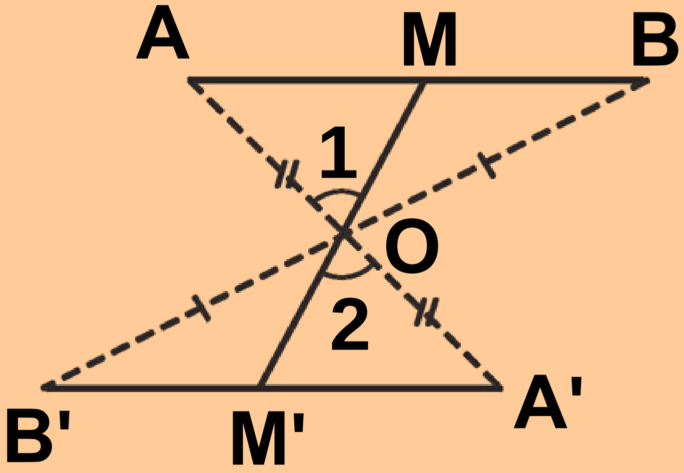
ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Το συμμετρικό ευθύγραμμου τμήματος ως προς σημείο που δεν ανήκει στο φορέα του, είναι τμήμα ίσο με αυτό.

Απόδειξη

Έστω ένα τμήμα ΑΒ (σχ.41), σημείο Ο που δεν ανήκει στην ευθεία ΑΒ και Α', Β' τα συμμετρικά των Α,Β ως

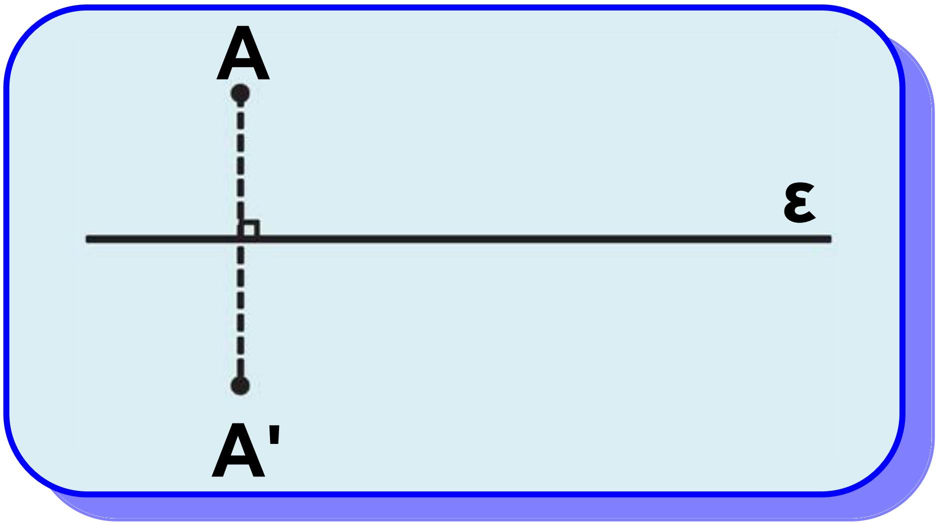
προς το Ο αντίστοιχα. Επειδή ΟΑ' = ΟΑ, ΟΒ' = ΟΒ και Α'ΟΒ' = ΑΟΒ, τα τρίγωνα $A\hat{O}B$ και $A'\hat{O}B'$ είναι ίσα, οπότε Α'Β' = ΑΒ. Αρκεί να αποδείξουμε ότι τα τμήματα ΑΒ και Α'Β' είναι συμμετρικά ως προς το Ο. Έστω σημείο Μ του ΑΒ και Μ' η τομή της ΜΟ με το Α'Β'. Από την προηγούμενη ισότητα τριγώνων έχουμε ότι $\hat{A} = \hat{A}'$, οπότε τα τρίγωνα ΑΟΜ και Α'ΟΜ' είναι ίσα γιατί έχουν ΟΑ' = ΟΑ, $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$. Επομένως ΟΜ' = ΟΜ, που σημαίνει ότι το Μ' είναι συμμετρικό του Μ. Όμοια το συμμετρικό κάθε σημείου Μ' του Α'Β' είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, Α'Β' είναι συμμετρικά ως προς το Ο.



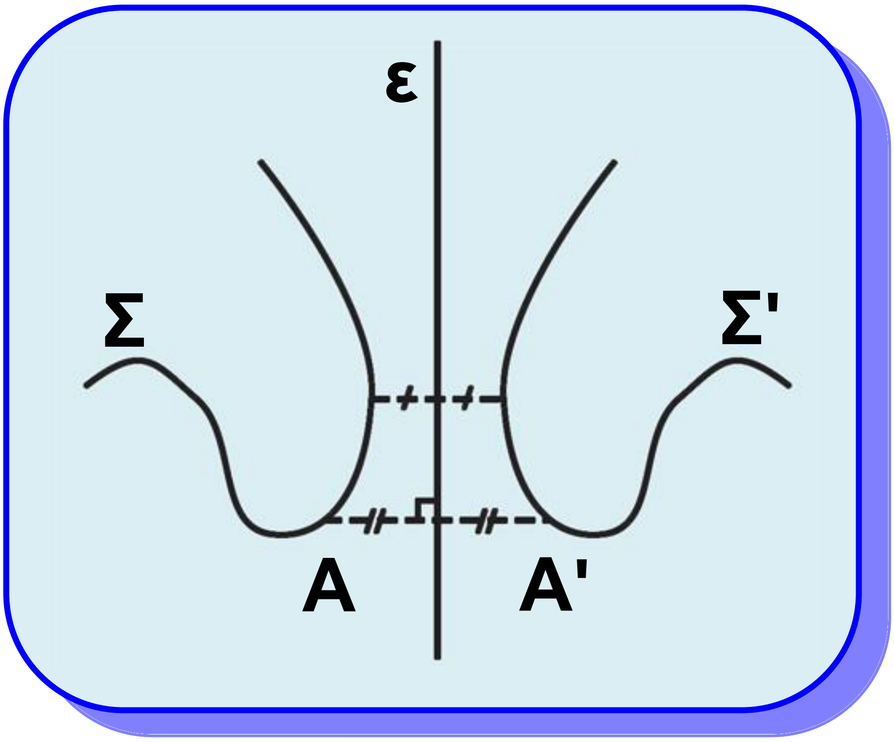
Σχήμα 41

3.9 Αξονική συμμετρία

Στην §2.14 είδαμε πότε δύο σημεία Α, Α' λέγονται συμμετρικά ως προς (άξονα) την ευθεία ε (σχ.42).

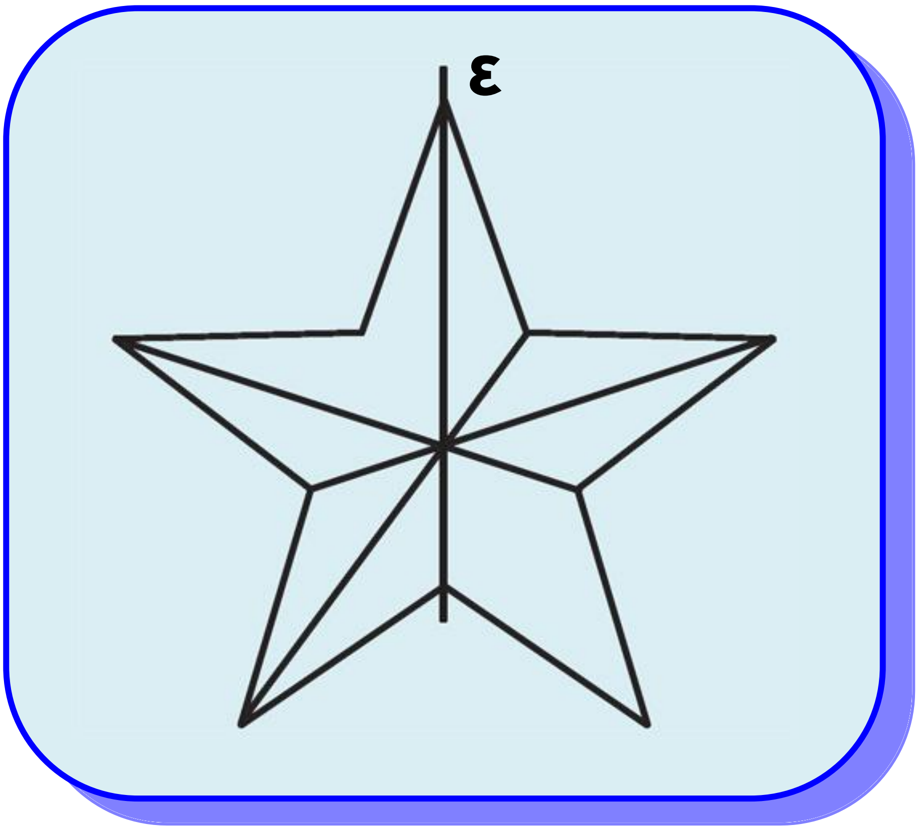


Σχήμα 42



Σχήμα 43

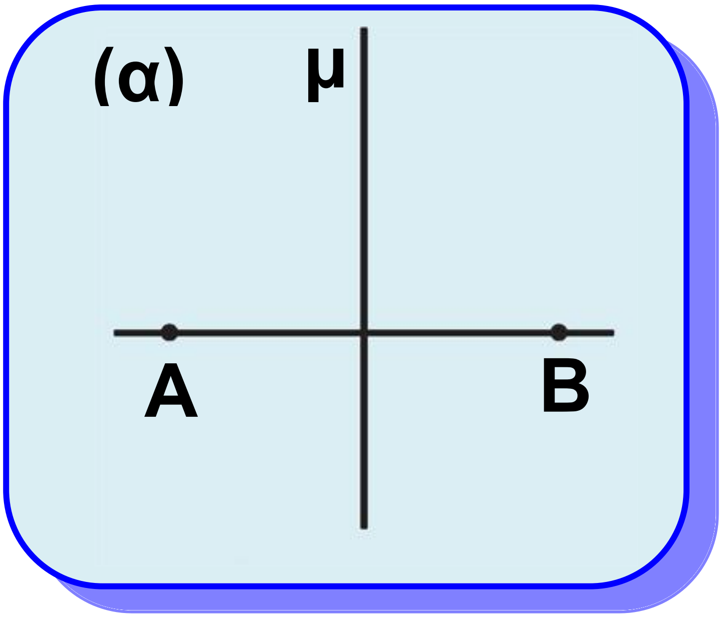
Γενικότερα δύο σχήματα Σ, Σ' (σχ.43) λέγονται συμμετρικά ως προς την ευθεία ε, αν και μόνον αν κάθε σημείο του Σ' είναι συμμετρικό ενός σημείου του Σ ως προς την ε και αντίστροφα. Η ευθεία ε λέγεται **άξονας συμμετρίας** του σχήματος που αποτελείται από τα σχήματα Σ και Σ'. Δηλαδή μια ευθεία ε λέγεται άξονας συμμετρίας ενός σχήματος, όταν για κάθε σημείο Α του σχήματος το συμμετρικό του Α', ως προς την ε, είναι επίσης σημείο του σχήματος. Ένα σχήμα με άξονα συμμετρίας λέμε ότι παρουσιάζει **αξονική συμμετρία**. Αν ένα σχήμα έχει ως άξονα συμμετρίας μια ευθεία ε, τότε η ε χωρίζει το σχήμα (σχ.44) σε δύο μέρη με τέτοιο τρόπο, ώστε, αν διπλώσουμε το φύλλο σχεδίασης κατά μήκος της ε, τα μέρη αυτά θα ταυτιστούν.



