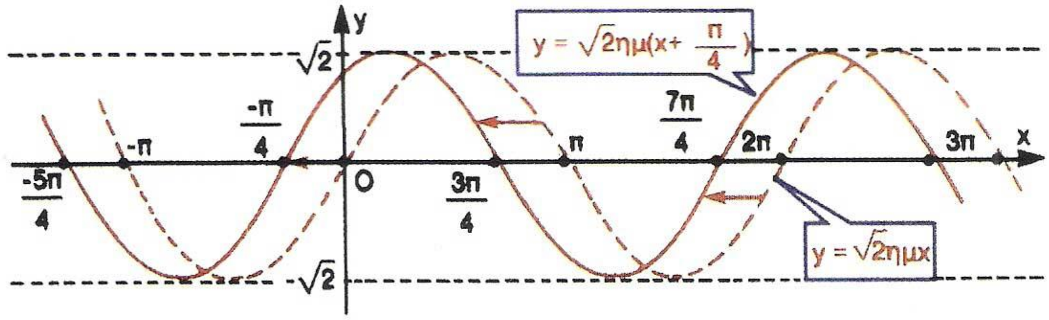
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

ΔΙΑΝΕΜΕΤΑΙ ΔΩΡΕΑΝ

Άλγεβρα

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 4ος

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός • Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος • Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου

Παπασταυρίδης Στάυρος • Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αμαρουσίου

Σβέρκος Ανδρέας • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

<u>ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ</u>
Ομάδα Εργασίας του
Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

<u>ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ</u>
Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

4.1 ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ

Η έννοια του Πολυωνύμου

Έστω x μια μεταβλητή που μπορεί να πάρει οποιαδήποτε πραγματική τιμή.

• Καλούμε μονώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής αχν, όπου α είναι ένας πραγματικός αριθμός και ν ένας θετικός ακέραιος.
Μονώνυμο του x καλούμε επίσης και κάθε πραγματικό αριθμό.

Για παράδειγμα, οι παραστάσεις:

$2x^3$, $-\frac{3}{5}x^5$, $0x^4$, $2x$ **και οι αριθμοί:** 2, -3, 0

είναι μονώνυμα του x.

• Καλούμε πολυώνυμο του x κάθε παράσταση της μορφής:

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots\ldots\ldots +$$
$$+\alpha_1 x + \alpha_0,$$

όπου ν είναι ένας φυσικός αριθμός και α_0, α_1, ..., α_ν **είναι πραγματικοί αριθμοί.**

Τα μονώνυμα $\alpha_\nu x^\nu$, $\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}$, ..., $\alpha_1 x$, α_0 **λέγονται όροι του πολυωνύμου και οι αριθμοί** α_ν, $\alpha_{\nu-1}$, ..., α_1, α_0

συντελεστές αυτού. Ειδικότερα ο α0 λέγεται σταθερός όρος του πολυωνύμου.
$0x^4+0x^3+2x^2-x+1$. Τα πολυώνυμα της μορφής α0, δηλαδή οι πραγματικοί αριθμοί, λέγονται σταθερά πολυώνυμα. Ειδικά το σταθερό πολυώνυμο 0 λέγεται μηδενικό πολυώνυμο.

Έτσι για παράδειγμα, οι παραστάσεις $3x^3+2x^2-x+2$, $0x^2-5x+1$, $5x^3-\frac{2}{3}x^2+0x+\frac{1}{3}$ και οι αριθμοί 2, 0 κτλ. είναι πολυώνυμα του x.

Η ισότητα μεταξύ δυο πολυωνύμων ορίζεται ως εξής:

Δυο πολυώνυμα
$\alpha_\mu x^\mu+\dots\dots\dots\dots+\alpha_1 x+\alpha_0$ και
$\beta_\nu x^\nu+\dots\dots\dots\dots+\beta_1 x+\beta_0$, με $\mu\geq\nu$

θα λέμε ότι είναι ίσα όταν:
$\alpha_0=\beta_0$, $\alpha_1=\beta_1,\dots\dots,$ $\alpha_\nu=\beta_\nu$ και
$\alpha_{\nu+1}=\alpha_{\nu+2}=\dots=\alpha_\mu=0$

Για παράδειγμα τα πολυώνυμα $0x^4+0x^3+2x^2-x+1$ και $2x^2-x+1$ είναι
ίσα. Επίσης τα πολυώνυμα $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ και $2x+3$ είναι ίσα αν και μόνο αν γ=3, β=2 και α=0.

Τα πολυώνυμα τα συμβολίζουμε συνήθως με P(x), Q(x), κτλ.