Σχήμα 44

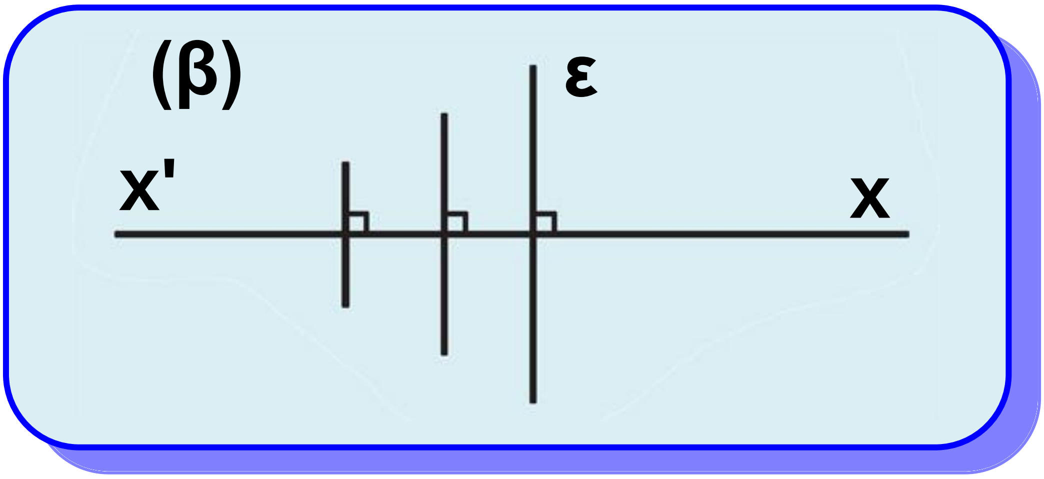
Από τα γνωστά μας σχήματα

• Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ έχει άξονες συμμετρίας τη μεσοκάθετό του μ και τον φορέα του ε (σχ.45α).



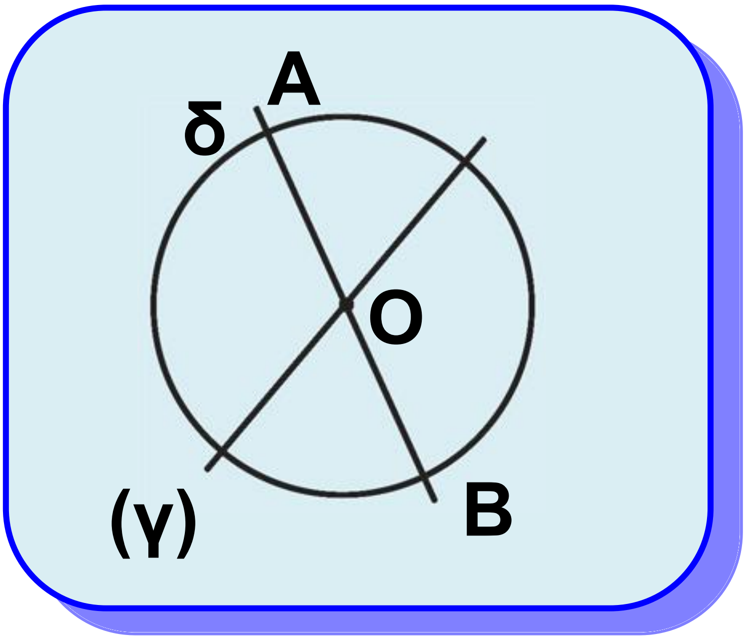
Σχήμα 45α

• Η ευθεία x'x έχει άξονα συμμετρίας κάθε ευθεία ε⊥x'x και την ίδια τη x'x (σχ.45β).



Σχήμα 45β

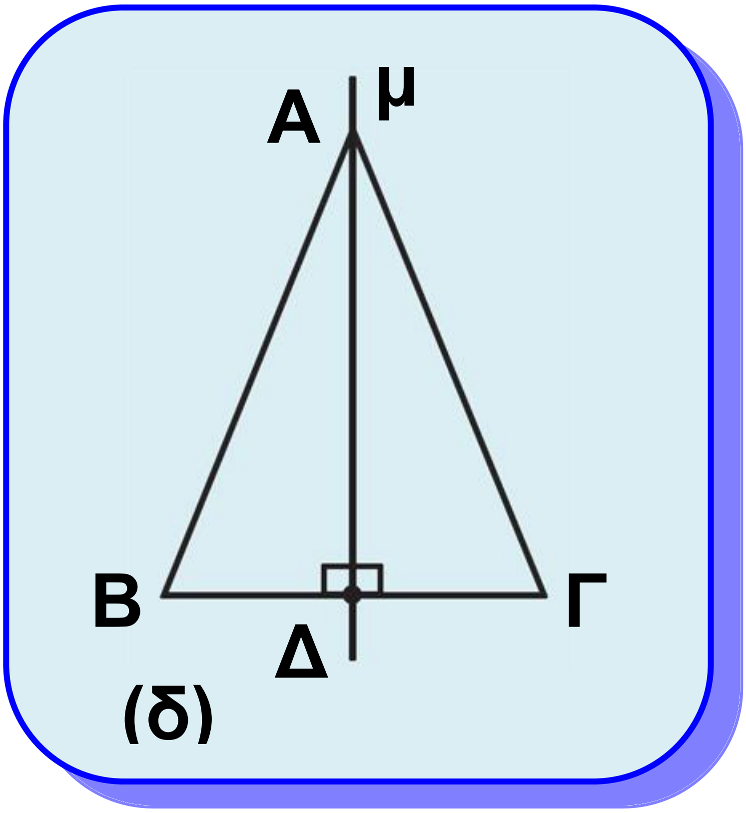
• Ο κύκλος έχει άξονα συμμετρίας το φορέα δ κάθε διαμέτρου του ΑΒ (σχ.45γ).



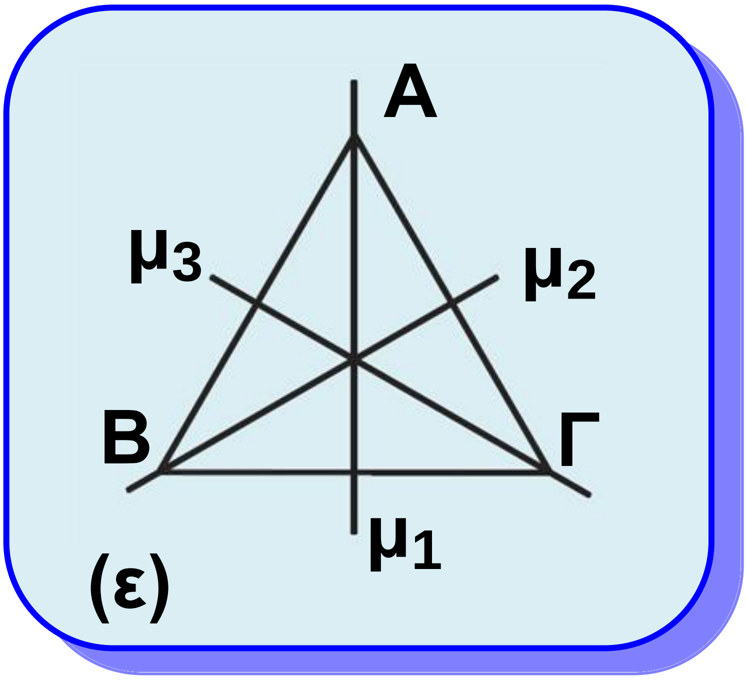
Σχήμα 45γ

• Το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ) έχει άξονα συμμετρίας το φορέα μ του ύψους ΑΔ (σχ.45δ).

• Το ισόπλευρο τρίγωνο έχει άξονα συμμετρίας τους φορείς των τριών υψών του (σχ.45ε).



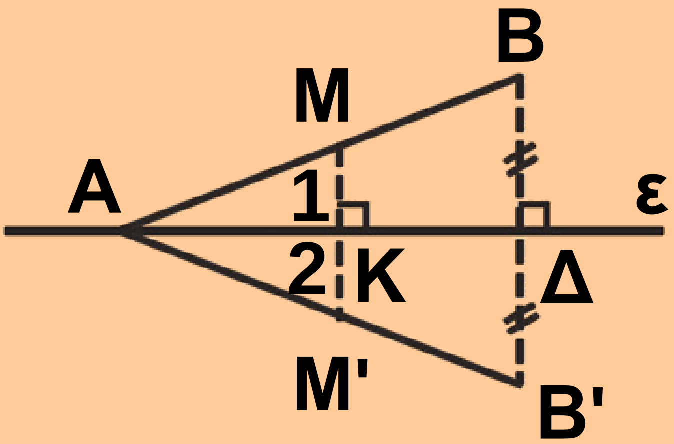
Σχήμα 45δ



Σχήμα 45ε

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω μια ευθεία ε και ένα τμήμα ΑΒ του οποίου το ένα άκρο Α είναι σημείο της ε. Να αποδειχθεί ότι το συμμετρικό του ΑΒ ως προς την ε είναι το τμήμα ΑΒ' ίσο με το ΑΒ, όπου Β' το συμμετρικό του Β ως προς την ε.



Σχήμα 46

Απόδειξη

Το συμμετρικό του Α ως προς την ε είναι το ίδιο το Α, αφού το Α είναι σημείο της ε. Επειδή η ε είναι μεσοκάθετος του ΒΒ', είναι

AB' = AB. Στο ισοσκελές τρίγωνο ABB' η ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος, άρα είναι και διχοτόμος, δηλαδή $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ 'Εστω σημείο Μ του ΑΒ. Φέρουμε ΜΚ $\perp$ ε η οποία όταν προεκταθεί τέμνει το AB' στο Μ'. Στο τρίγωνο ΑΜΜ' η ΑΚ είναι ύψος και διχοτόμος (αφού $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$), άρα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΜ' = ΚΜ, οπότε το Μ' είναι συμμετρικό του Μ. Όμοια αποδεικνύεται ότι το συμμετρικό κάθε σημείου του AB' είναι σημείο του ΑΒ. Άρα τα ΑΒ, AB' είναι συμμετρικά ως προς την ε.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να σχεδιάσετε τους άξονες συμμετρίας των γραμμάτων: Α, Β, Δ, Η, Θ, Τ, Χ, Ψ.

2. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Ο. Αν Α', Β', Γ' είναι τα συμμετρικά των Α, Β, Γ ως προς το κέντρο Ο αντίστοιχα, να αποδειχθεί ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ, Α'Β'Γ' είναι συμμετρικά ως προς το Ο και ίσα.**

3. **Αν $\hat{x}'A'\hat{y}'$ είναι η συμμετρική της γωνίας $x\hat{A}y$, ως προς κέντρο συμμετρίας ένα σημείο Ο, εξωτερικό της $x\hat{A}y$, τότε να αποδειχθεί Οτι $x'\hat{A}'x' = x\hat{A}y$.**

4. **Να αποδείξετε ότι το συμμετρικό ενός τριγώνου ΑΒΓ ως προς την ευθεία ΒΓ είναι τρίγωνο ίσο με το ΑΒΓ.**

5. **Να αποδείξετε ότι η διχοτόμος μιας γωνίας είναι άξονας συμμετρίας της.**

6. **Έστω ε, ε' δύο κάθετοι που τέμνονται στο Ο και ένα τυχαίο**

σημείο Μ. Αν Μ' είναι το συμμετρικό του Μ ως προς ε και Μ'' το συμμετρικό του Μ' ως προς ε', τότε να αποδείξετε ότι:

i) ΟΜ = ΟΜ'',

ii) τα σημεία Μ, Ο, Μ'' είναι συνευθειακά.

Ανισοτικές σχέσεις

Στην ενότητα αυτή αποδεικνύουμε την ανισοτική σχέση που ισχύει μεταξύ μιας εξωτερικής γωνίας ενός τριγώνου και των απέναντι γωνιών του και την ανισοτική σχέση πλευρών και γωνιών ενός τριγώνου. Επίσης, παρουσιάζουμε την τριγωνική ανισότητα.