Έστω τώρα ένα πολυώνυμο

$$P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+$$
$$+.........+\alpha_1 x+\alpha_0$$

• Αν όλοι οι συντελεστές του είναι ίσοι με μηδέν, τότε το P(x) είναι ίσο με το πολυώνυμο 0 (μηδενικό πολυώνυμο).
• Αν όμως ένας από τους συντελεστές του είναι διαφορετικός από το μηδέν, τότε το P(x) παίρνει τη μορφή:

$$\alpha_\kappa x^\kappa+\alpha_{\kappa-1}x^{\kappa-1}+ +............+\alpha_1 x+\alpha_0, \quad \text{με } \alpha_\kappa\neq 0$$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός κ λέγεται βαθμός του πολυωνύμου P(x). Είναι φανερό ότι κάθε σταθερό και μη μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0. Για το μηδενικό πολυώνυμο δεν ορίζεται βαθμός.

Έτσι για παράδειγμα το πολυώνυμο $P(x)=-4x^3+3x-7$ είναι 3ου βαθμού, ενώ το Q(x) = 7 είναι μηδενικού βαθμού.

Αριθμητική Τιμή Πολυωνύμου

Έστω ένα πολυώνυμο $P(x)=\alpha_\nu x^\nu+\alpha_{\nu-1}x^{\nu-1}+ +............+\alpha_1 x+\alpha_0$

Αν αντικαταστήσουμε το x με ένα ορισμένο πραγματικό αριθμό ρ, τότε ο πραγματικός αριθμός
$$P(\rho)=\alpha_\nu\rho^\nu+\alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1}+$$
$$+...........+\alpha_1\rho+\alpha_0$$
που προκύπτει λέγεται αριθμητική τιμή ή απλά τιμή του πολυωνύμου για x=ρ.

Αν είναι P(ρ)=0, τότε λέγεται ρίζα του πολυωνύμου. Για παράδειγμα, η τιμή του πολυωνύμου
$P(x)=-x^3+2x^2+4x+1$,
για x=1 είναι $P(1)=-1^3+2\cdot 1^2+4\cdot 1+1=6$, ενώ
για $x=-1$ είναι $P(-1)=-(-1)^3+2\cdot(-1)^2+4\cdot(-1)+1=0$ που σημαίνει ότι ο -1 είναι ρίζα του πολυωνύμου P(x).

Είναι φανερό ότι:
• Το σταθερό πολυώνυμο c έχει τιμή c για όλες τις τιμές του x και
• Τα ίσα πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του x(*)

(*) Αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή ότι:
• Αν ένα πολυώνυμο έχει τιμή c για όλες τις τιμές του χ, τότε αυτό είναι το σταθερό πολυώνυμο c και
• Αν δυο πολυώνυμα έχουν ίσες τιμές για όλες τις τιμές του χ, τότε τα πολυώνυμα αυτά είναι ίσα.

Πράξεις με Πολυώνυμα

Μπορούμε να προσθέσουμε, να αφαιρέσουμε, ή να πολλαπλασιάσουμε πολυώνυμα, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, όπως φαίνεται στα επόμενα παραδείγματα:

1 i) $(x^3+2x^2-5x+7)+(4x^3-5x^2+3)=$

$=x^3+2x^2-5x+7+4x^3-5x^2+3=$

$=(1+4)x^3+(2-5)x^2-5x+(7+3)=$

$=5x^3-3x^2-5x+10$

[Πολυώνυμο 3^{ου} βαθμού]

ii) $(2x^3 - x^2 + 1) + (-2x^3 + 2x - 3) =$

$= 2x^3 - x^2 + 1 - 2x^3 + 2x - 3 =$

$= -x^2 + 2x - 2$

[Πολυώνυμο 2^{ου} βαθμού]

iii) $(x^3 - 3x^2 - 1) + (-x^3 + 3x^2 + 1) =$

$= x^3 - 3x^2 - 1 - x^3 + 3x^2 + 1 = 0$

[Μηδενικό Πολυώνυμο]

2.$(x^3 + 2x^2 - 5x + 7) - (4x^3 - 5x^2 + 3) =$

$= x^3 + 2x^2 - 5x + 7 - 4x^3 + 5x^2 - 3 =$

$= -3x^3 + 7x^2 - 5x + 4$

3. $(x^2 + 5x)(2x^3 + 3x) =$

$= x^2(2x^3 + 3x - 1) + 5x(2x^3 + 3x - 1) =$

$= 2x^5 + 3x^3 - x^2 + 10x^4 + 15x^2 - 5x =$

$= 2x^5 + 10x^4 + 3x^3 + 14x^2 - 5x$

[Πολυώνυμο 5^{ου} βαθμού]

Για το βαθμό του αθροίσματος και του γινομένου δυο πολυωνύμων αποδεικνύεται ότι:

• Αν το άθροισμα δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι μη μηδενικό πολυώνυμο,
τότε ο βαθμός του είναι ίσος ή μικρότερος από το μέγιστο των βαθμών των δυο πολυωνύμων.