3.10 Σχέση εξωτερικής και απέναντι γωνίας

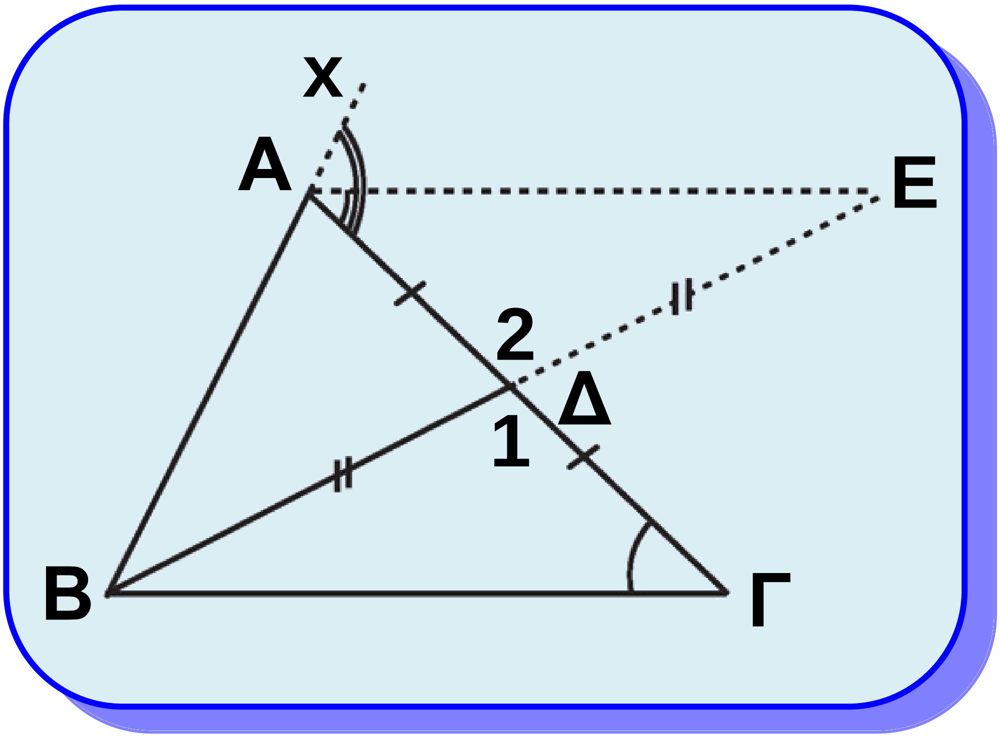
Θεώρημα

Κάθε εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι μεγαλύτερη από καθεμία από τις απέναντι γωνίες του τριγώνου.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Φέρουμε τη διάμεσο ΒΔ (σχ.47) και στην προέκτασή της, προς το Δ, θεωρούμε σημείο Ε, ώστε ΔΕ = ΒΔ. Επειδή το Ε βρίσκεται στο εσωτερικό της γωνίας $\Gamma\hat{A}x$ έχουμε $\Gamma\hat{A}E < \Gamma\hat{A}x = \hat{A}_{\varepsilon\xi}$. Όμως τα τρίγωνα ΒΔΓ και ΕΔΑ είναι ίσα γιατί έχουν: ΒΔ = ΔΕ, ΑΔ = ΔΓ και $\hat{\Delta}_1 = \hat{\Delta}_2$, οπότε

$\hat{\Gamma} = \Gamma\hat{A}E$. Από την τελευταία ισότητα και την $\Gamma\hat{A}E < \hat{A}_{\varepsilon\xi}$ προκύπτει ότι $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{\Gamma}$. Όμοια αποδεικνύεται ότι και $\hat{A}_{\varepsilon\xi} > \hat{B}$.



Σχήμα 47

Πορίσματα

(i) Κάθε τρίγωνο έχει το πολύ μια γωνία ορθή ή αμβλεία.

(ii) Το άθροισμα δύο γωνιών κάθε τριγώνου είναι μικρότερο των 180°.

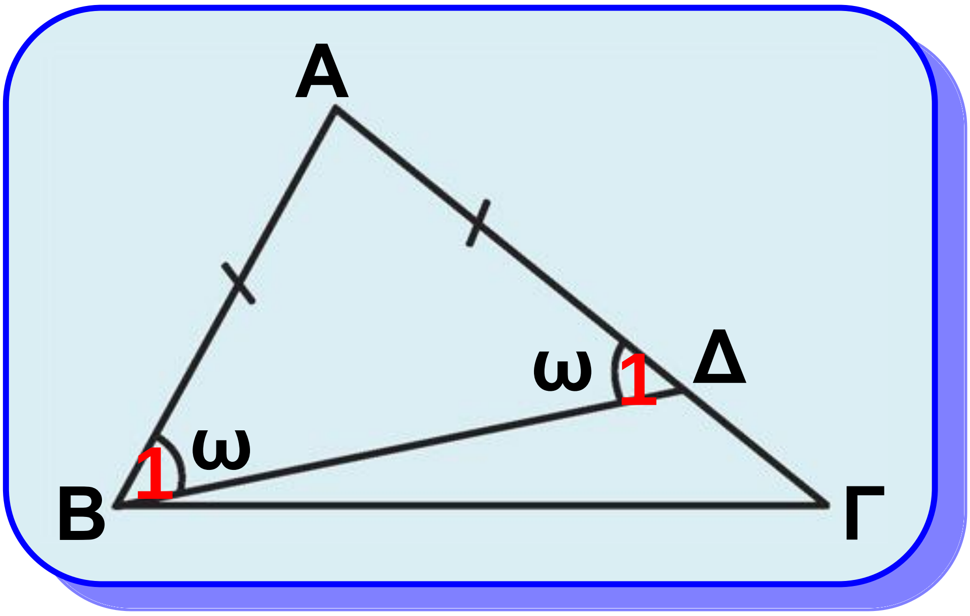
3.11 Ανισοτικές σχέσεις πλευρών και γωνιών

Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο απέναντι από άνισες πλευρές βρίσκονται όμοια άνισες γωνίες και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με β > γ (σχ.48). Τότε υπάρχει μοναδικό εσωτερικό σημείο Δ της ΑΓ, ώστε ΑΔ = ΑΒ. Το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές με βάση ΒΔ και επομένως $\hat{B}_1 = \hat{\Delta}_1 = \omega$. Επειδή η ΒΔ είναι εσωτερική ημιευθεία της γωνίας $\hat{B}$, είναι $\hat{B} > \hat{B}_1$ ενώ η $\hat{\Delta}_1$ ως εξωτερική γωνία του τριγώνου ΒΔΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$, δηλαδή $\hat{\Delta}_1 > \hat{\Gamma}$. Έτσι έχουμε $\hat{B} > \omega$ και $\omega > \hat{\Gamma}$, επομένως $\hat{B} > \hat{\Gamma}$.



Σχήμα 48

Αντίστροφα. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} > \hat{\Gamma}$. Τότε θα είναι και $\beta > \gamma$, γιατί

αν ήταν β = γ ή β < γ θα είχαμε $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ ή $\hat{B} < \hat{\Gamma}$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο.

Πορίσματα

(i) Αν μια γωνία ενός τριγώνου είναι ορθή ή αμβλεία, τότε η απέναντι πλευρά της είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου.
(ii) Αν ένα τρίγωνο έχει δύο γωνίες ίσες, τότε είναι ισοσκελές.
(iii) Αν ένα τρίγωνο έχει και τις τρεις γωνίες του ίσες, τότε είναι ισόπλευρο.

ΣΧΟΛΙΟ

Το παραπάνω πόρισμα (ii) είναι το αντίστροφο του πορίσματος I της § 3.2. Τα δύο αυτά πορίσματα συνοψίζονται στο εξής: ένα τρίγωνο είναι ισοσκελές αν και μόνο αν έχει δύο γωνίες ίσες.

3.12 Τριγωνική ανισότητα

Γνωρίζουμε ότι ο συντομότερος δρόμος μεταξύ δύο σημείων είναι η ευθεία που τα συνδέει. Αυτό εκφράζεται από το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

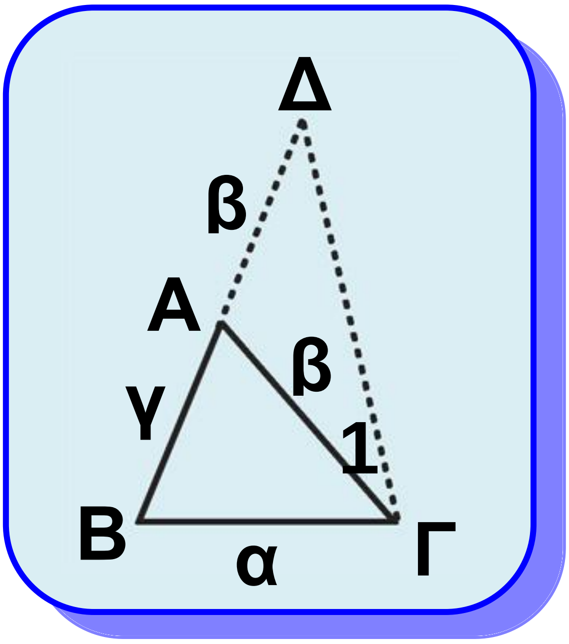
Κάθε πλευρά τριγώνου είναι μικρότερη από το άθροισμα των δύο άλλων και μεγαλύτερη από τη διαφορά τους.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Θα αποδείξουμε αρχικά ότι $α < β + γ$ (σχ.49). Γι' αυτό προεκτείνουμε την πλευρά ΒΑ, προς το Α, κατά τμήμα ΑΔ = ΑΓ. Τότε το τρίγωνο ΑΓΔ είναι ισοσκελές και η ΓΑ εσωτερική ημιευθεία της $\widehat{ΒΓΔ}$, οπότε έχουμε αντίστοιχα

$\hat{\Delta} = \hat{\Gamma}_1$ και $\hat{\Gamma}_1 < B\hat{\Gamma}\Delta$. Από τις σχέσεις αυτές προκύπτει ότι $\hat{\Delta} < B\hat{\Gamma}\Delta$, από την οποία σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι ΒΓ < ΒΔ ή α < β + γ. Όμοια προκύπτει ότι β < γ + α και γ < α + β. Από τις ανισότητες αυτές, αντίστοιχα προκύπτει ότι α > β - γ, αν β ≥ γ ή α > γ - β, αν γ ≥ β, δηλαδή και στις δύο περιπτώσεις ισχύει το ζητούμενο. Επομένως:

β - γ < α < β + γ, β ≥ γ



Σχήμα 49

Πορίσμα

Κάθε χορδή κύκλου είναι μικρότερη ή ίση της διαμέτρου.

ΣΧΟΛΙΟ

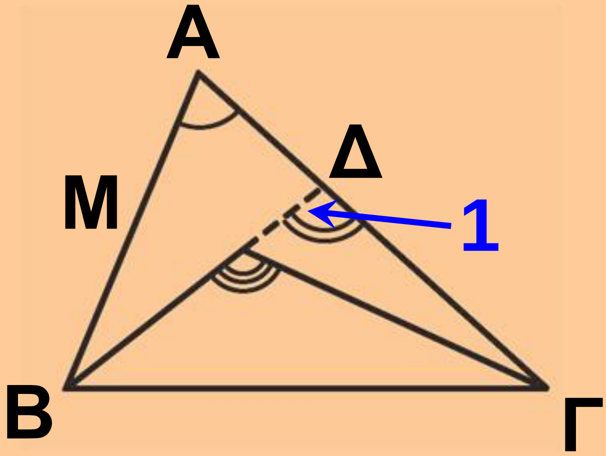
Γενικότερα ισχύει: Το ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ είναι μικρότερο από κάθε τεθλασμένη γραμμή που έχει άκρα τα Α και Β.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο ενός τριγώνου ΑΒΓ, να αποδειχθεί ότι:

(i) $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$

(ii) ΜΒ + ΜΓ < ΑΒ +ΑΓ.



Σχήμα 50

Απόδειξη

(i) Έστω Δ (σχ.50) το σημείο τομής της προέκτασης του ΒΜ με την ΑΓ. Η γωνία ΒΜΓ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΜΔΓ και επομένως

$B\hat{M}\Gamma > \hat{\Delta}_1$.Αλλά η $\hat{\Delta}_1$ είναι εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ, οπότε θα είναι

$\hat{\Delta}_1 > \hat{A}$. Άρα θα είναι και $B\hat{M}\Gamma > \hat{A}$.