• Ο βαθμός του γινομένου δυο μη μηδενικών πολυωνύμων είναι ίσος με το άθροισμα των βαθμών των πολυωνύμων αυτών.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° i) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το πολυώνυμο
$P(x) = (\lambda^2 - 1)x^3 + (\lambda^2 - 3\lambda + 2)x + \lambda - 1$ είναι το μηδενικό πολυώνυμο.
ii) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα πολυώνυμα $Q(x) = \lambda^2 x^3 + (\lambda - 2)x^2 + 3$ και
$R(x) = (5\lambda - 6)x^3 + (\lambda^2 - 4)x^2 + \lambda + 1$ είναι ίσα.

ΛΥΣΗ

i) Το P(x) θα είναι το μηδενικό πολυώνυμο, για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:
$\lambda^2 - 1 = 0,\ \ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$ και $\lambda - 1 = 0$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η λ = l.
Επομένως για λ = l το πολυώνυμο P(x) είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

ii) Τα Q(x) και R(x) θα είναι ίσα για εκείνες τις τιμές του λ για τις οποίες συναληθεύουν οι εξισώσεις:
$\lambda^2 = 5\lambda - 6,\ \ \lambda - 2 = \lambda^2 - 4$ και $3 = \lambda + 1$

Η κοινή λύση των εξισώσεων αυτών είναι η λ=2.
Επομένως για λ=2 τα πολυώνυμα Q(x) και R(x) είναι ίσα.

2° Αν $P(x) = x^2 + 3x + \alpha^2 - 1$, , να βρεθούν οι τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $P(-1) = 1$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $P(-1)=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (-1)^2+3(-1)+\alpha^2-1=1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha^2-4=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \alpha=-2$ ή $\alpha=2$

Επομένως οι ζητούμενες τιμές είναι οι: -2, 2.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Ποιες από τις παρακάτω παραστάσεις είναι πολυώνυμα του x:

i) $1-x^3$

ii) $\alpha^3-3\alpha^2x+3\alpha x^2-x^3$

iii) $x+\dfrac{1}{x}$

iv) $x^4-2x^{\frac{1}{3}}-4x-1$

2. Δίνονται τα πολυώνυμα $P(x)=x^2-5x+2$ και $Q(x)=x^3+3x+1$. Να βρεθούν τα πολυώνυμα:

i) $P(x)+Q(x)$

ii) $2P(x)-3Q(x)$

iii) $P(x)\cdot Q(x)$ iv) $[P(x)]^2$

3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\mu\in\mathbb{R}$, το πολυώνυμο

$P(x)=$

$$=(4\mu^3-\mu)x^3+4(\mu^2-\frac{1}{4})x-2\mu+1$$

είναι το μηδενικό πολυώνυμο.

4. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$ τα πολυώνυμα
$P(x) = (\alpha^2 - 3\alpha)x^3 + x^2 + \alpha$
και $Q(x) = -2x^3 + \alpha^2 x^2 + (\alpha^3 - 1)x + 1$ **είναι ίσα.**

5. Να εξετάσετε ποιοι από τους αριθμούς, που δίνονται με τα παρακάτω πολυώνυμα, είναι ρίζες τους.
i) $P(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x + 7$
$x = -1,\quad x=1$
ii) $Q(x) = -x^4 + 1$
$x = -1,\quad x=1, x=3.$

6. Να βρείτε για ποιες τιμές του $k \in \mathbb{R}$ το 2 είναι ρίζα του πολυωνύμου
$P(x) = x^3 - kx^2 + 5x + k.$

7. Για ποιες τιμές του $\alpha \in R$, η τιμή του πολυωνύμου $P(x) = 5x^2 + 3\alpha x + \alpha^2 - 2$ **για** $x = -1$ **είναι ίση με 1.**

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, γ, για τους οποίους το πολυώνυμο
$f(x) = 3x^2 - 7x + 5$ **παίρνει τη μορφή**
$f(x) = \alpha x(x+1) + \beta x + \gamma$

2. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β, για τους οποίους το πολυώνυμο
$P(x) = 3x^3 + \alpha x^2 + \beta x - 6$ **έχει ρίζες το —2 και το 3.**

3. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς λ και μ, για τους οποίους το πολυώνυμο $P(x)=2x^3+\lambda x^2+\mu x+6$ έχει ρίζα το 1 και ισχύει $P(-2)=-12$.

4. Να βρείτε το βαθμό του πολυωνύμου $P(x)=(9\lambda^3-4\lambda)x^3+(9\lambda^2-4)x-3\lambda+2$ για τις διάφορες τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$.

5. Να βρείτε πολυώνυμο P(x), για το οποίο ισχύει $(2x+1)P(x)=2x^3-9x^2-3x+1$.

4.2 ΔΙΑΙΡΕΣΗ ΠΟΛΥΩΝΥΜΩΝ

Αλγοριθμική διαίρεση

Γνωρίζουμε από το Γυμνάσιο την έννοια της Ευκλείδειας ή αλγοριθμικής διαίρεσης μεταξύ θετικών ακεραίων αριθμών.

Συγκεκριμένα γνωρίζουμε ότι:

Για κάθε ζεύγος φυσικών αριθμών Δ και δ με $\delta\neq 0$, υπάρχουν δύο μοναδικοί φυσικοί αριθμοί π και υ, τέτοιοι ώστε Δ=δπ+υ, $0\leq \upsilon<\delta$ (1)

Η ισότητα αυτή είναι γνωστή ως ταυτότητα της Ευκλείδειας διαίρεσης. Ο Δ λέγεται διαιρετέος, ο δ διαιρέτης, ο π πηλίκο και ο υ υπόλοιπο της διαίρεσης.

Η έννοια της διαίρεσης των πολυωνύμων είναι ανάλογη με την Ευκλείδεια διαίρεση που αναφέραμε παραπάνω. Συγκεκριμένα ισχύει:

ΘΕΩΡΗΜΑ (Ταυτότητα της διαίρεσης) Για κάθε ζεύγος πολυωνύμων Δ(x) και δ(x) με $\delta(x)\neq 0$ υπάρχουν δυο μοναδικά πολυώνυμα π(x) και υ(x), τέτοια ώστε:

$$\Delta(x)=\delta(x)\pi(x)+\upsilon(x), \quad (2)$$

όπου το υ(x) ή είναι το μηδενικό πολυώνυμο ή έχει βαθμό μικρότερο από το βαθμό του δ(x).

Όπως και στη διαίρεση μεταξύ φυσικών αριθμών το Δ(x) λέγεται διαιρετέος, το δ(x) διαιρέτης, το π(x) πηλίκο και το υ(x) υπόλοιπο της διαίρεσης.

Για να προσδιορίσουμε το πηλίκο π(x) και το υπόλοιπο υ(x) της διαίρεσης ενός πολυωνύμου Δ(x) με ένα πολυώνυμο δ(x), ακολουθούμε μια διαδικασία, ανάλογη με εκείνη της διαίρεσης των θετικών ακεραίων. Στο παράδειγμα που ακολουθεί περιγράφεται βήμα προς βήμα η διαδικασία της διαίρεσης του πολυωνύμου x^3-5x^2+2x-1 με το πολυώνυμο $x-3$.

1. Κάνουμε το σχήμα της διαίρεσης και γράφουμε τα δυο πολυώνυμα.

$$\begin{array}{l|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ \hline \end{array}$$

2. Βρίσκουμε τον πρώτο όρο x^2 του πηλίκου διαιρώντας τον πρώτο όρο x^3 του διαιρετέου με τον πρώτο όρο x του διαιρέτη.

$$x^3-5x^2+2x-1 \,\Big|\, \frac{x-3}{x^2}$$

3. Πολλαπλασιάζουμε το x^2 με $x-3$ και το γινόμενο x^3-3x^2 το αφαιρούμε από το διαιρετέο.

Βρίσκουμε έτσι το πρώτο μερικό υπόλοιπο $-2x^2+2x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\ -x^3+3x^2 \qquad\qquad & \overline{\;x^2\;} \\ \hline -2x^2+2x-1 & \end{array}$$

4. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-2x^2+2x-1$. Βρίσκουμε έτσι το δεύτερο μερικό υπόλοιπο $-4x-1$.

$$\begin{array}{r|l} x^3-5x^2+2x-1 & \\ -x^3+3x^2 \qquad\qquad & x-3 \\ \hline -2x^2+2x-1 & x^2-2x \\ 2x^2-6x \qquad & \\ \hline -4x-1 & \end{array}$$

5. Τέλος επαναλαμβάνουμε τα βήματα 2 και 3 με νέο διαιρετέο το $-4x-1$. Βρίσκουμε έτσι το τελικό υπόλοιπο -13 και το πηλίκο x^2-2x-4.

$$
\begin{array}{l|l}
\quad x^3-5x^2+2x-1 & x-3 \\
\underline{-x^3+3x^2 \qquad\qquad\quad} & \overline{x^2-2x-4} \\
\qquad -2x^2+2x-1 & \\
\qquad \underline{\;2x^2-6x \qquad} & \\
\qquad\qquad -4x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{\;4x-12} & \\
\qquad\qquad\quad -13 &
\end{array}
$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει η ισότητα:

$x^3-5x^2+2x-1=$

$=(x-3)\cdot(x^2-2x-4)+(-13)$

(διαιρετέος) = (διαιρέτης) · (πηλίκο) + (υπόλοιπο)

που εκφράζει την ταυτότητα της διαίρεσης.