(ii) Με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας στα τρίγωνα ΑΒΔ και ΜΓΔ προκύπτουν αντίστοιχα οι ανισότητες

$$MB + M\Delta < AB + A\Delta$$

$$\text{και } M\Gamma < M\Delta + \Delta\Gamma.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη βρίσκουμε:

$MB + M\Delta + M\Gamma < AB + (A\Delta + \Delta\Gamma) + M\Delta$

ή $MB + M\Gamma < AB + A\Gamma$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

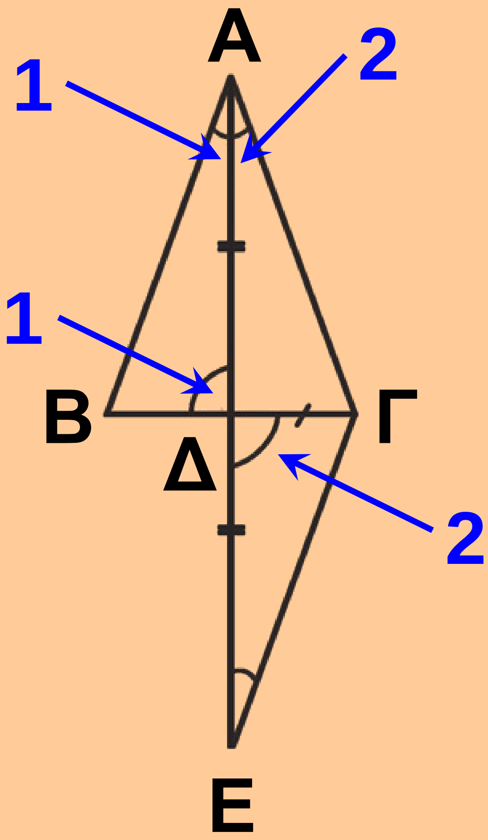
Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς ΒΓ. Αν ισχύουν δύο από τις επόμενες προτάσεις:

(i) το τμήμα ΑΔ είναι διάμεσος,

(ii) το τμήμα ΑΔ είναι διχοτόμος,

(iii) το τμήμα ΑΔ είναι ύψος,

τότε το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές με βάση ΒΓ.



Σχήμα 51

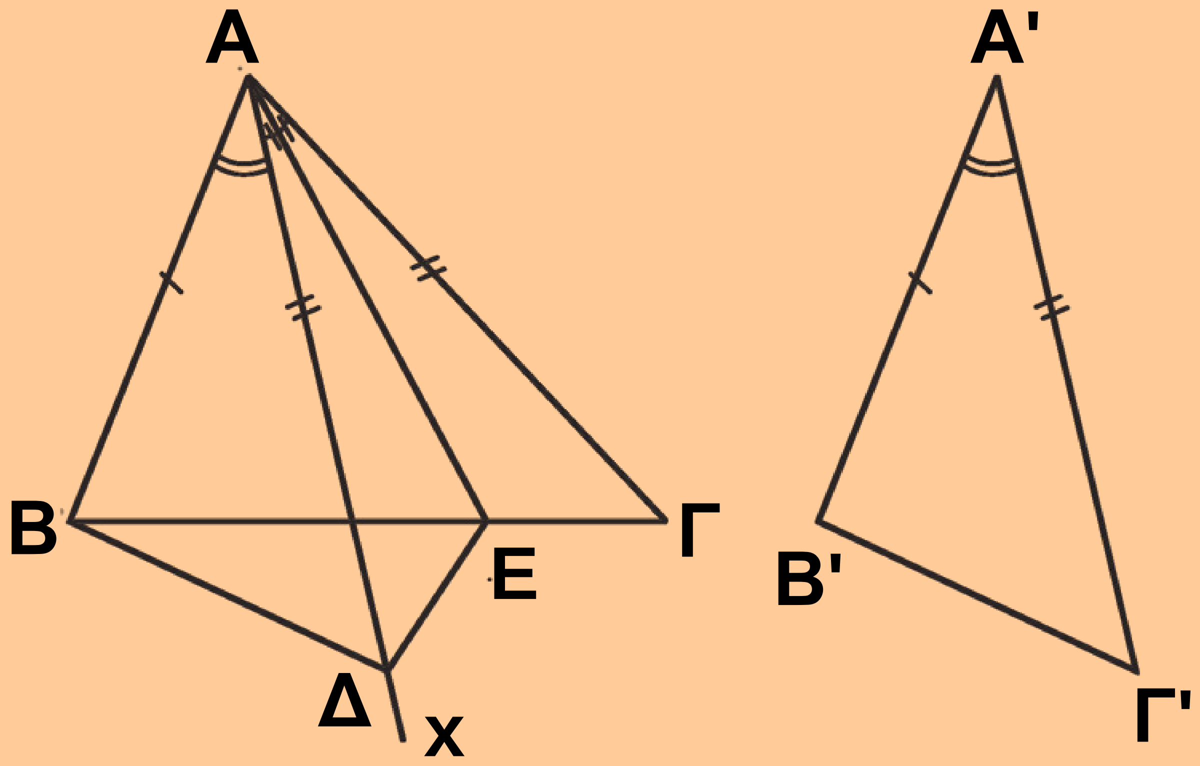
Λύση

Έστω ΑΔ διχοτόμος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ (σχ.51). Προ εκτείνουμε το ΑΔ κατά ίσο τμήμα ΔΕ. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΔΓΕ είναι ίσα (ΒΔ = ΔΓ, ΑΔ = ΔΕ, $\hat{Δ}_1 = \hat{Δ}_2$ ως κατακορυφήν). Άρα ΑΒ = ΓΕ (1) και $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}$. Από την $\hat{Α}_1 = \hat{Ε}$ προκύπτει ΑΓ = ΓΕ (2), αφού ΑΔ διχοτόμος, οπότε $\hat{Α}_1 = \hat{Α}_2 = \hat{Ε}$. Από τις σχέσεις (1) και (2) προκύπτει ότι ΑΒ = ΑΓ. Αν ΑΔ είναι ύψος και διάμεσος ή ύψος και διχοτόμος τότε εύκολα αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ είναι ίσα, οπότε ΑΒ = ΑΓ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες και τις περιεχόμενες

γωνίες άνισες, τότε και οι τρίτες πλευρές θα είναι όμοια άνισες και αντίστροφα.



Σχήμα 52

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' με ΑΒ = Α'Β', ΑΓ = Α'Γ' και $\hat{Α} > \hat{Α}'$ (σχ.52). Θα αποδείξουμε ότι ΒΓ > Β'Γ'. Αφού $\hat{Α} > \hat{Α}'$, υπάρχει εσωτερική ημιευθεία Αx της $\hat{Α}$

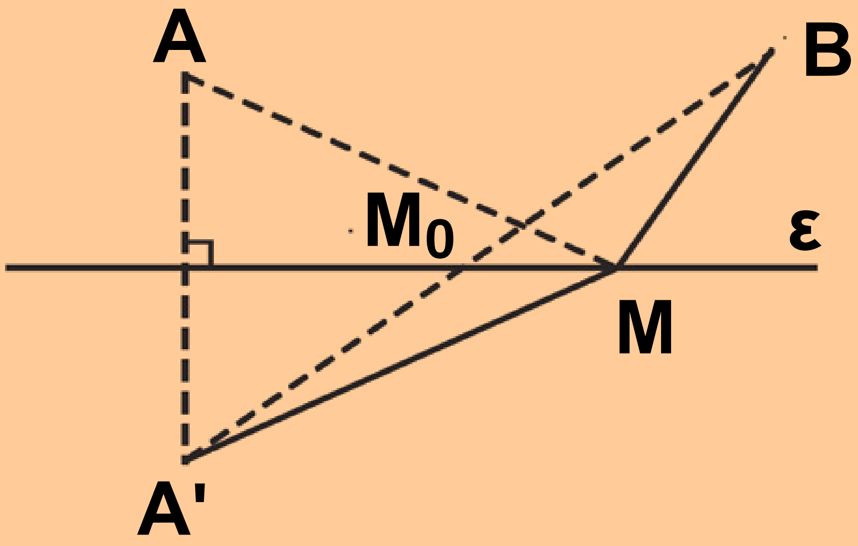
τέτοια, ώστε $B\hat{A}x = \hat{A}'$. Πάνω στην Αx θεωρούμε σημείο Δ, ώστε ΑΔ = Α'Γ'. Τότε τα τρίγωνα ΑΒΔ και Α'Β'Γ' είναι ίσα (ΠΓΠ). Άρα, ΒΔ = = Β'Γ'. Φέρουμε κατόπιν τη διχοτόμο ΑΕ της γωνίας $\Delta\hat{A}\Gamma$, οπότε σχηματίζονται δύο ίσα τρίγωνα τα ΑΔΕ και ΑΓΕ, άρα ΕΔ = = ΕΓ. Στο τρίγωνο ΒΔΕ, έχουμε από την τριγωνική ανισότητα ότι

ΒΔ < ΒΕ + ΕΔ ή ΒΔ < ΒΕ + ΕΓ
ή Β'Γ' < ΒΓ.

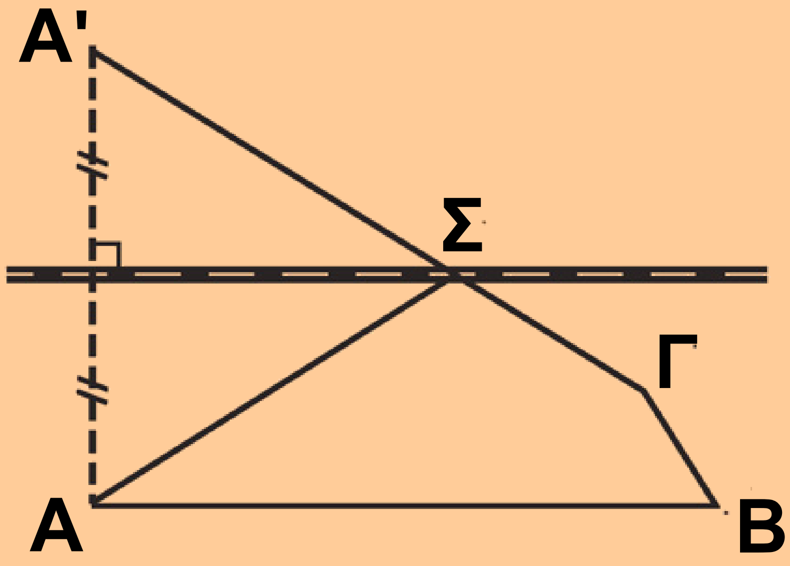
Αντίστροφα. Ας θεωρήσουμε ότι στα τρίγωνα ΑΒΓ και Α'Β'Γ' είναι ΑΒ = Α'Γ', ΑΓ = Α'Γ' και ΒΓ > Β'Γ'. Αν ήταν $\hat{A} = \hat{A}'$, τότε θα είχαμε ότι ΒΓ = Β'Γ', ενώ αν ήταν $\hat{A} < \hat{A}'$, θα είχαμε ότι Β'Γ' < ΒΓ, που είναι άτοπο. Επομένως, $\hat{A} > \hat{A}'$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 4η

Δίνεται μια ευθεία ε, δύο σημεία Α,Β προς το ίδιο μέρος της και το συμμετρικό Α' του Α ως προς την ε (Σχ.53α).
(i) Για οποιοδήποτε σημείο Μ της ε, να αποδειχθεί ότι ΜΑ + ΜΒ =
= ΜΑ' + ΜΒ ≥ Α'Β. Πότε το άθροισμα ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή;
(ii) Στα σημεία Α, Β, Γ (σχ.53β) βρίσκονται τρεις κωμοπόλεις. Κοντά σε αυτές διέρχεται σιδηροδρομική γραμμή, πάνω στην οποία πρόκειται να κατασκευασθεί σταθμός Σ. Σε ποιο σημείο πρέπει να κατασκευασθεί ο σταθμός, ώστε ο δρόμος ΑΣΓΒ να είναι ο ελάχιστος δυνατός;



(α)



(β)

Λύση

(i) Επειδή το A' είναι συμμετρικό του A ως προς την ε, η ε είναι μεσοκάθετος του AA', οπότε MA = = MA' και επομένως MA + MB = = MA' + MB (1). Αν το M δεν είναι σημείο του τμήματος A'B από το τρίγωνο MA'B, έχουμε

ΜΑ' + ΜΒ > Α'Β (2), ενώ αν το Μ είναι σημείο του Α'Β' έχουμε ΜΑ' + ΜΒ = Α'Β (3). Από (1), (2) και (3) προκύπτει ότι ΜΑ + ΜΒ = = ΜΑ' + ΜΒ ≥ Α'Β και ότι το ΜΑ + ΜΒ παίρνει τη μικρότερή του τιμή Α'Β, όταν Μ = M_0, όπου M_0 το σημείο τομής της ε με το Α'Β.