Αν ακολουθήσουμε την παραπάνω διαδικασία για τα πολυώνυμα $4x^4+x^2-3x-1$ και $2x^2+x$, έχουμε:

$$
\begin{array}{l|l}
\quad 4x^4+0x^3+x^2-3x-1 & 2x^2+x \\
\underline{-4x^4-2x^3 \qquad\qquad\qquad\quad} & \overline{2x^2-x+1} \\
\qquad -2x^3+x^2-3x-1 & \\
\qquad \underline{\;2x^3+x^2 \qquad\qquad} & \\
\qquad\qquad 2x^2-3x-1 & \\
\qquad\qquad \underline{-2x^2-x \qquad} & \\
\qquad\qquad\quad -4x-1 &
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι συμπληρώσαμε τη δύναμη x^3 με συντελεστή το μηδέν.

Ομοίως για τα πολυώνυμα $2x^3+2x^2-x-1$ και $2x^2-1$ έχουμε

$$
\begin{array}{rrrr|l}
2x^3 & +2x^2 & -x & -1 & \\
-2x^3 & & +x & & 2x^2-1 \\ \cline{1-4} \cline{5-5}
 & 2x^2 & & -1 & x+1 \\
 & -2x^2 & & +1 & \\ \cline{1-4}
 & & & 0 &
\end{array}
$$

Παρατηρήστε ότι στα παραπάνω παραδείγματα η διαίρεση τελειώνει, όταν το υπόλοιπο γίνει μηδέν ή ο βαθμός του γίνει μικρότερος από το βαθμό του διαιρέτη.

Στο τελευταίο παράδειγμα βλέπουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης είναι 0,

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η διαίρεση είναι τέλεια.

Γενικά, αν σε μια διαίρεση είναι υ(x) = 0, τότε η διαίρεση λέγεται τέλεια και η ταυτότητα της διαίρεσης γράφεται

$$\Delta(x)=\delta(x)\cdot \pi(x)$$

Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι το δ(x) διαιρεί το Δ(x) ή ότι το δ(x) είναι παράγοντας του Δ(x) ή ότι το Δ(x) διαιρείται με το δ(x) ή ακόμη ότι το δ(x) είναι διαιρέτης του Δ(x). Έτσι για παράδειγμα το $2x^2-1$ είναι παράγοντας ή διαιρέτης του $2x^3+2x^2-x-1$.

Διαίρεση πολυωνύμου με x—ρ.

Η ταυτότητα της διαίρεσης του πολυωνύμου P(x) με το πολυώνυμο $x-\rho$ γράφεται.

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon(x)$$

Επειδή ο διαιρέτης $x-\rho$ είναι πρώτου βαθμού, το υπόλοιπο της διαίρεσης θα είναι ένα σταθερό πολυώνυμο υ. Έτσι έχουμε:

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+\upsilon$$

και, αν θέσουμε x=ρ, παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)+\upsilon=0+\upsilon=\upsilon$$

Επομένως

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

Αποδείξαμε λοιπόν ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ Το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το $x-\rho$ είναι ίσο με την τιμή του πολυωνύμου για x=ρ. Είναι δηλαδή $\upsilon=P(\rho)$

Για παράδειγμα, το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3+3x^2-13x-15$ με το $x-2$ είναι $\upsilon=P(2)=2^3+3\cdot 2^2-13\cdot 2-15=-21$, ενώ με το x+1 που γράφεται $x-(-1)$, είναι $\upsilon=P(-1)=(-1)^3+3\cdot(-1)^2-13\cdot(-1)-15=0$.

Παρατηρούμε ότι:

- **$P(-1)=0$, δηλαδή ότι το -1 είναι ρίζα του P(x) και**
- **$P(x)=(x+1)\pi(x)+0=(x+1)\pi(x)$, δηλαδή ότι το x+1 είναι παράγοντας του P(x).**

Γενικά ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

ΘΕΩΡΗΜΑ Ένα πολυώνυμο $P(x)$ έχει παράγοντα το $x-\rho$ αν και μόνο αν το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή αν και μόνο αν $P(\rho) = 0$.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$. Τότε

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)$$

Από την ισότητα αυτή για $x = \rho$ παίρνουμε

$$P(\rho)=(\rho-\rho)\pi(\rho)=0,$$

που σημαίνει ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$.

Αντιστρόφως: Έ σ τ ω ότι το ρ είναι ρίζα του $P(x)$, δηλαδή ισχύει $P(\rho) = 0$.

Τότε από τη σχέση

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x)+P(\rho)$$

Παίρνουμε

$$P(x)=(x-\rho)\pi(x),$$

που σημαίνει ότι το $x-\rho$ είναι παράγοντας του $P(x)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα $x+2$ και $x-1$είναι παράγοντες του πολυωνύμου $P(x)=x^3+x^2-x+2$.

ΛΥΣΗ

Το $x+2$ γράφεται $x-(-2)$. Επειδή $P(-2)=(-2)^3+(-2)^2-(-2)+2=0$, το -2

είναι ρίζα του P(x). Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, το x+2 είναι παράγοντας του P(x). Επειδή $P(1)=1^3+1^2-1+2=3\neq 0$, το 1 δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το $x-1$δεν είναι παράγοντας του P(x).

2ο Για ποιες τιμές του $\lambda\in$ □:
i) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=x^3-3x^2+3x-1$ με το x+λ είναι το μηδέν.
ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $Q(x)=\lambda^2x^4+3\lambda x^2-3$ με το $x-1$είναι το 1.

ΛΥΣΗ

i) Επειδή $x+\lambda=x-(-\lambda)$, το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το x+λ είναι $\upsilon=P(-\lambda)$. Επομένως, για να είναι υ = 0 αρκεί:

$$P(-\lambda)=0\Leftrightarrow(-\lambda)^3-3(-\lambda)^2+3(-\lambda)-1=0$$
$$\Leftrightarrow -\lambda^3-3\lambda^2-3\lambda-1=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=0$$
$$\Leftrightarrow (\lambda+1)^3=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=-1$$

ii) Το υπόλοιπο της διαίρεσης του Q(x) με το $x-1$ είναι υ = Q(1).

Επομένως, για να είναι υ = 1 αρκεί:

$$Q(1)=1\Leftrightarrow \lambda^2 1^4+3\lambda 1^2-3=1$$
$$\Leftrightarrow \lambda^2+3\lambda-4=0$$
$$\Leftrightarrow \lambda=1 \quad \text{ή} \quad \lambda=4$$

Σχήμα Horner (Χόρνερ)

Έστω ότι θέλουμε να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου, π.χ. του $P(x)=3x^3-8x^2+7x+2$, με ένα πολυώνυμο της μορφής $x-\rho$.

Η Ευκλείδεια διαίρεση του P(x) με το $x-\rho$ είναι η ακόλουθη:

$$
\begin{array}{l|l}
3x^3-8x^2 \qquad\qquad +7x+2 & x-\rho \\
\hline
-3x^3+3\rho x^2 & 3x^2+(3\rho-8)x+\rho(3\rho-8)+7 \\
\hline
(3\rho-8)x^2 \qquad +7x+2 & \\
-(3\rho-8)x^2+\rho(3\rho-8)x & \\
\hline
[\rho(3\rho-8)+7]x+2 & \\
-[\rho(3\rho-8)+7]x+\rho[\rho(3\rho-8)+7] & \\
\hline
\underbrace{\rho[\rho(3\rho-8)+7]+2}_{P(\rho)} &
\end{array}
$$

Η παραπάνω διαίρεση μπορεί να παρουσιασθεί εποπτικά με τον ακόλουθο πίνακα που είναι γνωστός ως σχήμα του Horner

Συντελεστές του $P(x)$

3	-8	7	2	ρ
	3ρ	$(3\rho-8)\rho$	$[(3\rho-8)\rho+7]\rho$	
3	$3\rho-8$	$(3\rho-8)\rho+7$	$[(3\rho-8)\rho+7]\rho+2$	

Συντελεστές Πηλίκου　　　Υπόλοιπο

Για την κατασκευή του πίνακα αυτού εργαζόμαστε ως εξής:

— Στην πρώτη γραμμή γράφουμε τους συντελεστές του πολυωνύμου P(x) και στην πρώτη θέση της τρίτης γραμμής τον πρώτο συντελεστή του P(x).
Στη συνέχεια ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής:
— Κάθε στοιχείο της δεύτερης γραμμής προκύπτει με πολλαπλασιασμό του αμέσως προηγούμενου στοιχείου της τρίτης γραμμής επί ρ.
— Κάθε άλλο στοιχείο της τρίτης γραμμής προκύπτει ως άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων της πρώτης και δεύτερης γραμμής.

Το τελευταίο στοιχείο της τρίτης γραμμής είναι το υπόλοιπο της διαίρεσης του P(x) με το (x—ρ), δηλαδή η τιμή του πολυωνύμου P(x) για x = ρ. Τα άλλα στοιχεία της τρίτης γραμμής είναι οι συντελεστές του πηλίκου της διαίρεσης.

Ας εργασθούμε τώρα με το σχήμα Horner για να βρούμε το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)=3x^5+3x^4+6x-13$ με το $x-2$.

3	3	0	0	6	-13	ρ=2
		18	36	72	156	
3	9	18	36	78	143	

[Συμπληρώσαμε με 0 τους συντελεστές των δυνάμεων του x που δεν υπάρχουν.]