(ii) Όμοια με το (i).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις επόμενες προτάσεις:**

i) Η εξωτερική γωνία $\hat{A}_{\varepsilon\xi}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από τη $\hat{\Gamma}$.

Σ Λ

ii) Η εξωτερική γωνία $\hat{B}_{εξ}$ τριγώνου ΑΒΓ είναι μικρότερη από τη $\hat{Γ}$.

Σ Λ

iii) Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου είναι 180°.

Σ Λ

iv) Αν β > γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα.

Σ Λ

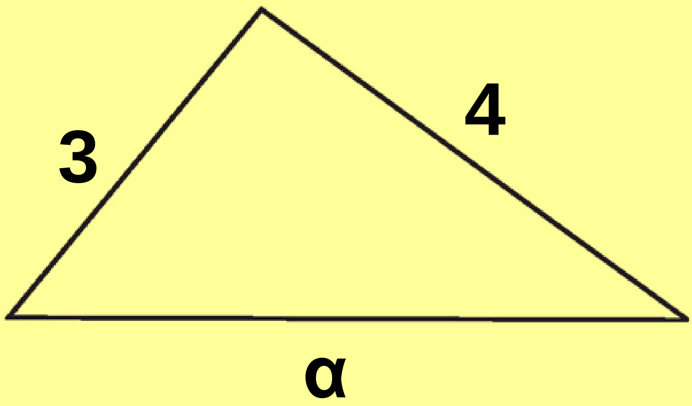
v) Αν β = γ (σε τρίγωνο ΑΒΓ), τότε $\hat{B} = \hat{Γ}$ και αντίστροφα.

Σ Λ

2. Για το τρίγωνο του παρακάτω σχήματος ισχύει:

α. α = 7 β. α = 1 γ. 1 < α < 7
δ. α > 7 ε. 0 < α < 1

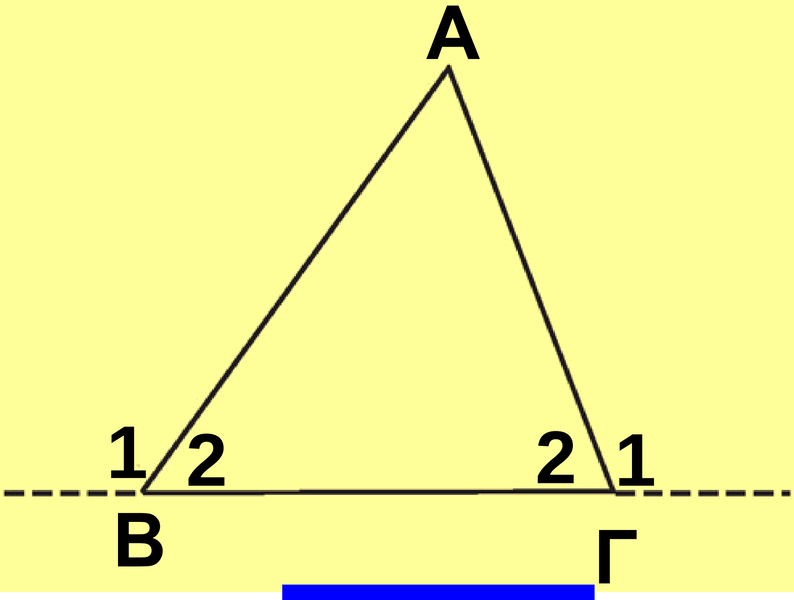
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.



3. Υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \dfrac{\gamma}{3}$ και $\beta = \dfrac{3\gamma}{5}$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο παρακάτω σχήμα είναι $\hat{B}_1 > \hat{\Gamma}_1$. Να αποδείξετε ότι $\hat{B}_1 > 90°$.



2. **Αν σε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΑ ισχύουν ΑΒ = ΒΓ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$, να αποδείξετε ότι ΑΑ = ΓΑ. Τι συμπεραίνετε για τη ΒΑ;**

3. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B} = \hat{\Gamma}$.**

i) Τι είδους γωνία είναι η $\hat{B}$;
ii) Να αποδείξετε ότι το ύψος από την κορυφή Α τέμνει την ευθεία ΒΓ, σε εσωτερικό σημείο της πλευράς ΒΓ.

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της ημιευθείας Βx που περιέχει το Α. Να αποδείξετε ότι η γωνία $B\hat{\Delta}\Gamma$ είναι μεγαλύτερη, ίση ή μικρότερη της γωνίας $B\hat{A}\Gamma$, αν το σημείο Α βρίσκεται μεταξύ των Β και Α, ταυτίζεται με το Α ή βρίσκεται μετά το Α, αντίστοιχα.**

5. **Αν Μ σημείο της βάσης ΒΓ ισοσκελούς τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ΑΜ < ΑΒ.**

6. **Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90°$), η διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο Α. Να αποδείξετε ότι ΑΔ < ΑΒ.**

7. **Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και Ο σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Οι ΒΟ και ΓΟ τέμνουν τις ΑΓ και ΑΒ στα σημεία Λ και Μ αντίστοιχα. Αν ισχύει ότι ΒΟ = ΓΟ και ΟΛ = ΟΜ να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές.**

8. **Έστω ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Κ, Λ τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι αν οι εξωτερικές διχοτόμοι των γωνιών του $\hat{B}$ και $\hat{\Gamma}$ τέμνονται στο**

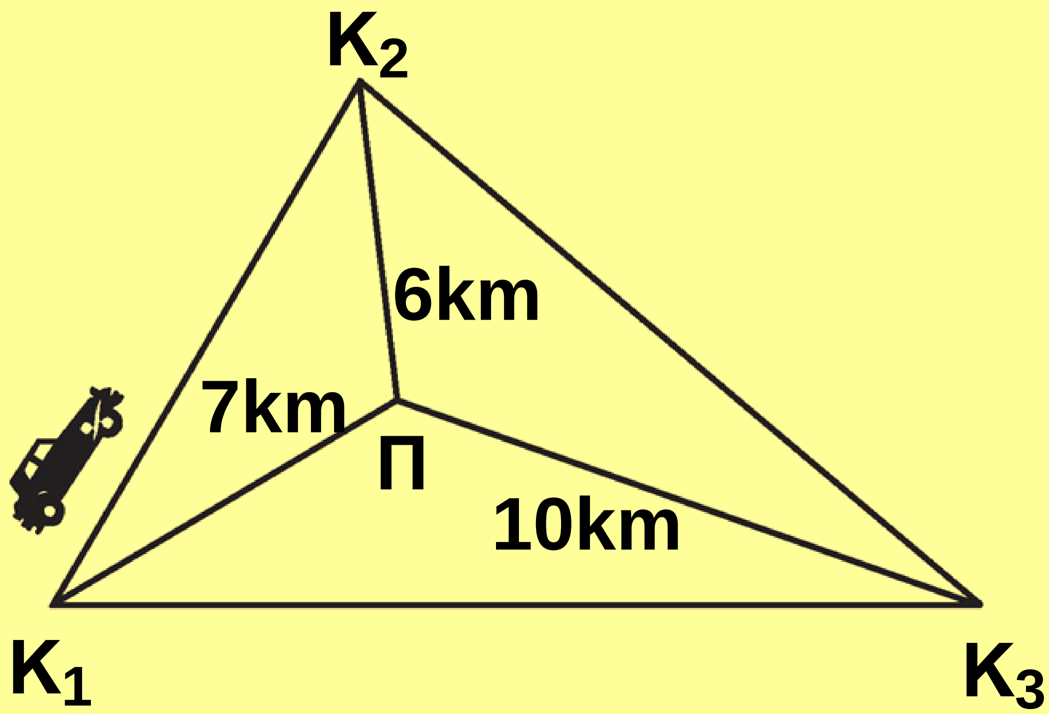
σημείο Δ, τότε το τρίγωνο ΔΚΛ είναι ισοσκελές.

9. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και Ι το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών $\hat{B}$, $\hat{\Gamma}$. Να αποδείξετε ότι:

i) το τρίγωνο ΒΙΓ είναι ισοσκελές,

ii) η ΑΙ είναι διχοτόμος της Α.

10. Οι κωμοπόλεις K_1, K_2, K_3 απέχουν από τη πόλη Π (παρακάτω σχήμα), αποστάσεις 7, 6 και 10 km αντίστοιχα. Ένα αυτοκίνητο ξεκινάει από την κωμόπολη K_1 και ακολουθώντας τη διαδρομή $K_1 K_2 K_3 K_1$ επιστρέφει στην K_1. Ο χιλιομετρητής του γράφει ότι για αυτή τη διαδρομή διήνυσε απόσταση 48 km. Είναι αυτό δυνατόν; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



Αποδεικτικές Ασκήσεις.

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\mu_\alpha < \frac{\alpha}{2}$, να αποδείξετε ότι $\hat{A} > \hat{B} + \hat{\Gamma}$. Τι ισχύει όταν $\mu_\alpha = \frac{\alpha}{2}$, ή $\mu_\alpha > \frac{\alpha}{2}$;

2. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και Μ το μέσο της ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $\widehat{AM\Gamma} > \widehat{AMB}$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ < ΑΓ και η διάμεσος ΑΜ. Να αποδείξετε ότι:

i) $M\hat{A}B > M\hat{A}\Gamma$,

ii) $\dfrac{\beta - \gamma}{2} < \mu_\alpha < \dfrac{\beta + \gamma}{2}$

iii) $\mu_\alpha + \mu_\beta + \mu_\gamma < 2\tau$

4. Έστω κύκλος (Ο,R) διαμέτρου ΑΒ και σημείο Σ της ημιευθείας ΟΑ. Για κάθε σημείο Μ του κύκλου να αποδειχθεί ότι ΣΑ ≤ ΣΜ ≤ ΣΒ. (Το τμήμα ΣΑ λέγεται απόσταση του Σ από τον κύκλο).

5. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ. Αν η διχοτόμος δ_α τέμνει κάθετα τη διάμεσο μ_β, να αποδείξετε ότι:

i) ΑΓ = 2ΑΒ,

ii) ΑΒ < ΒΓ.

6. Έστω κύκλος (O,R) και δύο τόξα $\overset{\frown}{AB}$, $\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$. Αν $\overset{\frown}{AB} = 2\overset{\frown}{\Gamma\Delta}$ να αποδείξετε ότι $AB < 2\Gamma\Delta$.

7. Να αποδείξετε ότι σε δύο άνισα τόξα ενός κύκλου αντιστοιχούν χορδές όμοια άνισες και αντίστροφα.

Σύνθετα Θέματα

1. Έστω κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και Ο εσωτερικό σημείο του.

i) Να αποδείξετε ότι

$$OA + OB + O\Gamma + O\Delta > \frac{AB + B\Gamma + \Gamma\Delta + \Delta A}{2}$$

ii) Για ποια θέση του Ο το άθροισμα $OA + OB + O\Gamma + O\Delta$ γίνεται ελάχιστο;

2. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ < ΑΓ) προεκτείνουμε τις πλευρές ΒΑ και ΓΑ προς το μέρος του Α κατά τμήματα ΑΔ = ΑΓ και ΑΕ = ΑΒ αντίστοιχα. Η ευθεία ΔΕ τέμνει την ευθεία ΒΓ στο σημείο Μ. Να αποδείξετε ότι:**

i) το τρίγωνο ΜΒΕ είναι ισοσκελές,

ii) η διχοτόμος της $B\hat{M}E$ διέρχεται από το σημείο Α.