Επομένως το πηλίκο της διαίρεσης είναι $\pi(x)=3x^4+9x^3+18x^2+36x+78$ και το υπόλοιπο υ = P(2) = 143

Σχόλιο: Στο παραπάνω παράδειγμα, αν αντί για το σχήμα Horner εκτελέσουμε τη διαίρεση, θα διαπιστώσουμε ότι οι πράξεις που απαιτούνται είναι αρκετά πιο επίπονες. Το ίδιο θα συμβεί, αν δοκιμάσουμε να υπολογίσουμε το P(2) θέτοντας όπου x το 2. Το σχήμα Horner είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στις περιπτώσεις όπου το ρ ή ο βαθμός του P(x) είναι μεγάλος αριθμός. Για το λόγο αυτό, τόσο στις διαιρέσεις με το $x-\rho$όσο και στον υπολογισμό της τιμής P(ρ), θα χρησιμοποιούμε συνήθως το σχήμα Horner.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να βρεθεί το πηλίκο και το υπόλοιπο της διαίρεσης $(4x^2-8\alpha x+4\alpha^2):(x-\alpha)$

ΛΥΣΗ

Το σχήμα Horner με διαιρετέο το $4x^2-8\alpha x+4\alpha^2$ και διαιρέτη το $x-\alpha$ δίνει:

4	-8α	$4\alpha^2$	α
	4α	$-4\alpha^2$	
4	-4α	0	

Άρα π(x) = 4x—4α και υ(x) = 0

2ο Αν ν είναι ένας θετικός ακέραιος, να αποδειχθεί η ταυτότητα:

$$(x^{\nu}-\alpha^{\nu})=$$
$$=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+x^{\nu-2}\alpha+$$
$$+x^{\nu-3}\alpha^{2}+......+\alpha^{\nu-1})$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Το σχήμα Horner με διαιρετέο το $x^{\nu}-\alpha^{\nu}$ και διαιρέτη το $x-\alpha$ δίνει

1	0	0	…	0	$-\alpha^{\nu}$	ρ=α
	α	α2	…	$\alpha^{\nu-1}$	α^{ν}	
1	α	α2	...	$\alpha^{\nu-1}$	0	

Επομένως το υπόλοιπο της διαίρεσης $(x^{\nu}-\alpha^{\nu}):(x-\alpha)$ είναι μηδέν, ενώ το πηλίκο είναι το πολυώνυμο

$$\pi(x)=x^{\nu-1}+\alpha x^{\nu-2}+\alpha^{2}x^{\nu-3}+$$
$$+......+\alpha^{\nu-1}$$

Τέλος, από την ταυτότητα της διαίρεσης προκύπτει ότι:
$x^{\nu}-\alpha^{\nu}=(x-\alpha)\pi(x)+0$ **ή**

$$x^{\nu}-\alpha^{\nu}=(x-\alpha)(x^{\nu-1}+$$
$$+x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^{2}+$$
$$+......+\alpha^{\nu-1})$$

3ο Να εξεταστεί για ποιες τιμές του φυσικού αριθμού ν το x+α είναι παράγοντας του $x^{\nu}+\alpha^{\nu}$, $\alpha\neq0$. Γ ι ' αυτές τις τιμές του ν, το $x^{\nu}+\alpha^{\nu}$ να γίνει γινόμενο της μορφής (x+α) π(x).

ΛΥΣΗ

Αν θέσουμε $P(x)=x^{\nu}+\alpha^{\nu}$, τότε $P(-\alpha)=(-\alpha)^{\nu}+\alpha^{\nu}$.
Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:
• Αν ν άρτιος, τότε $P(-\alpha)=\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}=2\alpha^{\nu}\neq 0$, που σημαίνει ότι το $-\alpha$ δεν είναι ρίζα του P(x). Επομένως το x+α δεν είναι παράγοντας του $x^{\nu}+\alpha^{\nu}$.
• Αν ν περιττός, τότε $P(-\alpha)=-\alpha^{\nu}+\alpha^{\nu}=0$ που σημαίνει ότι το $-\alpha$ είναι ρίζα του P(x).
Επομένως το x+α είναι παράγοντας του $x^{\nu}+\alpha^{\nu}$.

Στη συνέχεια, αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 2 για ν περιττό βρίσκουμε την ταυτότητα:

$$x^{\nu}+\alpha^{\nu}=$$
$$=(x+\alpha)(x^{\nu-1}-x^{\nu-2}\alpha+x^{\nu-3}\alpha^{2}-$$
$$-\ldots\ldots+\alpha^{\nu-1})$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να κάνετε τις παρακάτω διαιρέσεις και να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσηςσε κάθε περίπτωση.

i) $(3x^{3}+6x^{2}-17x+20):(x+3)$

ii) $(x^{4}-81):(x-3)$

iii) $(24x^{5}+20x^{3}-16x^{2}-15):(6x^{2}+5)$

iv) $(2x^{4}+4x^{3}-5x^{2}+3x-2):(x^{2}+2x-3)$

v) $x^{4}:(x-1)^{3}$

vi) $(x^{5}+7):(x^{3}-1)$

2. Να βρείτε το υπόλοιπο της διαίρεσης $(18x^{80}-6x^{50}+4x^{20}-2):(x+1)$.