3. **Έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων ενός κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ. Να αποδείξετε ότι:**

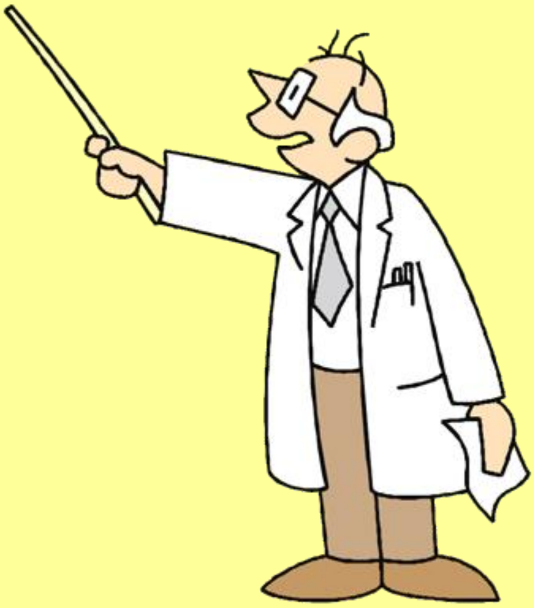
i) κάθε διαγώνιος είναι μικρότερη της ημιπεριμέτρου του τετραπλεύρου,

ii) ΑΓ + ΒΔ > ΑΒ +ΓΔ και ΑΓ + ΒΔ > ΑΔ + ΒΓ,

iii) το άθροισμα των διαγωνίων είναι μεγαλύτερο της ημιπεριμέτρου του

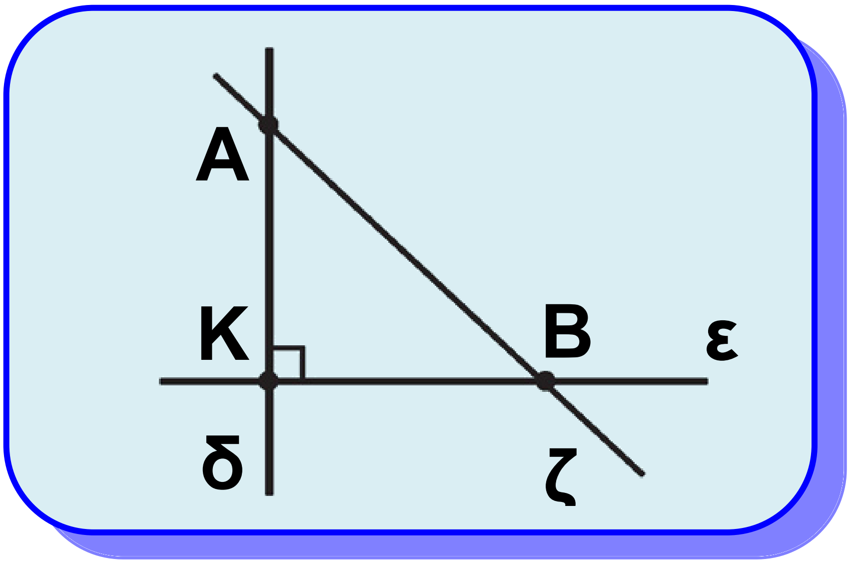
τετραπλεύρου και μικρότερο της περιμέτρου του τετραπλεύρου.

4. Στο εσωτερικό ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ θεωρούμε σημείο Γ και στις πλευρές της Οx, Oy τα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι η περίμετρος του τριγώνου ΑΒΓ είναι μεγαλύτερη από 2ΟΓ.



3.13 Κάθετες και πλάγιες

Έστω μια ευθεία ε (σχ.54) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Από το Α φέρουμε προς την ε την κάθετο δ και μια πλάγια ζ. Οι ευθείες δ και ζ τέμνουν την ε στα Κ και Β αντίστοιχα. Το Κ, όπως είναι γνωστό, λέγεται προβολή του Α πάνω στην ε ή ίχνος της καθέτου δ πάνω στην ε. Το Β λέγεται ίχνος της ευθείας ζ ή του τμήματος ΑΒ πάνω στην ε.



Σχήμα 54

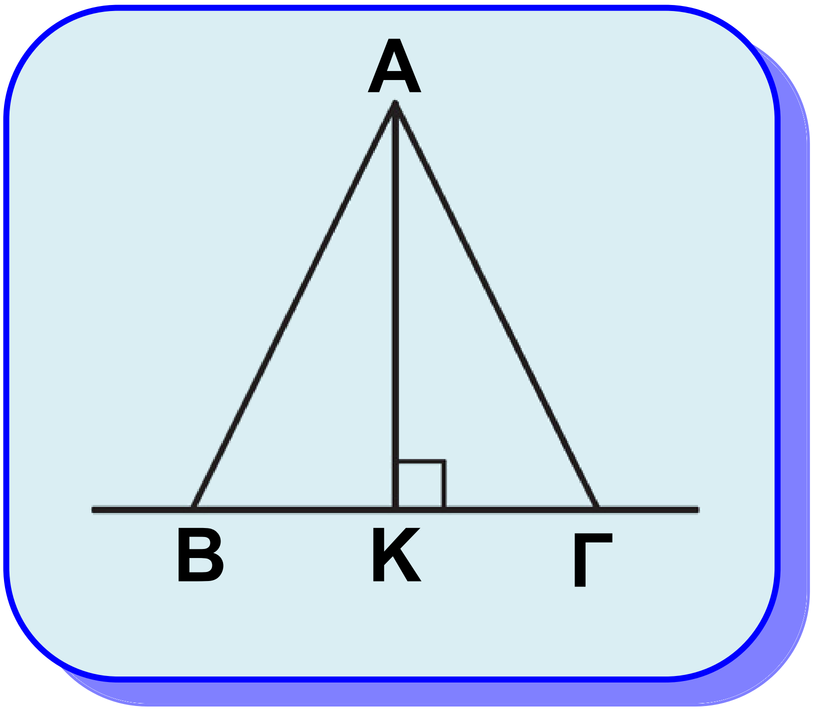
Θεώρημα Ι

Αν δυο πλάγια τμήματα είναι ίσα, τότε τα ίχνη τους ισαπέχουν από το ίχνος της καθέτου, και αντίστροφα.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ και ΑΓ δύο ίσα πλάγια τμήματα και ΑΚ το κάθετο τμήμα (σχ.55). Το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές και το ΑΚ ύψος του, επομένως θα είναι και διάμεσος, δηλαδή ΚΒ = ΚΓ.

Αντίστροφα. Έστω ότι ΚΒ = ΚΓ. Στο τρίγωνο ΑΒΓ το ΑΚ είναι ύψος και διάμεσος, άρα (εφαρμογή §3.12) το τρίγωνο είναι ισοσκελές δηλαδή ΑΒ = ΑΓ.



Σχήμα 55

Θεώρημα ΙΙ

Αν από ένα σημείο εκτός ευθείας φέρουμε το κάθετο και δύο πλάγια ευθύγραμμα τμήματα τότε:

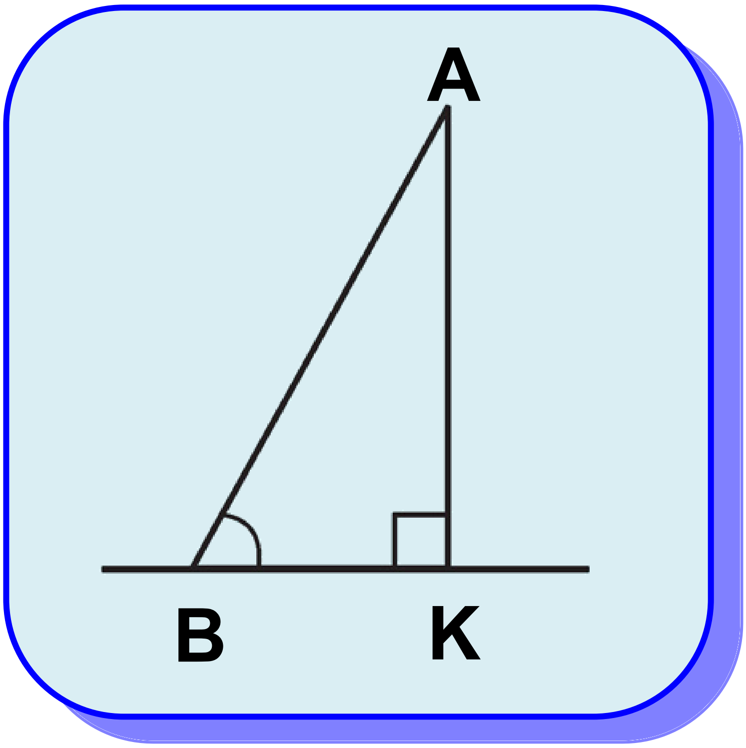
(i) Το κάθετο τμήμα είναι μικρότερο από κάθε πλάγιο.

(ii) Αν δύο πλάγια τμήματα είναι άνισα, τότε και οι

αποστάσεις των ιχνών τους από το ίχνος της καθέτου είναι ομοιοτρόπως άνισες και αντίστροφα.

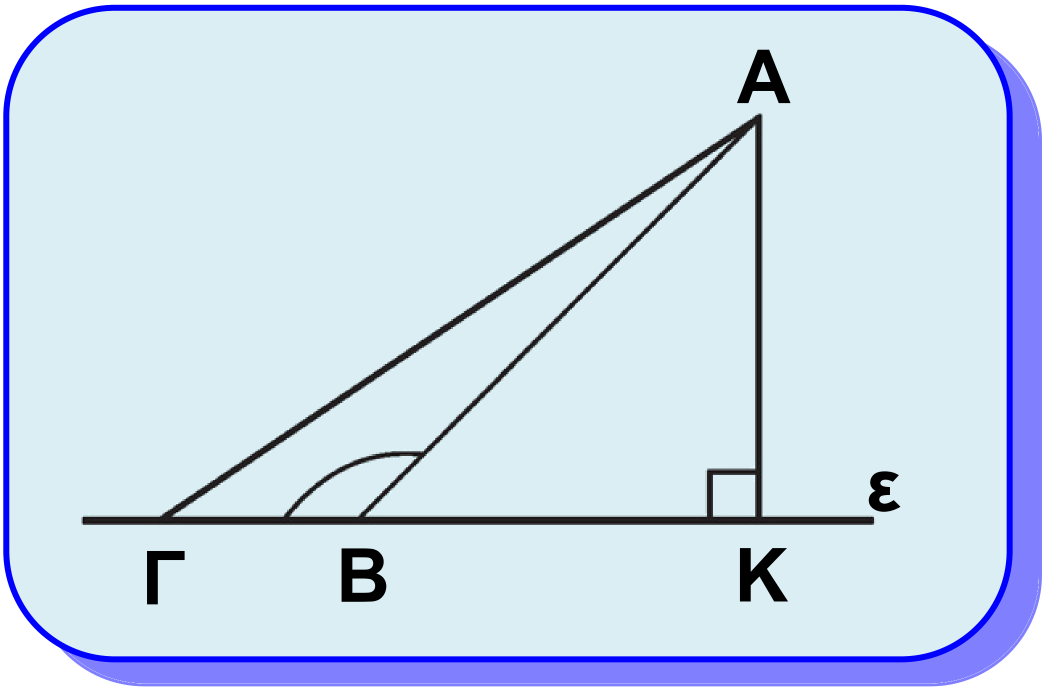
Απόδειξη

(i) Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΚΒ (σχ.56), η γωνία $\hat{K}$ είναι η μεγαλύτερη ως ορθή. Επομένως η πλευρά ΑΒ είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου και, άρα, ΑΒ > ΑΚ.



Σχήμα 56

(ii)Έστω ευθεία ε και σημείο Α εκτός αυτής. Θεωρούμε την κάθετο ΑΚ στην ε και δύο πλάγια τμήματα ΑΒ, ΑΓ, όπου Β, Γ σημεία της ε (σχ.57).



Σχήμα 57

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι και τα δύο ίχνη Β, Γ των πλάγιων τμημάτων ανήκουν στην ίδια ημιευθεία που ορίζει το σημείο Κ.

Ας υποθέσουμε ότι ΚΓ > ΚΒ (σχ.57). Θα αποδείξουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφού το Β είναι μεταξύ των Κ, Γ, η $A\hat{B}\Gamma$ είναι εξωτερική του ορθογώνιου τριγώνου ΚΑΒ, επομένως $A\hat{B}\Gamma > \hat{K} = 1L$, δηλαδή η $A\hat{B}\Gamma$ είναι αμβλεία. Στο τρίγωνο ΑΒΓ η πλευρά ΑΓ βρίσκεται απέναντι από την $A\hat{B}\Gamma$, συνεπώς είναι η μεγαλύτερη πλευρά του τριγώνου, δηλαδή ΑΓ>ΑΒ.

Αντίστροφα. Ας υποθέσουμε ότι ΑΓ > ΑΒ. Αν ήταν ΚΓ = ΚΒ, τότε θα είχαμε ΑΓ = ΑΒ, που είναι άτοπο. Αν ΚΓ < ΚΒ, τότε σύμφωνα με το προηγούμενο θα είχαμε ότι ΑΓ < ΑΒ, που είναι επίσης άτοπο. Επομένως ΚΓ > ΚΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Την ιδιότητα (i) του Θεωρήματος ΙΙ, που έχει το κάθετο τμήμα συνήθως εκφράζουμε και ως: η απόσταση ενός σημείου Α από μία ευθεία ε είναι μικρότερη από την απόσταση του Α από τυχόν σημείο της ευθείας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

Αν ΑΒ, ΑΓ πλάγια τμήματα ως προς μια ευθεία ε και ΑΚ το κάθετο τμήμα, τότε:

1. **Συμπληρώστε τις παρακάτω ισοδυναμίες**

i) ΑΒ = ΑΓ ⇔ ....

ii) ΑΒ > ΑΓ ⇔ ....

2. **Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις**

παρακάτω σχέσεις και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i)	AB > AK	Σ	Λ
ii)	AB = AK	Σ	Λ
iii)	AB < AK	Σ	Λ

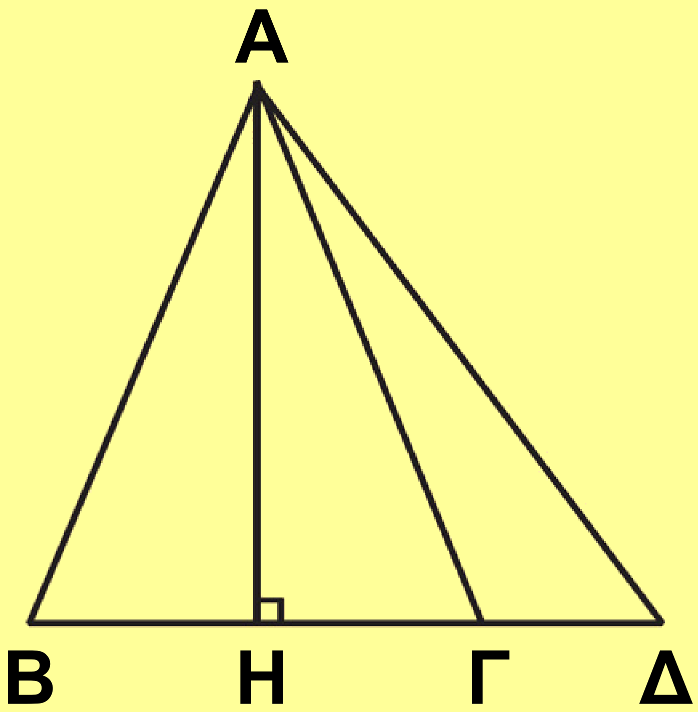
Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στις κάθετες πλευρές ΑΒ, ΑΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα σημεία Α, Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i)ΔΕ < ΕΒ,

ii) ΔΕ < ΒΓ.

2. Στο παρακάτω σχήμα το ΑΗ είναι ύψος και διάμεσος του τριγώνου ΑΒΓ. Να συγκρίνετε τα τμήματα ΑΒ, ΑΓ και ΑΔ.



3. **Δίνεται τμήμα ΑΒ, σημείο Ρ της μεσοκαθέτου του και μία ευθεία ε που διέρχεται από το Α.**

i) Να συγκρίνετε τις αποστάσεις του Ρ από την ευθεία ε και το σημείο Β.

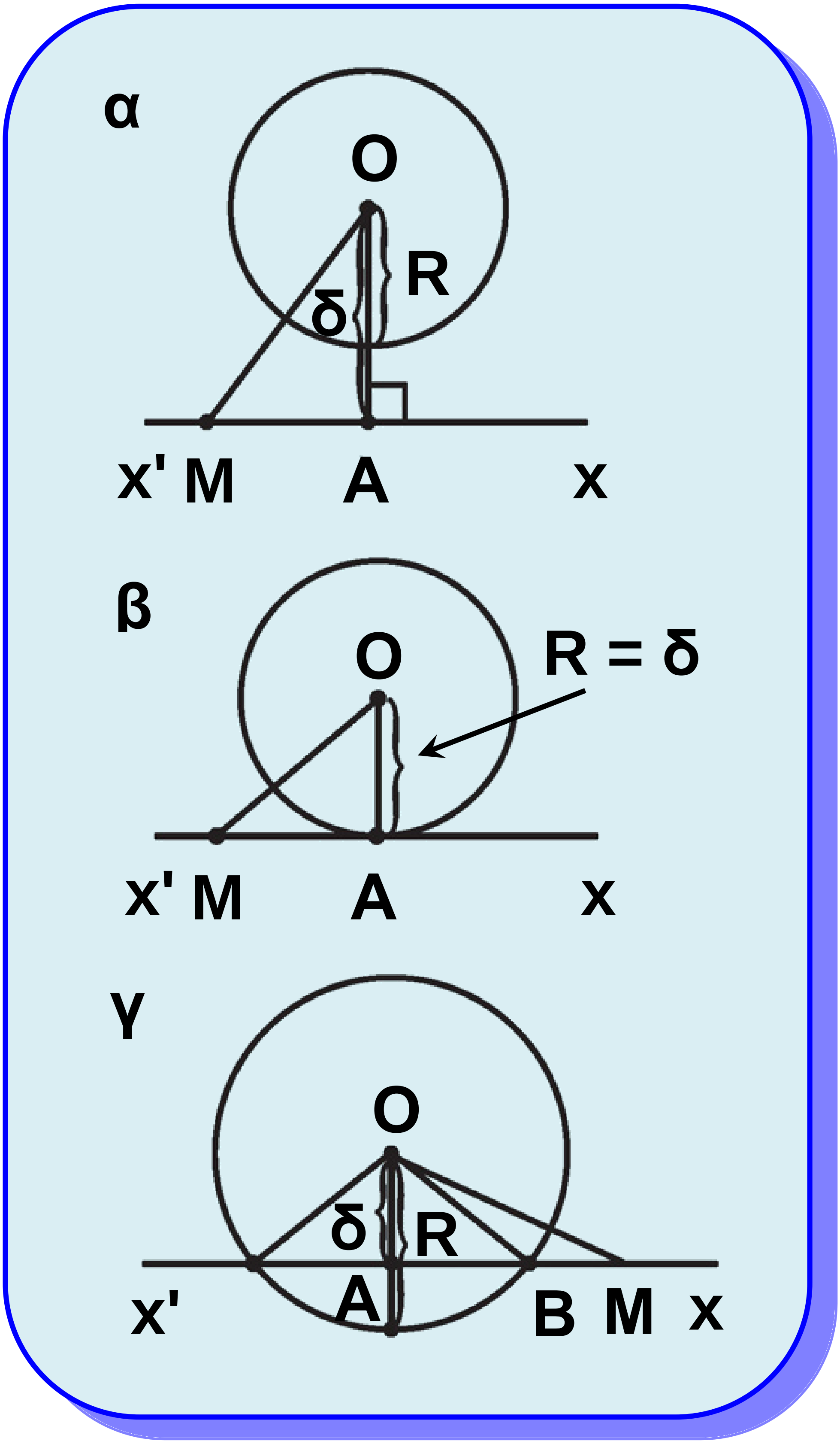
ii) Ποια πρέπει να είναι η θέση της ευθείας ε, ώστε οι αποστάσεις αυτές να είναι ίσες;

Ευθεία και κύκλος

3.14 Σχετικές θέσεις ευθείας και κύκλου

Θεωρούμε έναν κύκλο (O,R) μια ευθεία x'x και την απόσταση δ = OA του κέντρου O από την x'x (σχ.58). Μεταξύ των δ και R ισχύει μία από τις σχέσεις: δ > R, δ = R και δ < R. Θα εξετάσουμε τη γεωμετρική ερμηνεία καθεμίας από τις σχέσεις αυτές.

- Έστω δ > R (σχ.58α). Τότε το A είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, οπότε και κάθε άλλο σημείο M της ευθείας είναι εξωτερικό, αφού OM > OA > R. Επομένως, η x'x δεν έχει κανένα κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εξωτερική** ευθεία του κύκλου.



Σχήμα 58

- Έστω δ = R (σχ.58β). Τότε το Α είναι κοινό σημείο της ευθείας με τον κύκλο, ενώ κάθε άλλο σημείο Μ της x'x είναι εξωτερικό σημείο του (O,R), αφού ΟΜ > ΟΑ = R. Επομένως, η x'x έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο και λέγεται **εφαπτόμενη** του κύκλου στο σημείο Α. Το σημείο Α λέγεται **σημείο επαφής** της ευθείας με τον κύκλο. Επίσης, στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ευθεία x'x εφάπτεται του κύκλου (O,R) στο σημείο Α.

Είναι φανερό ότι:

Η ακτίνα που καταλήγει στο σημείο επαφής είναι κάθετη στην εφαπτομένη.

Η εφαπτομένη του κύκλου σε κάθε σημείο του είναι μοναδική.

- Έστω δ < R (σχ.58γ). Τότε το Α είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Πάνω στην ημιευθεία Αx θεωρούμε ένα σημείο Μ, ώστε ΑΜ = R. Τότε το Μ είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου, αφού ΟΜ > ΑΜ = R. Έτσι η ημιευθεία Αx, αφού διέρχεται από ένα εσωτερικό σημείο, το Α, και ένα εξωτερικό, το Μ, είναι φανερό ότι έχει ένα μοναδικό κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β. Όμοια και η ημιευθεία Αx' έχει ένα κοινό σημείο με τον κύκλο, το Β'.

Επομένως, η x'x έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο. Στην περίπτωση αυτή η ευθεία x'x, λέγεται **τέμνουσα του κύκλου** και τα κοινά της σημεία με το κύκλο λέγονται σημεία **τομής** της με τον κύκλο. Επίσης λέμε ότι η ευθεία **τέμνει** τον κύκλο.

Ανακεφαλαιώνοντας έχουμε:

- Αν δ > R, η ευθεία δεν έχει κοινά σημεία με τον κύκλο.

• Αν δ = R, η ευθεία έχει ένα μόνο κοινό σημείο με τον κύκλο.

• Αν δ < R, η ευθεία έχει δύο κοινά σημεία με τον κύκλο.

Με την μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο αποδεικνύονται και τα αντίστροφα των παραπάνω συμπερασμάτων. Με την ίδια επίσης μέθοδο αποδεικνύεται και το επόμενο θεώρημα.

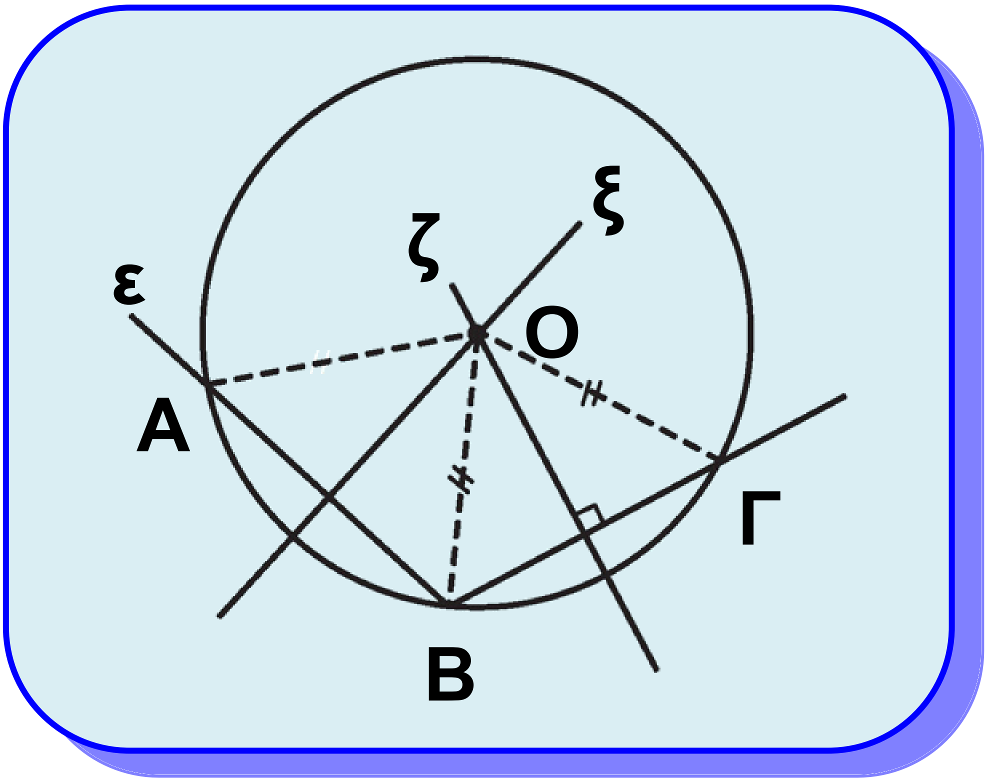
Θεώρημα Ι

Μια ευθεία και ένας κύκλος έχουν το πολύ δύο κοινά σημεία.

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι μια ευθεία ε και ένας κύκλος (Ο,ρ) έχουν τρία κοινά σημεία, τα Α, Β, Γ (σχ. 59). Επειδή ΟΑ = ΟΒ (= ρ) και ΟΒ = ΟΓ (= ρ), οι μεσοκάθετοι ξ,ζ των ΑΒ, ΒΓ αντίστοιχα, διέρχονται από το Ο. Έτσι

από το σημείο Ο έχουμε δύο διαφορετικές κάθετες στην ε τις ξ, ζ, που είναι άτοπο.



Σχήμα 59

ΣΧΟΛΙΟ

Από το προηγούμενο θεώρημα προκύπτει ότι τρία οποιαδήποτε σημεία ενός κύκλου δεν είναι συνευθειακά. Στην § 4.5 θα δούμε ότι από τρία μη συνευθειακά σημεία διέρχεται ένας κύκλος, που είναι και μοναδικός.

3.15 Εφαπτόμενα τμήματα

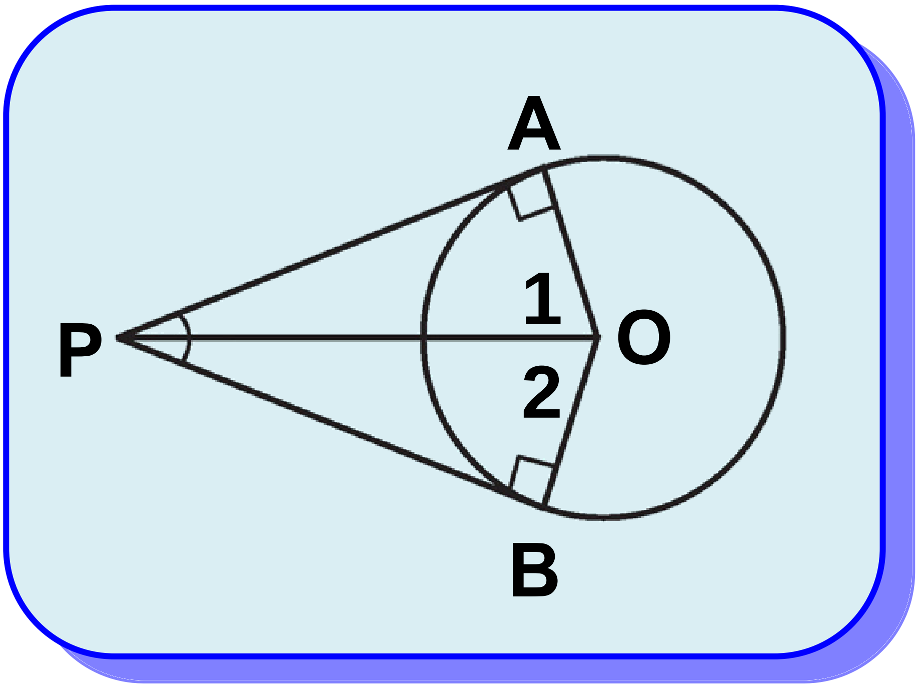
Έστω ένας κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο P. Στην § 6.7 θα δούμε ότι από το P φέρονται δύο εφαπτόμενες του κύκλου. Αν A, B είναι τα σημεία επαφής αυτών με τον κύκλο (σχ.60), τότε τα τμήματα PA και PB λέγονται **εφαπτόμενα τμήματα** του κύκλου από το σημείο P και η ευθεία PO **διακεντρική ευθεία** του σημείου P. Ισχύει το εξής θεώρημα:

Θεώρημα ΙΙ

Τα εφαπτόμενα τμήματα κύκλου, που άγονται από σημείο εκτός αυτού είναι ίσα μεταξύ τους.

Απόδειξη

Τα τρίγωνα AOP και BOP (σχ.60) έχουν $\hat{A} = \hat{B} = 90°$, OP κοινή και OA = OB (= ρ), άρα είναι ίσα, οπότε PA = PB.



Σχήμα 60

Πόρισμα

Αν P είναι ένα εξωτερικό σημείο ενός κύκλου, τότε η διακεντρική ευθεία του:

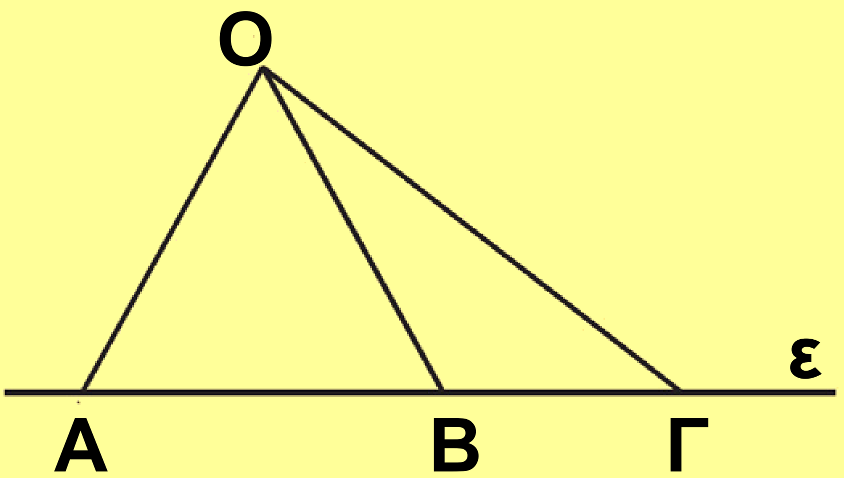
(i) είναι μεσοκάθετος της χορδής του κύκλου με άκρα τα σημεία επαφής,
(ii) διχοτομεί τη γωνία των εφαπτόμενων τμημάτων και τη γωνία των ακτίνων που καταλήγουν στα σημεία επαφής.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

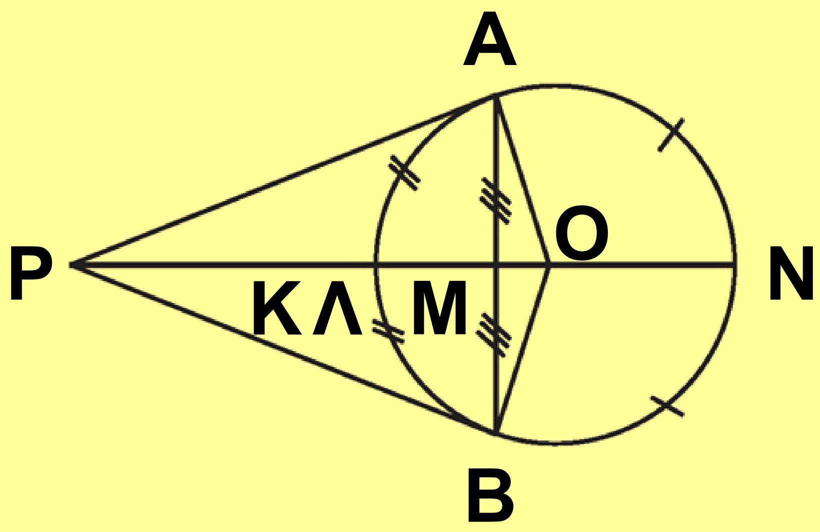
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Πότε μια ευθεία έχει δύο, ένα ή κανένα κοινό σημείο με έναν κύκλο;

2. Είναι δυνατόν στο παρακάτω σχήμα να είναι ΟΑ = ΟΒ = ΟΓ; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.



3. **Στο παρακάτω σχήμα τα PA, PB είναι εφαπτόμενα τμήματα, η PK διχοτόμος της APB, τα Λ, N μέσα των τόξων ΑΛΒ, ΑΝΒ αντίστοιχα και το Μ μέσο της χορδής ΑΒ. Χαρακτηρίστε ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις:**



i) PA = PB.

Σ Λ

ii) Η PK διέρχεται από το Ο.

Σ Λ

iii) Η ΟΜ διέρχεται από τα Ρ, Λ, Ν.

Σ Λ

iv) Η προέκταση του ΛΜ διχοτομεί τις γωνίες $A\hat{P}B$, $A\hat{O}B$ και το τόξο $\overset{\frown}{ANB}$.

Σ Λ

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Αν έχουμε δύο ομόκεντρους κύκλους, να εξηγήσετε γιατί όλες οι χορδές του μεγάλου κύκλου που εφάπτονται στο μικρό κύκλο είναι ίσες.

3. Δίνεται κύκλος (O, ρ), μία διάμετρός του AB και οι εφαπτόμενες $ε_1$, $ε_2$ του κύκλου στα A,B. Αν μια τρίτη εφαπτομένη ε τέμνει τις $ε_1$, $ε_2$ στα Γ, Δ, να αποδείξετε ότι $Γ\hat{O}Δ = 90°$.

3. Από εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R) φέρουμε τα εφαπτόμενα

τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Μία τρίτη εφαπτομένη στο σημείο Ε του κύκλου τέμνει τα ΡΑ και ΡΒ στα σημεία Γ,Δ αντίστοιχα. Να βρεθεί η περίμετρος του τριγώνου ΡΓΔ ως συνάρτηση των εφαπτόμενων τμημάτων ΡΑ και ΓΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

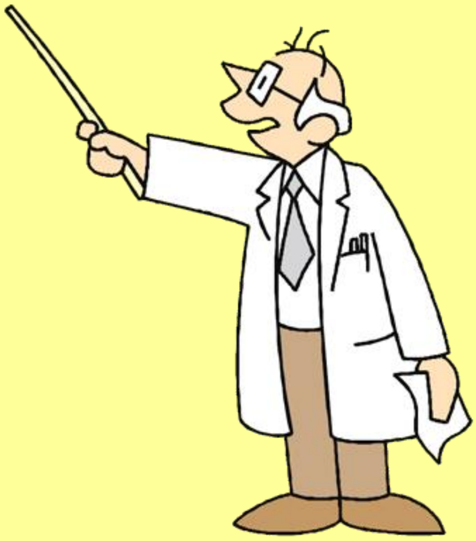
1. Να αποδείξετε ότι δύο σημεία μίας εφαπτομένης κύκλου, τα οποία ισαπέχουν από το σημείο επαφής, απέχουν ίση απόσταση από τον κύκλο.

2. Από σημείο Μ εξωτερικό του κύκλου (O,R) φέρουμε τις εφαπτόμενες ΜΑ,ΜΒ του κύκλου. Προεκτείνουμε το ΟΒ κατά ίσο τμήμα ΒΓ. Να αποδείξετε ότι η γωνία $A\hat{M}\Gamma$ είναι τριπλάσια της $B\hat{M}\Gamma$.

3. **Από εξωτερικό σημείο Ρ ενός κύκλου κέντρου Ο, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΡΑ και ΡΒ. Αν Μ είναι ένα εσωτερικό σημείο του ευθύγραμμου τιμή,**

ΟΡ να αποδείξετε ότι

$M\hat{A}P = M\hat{B}P$.



ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 2ου ΤΟΜΟΥ

Κεφάλαιο 3ο