3. Να βρείτε τις τιμές του k, για τις οποίες το x—1 είναι παράγοντας του $g(x)=k^2x^4+3kx^2-4$.

4. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner να βρείτε τα πηλίκα και τα υπόλοιπα των διαιρέσεων:

i) $(-x^3+75x-250):(x+10)$

ii) $(x^3+512):(x+8)$

iii) $(x^5+1):(x-1)$

iv) $-3x^4:(x-2)$

v) $(4x^3+16x^2-23x-15):(x+\frac{1}{2})$

5. Αν $P(x)=-2x^3-2x^2-x+2409$ να βρείτε το $P(-11)$.

6. Να αποδείξετε ότι τα πολυώνυμα της μορφής $x-\rho$ που δίνονται σε κάθε περίπτωση, είναι παράγοντες του P(x).

i) $P(x)=x^4-25x^2+144$, $x+3$

ii) $P(x)=16x^4-8x^3+9x^2+14x-4$, $x-\frac{1}{4}$

iii) $P(x)=x^3-3x^2+2$, $x-1-\sqrt{3}$

7. Αν ν είναι ένας άρτιος θετικός ακέραιος, να αποδείξετε ότι το x+y είναι παράγοντας του $x^\nu-y^\nu$.

8. Να αποδείξετε ότι τα παρακάτω πολυώνυμα δεν έχουν παράγοντα της μορφής $x-\rho$.

i) $P(x)=4x^4+7x^2+12$

ii) $Q(x) = -5x^6 - 3x^2 - 4$

9. Αν ο ν είναι περιττός θετικός ακέραιος, τότε το x+1 είναι παράγοντας του $x^{\nu} + 1$.
Να γράψετε την ταυτότητα της διαίρεσης $(x^{\nu} + 1) : (x + 1)$.

10. Να κάνετε τις διαιρέσεις:
i) $(3x^2 - 2\alpha x - 8\alpha^2) : (x - 2\alpha)$
ii) $(x^3 + \alpha x^2 - \alpha^2 x - \alpha^3) : (x + \alpha)$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι, αν το ν είναι παράγοντας του μ, τότε και το $x^{\nu} - \alpha^{\nu}$ είναι παράγοντας του $x^{\mu} - \alpha^{\mu}$, (μ, ν θετικοί ακέραιοι).

2. i) Να αποδείξετε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης ενός πολυωνύμου P(x) με το αx+β, $\alpha \neq 0$ είναι $\upsilon = P\left(-\frac{\beta}{\alpha}\right)$.
ii) Να βρείτε τις συνθήκες, για τις οποίες το πολυώνυμο $\alpha x^3 + \beta$ διαιρείται με το αx+β.

3. Με τη βοήθεια του σχήματος Horner μόνο, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο
$P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x^2 - 3x + 2$ διαιρείται με το
$(x-1)(x-2)$ και να βρείτε το πηλίκο.

4. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο
$P(x) = (x+1)^{2\nu} - x^{2\nu} - 2x - 1, \quad \nu \neq 0$ έχει παράγοντες όλους τους παράγοντες του $2x^3 + 3x^2 + x$.

5. Να υπολογίσετε τους $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, για τους οποίους το $P(x) = \alpha x^{\nu+1} + \beta x^{\nu} + 1$ έχει παράγοντα το $(x-1)^2$.

4.3 ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

Σε προηγούμενες τάξεις γνωρίσαμε τον τρόπο επίλυσης των εξισώσεων

$$\alpha x + \beta = 0, \quad \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0 \quad \text{και} \quad \alpha x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0,$$

με $\alpha \neq 0$

Οι εξισώσεις αυτές είναι ειδικές περιπτώσεις μιας κατηγορίας εξισώσεων της μορφής P(x) = 0, όπου P(x) πολυώνυμο, οι οποίες λέγονται πολυωνυμικές εξισώσεις.
Συγκεκριμένα:

Πολυωνυμική εξίσωση βαθμού ν ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής

$$\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0, \; \alpha_\nu \neq 0$$

Για παράδειγμα, οι εξισώσεις $2x^3 - 5x^2 + x - 2 = 0$ και $-3x^6 + 5x^2 + 1 = 0$ είναι πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 6ου βαθμού αντιστοίχως.

Ρίζα μιας πολυωνυμικης εξίσωσης ονομάζουμε κάθε ρίζα του πολυωνύμου $P(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1} x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ δηλαδή κάθε αριθμό ρ, για τον οποίο ισχύει P(ρ) = 0.

Όπως για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 1ου και 2ου βαθμού, έτσι και για τις πολυωνυμικές εξισώσεις 3ου και 4ου βαθμού έχουν βρεθεί γενικοί τρόποι επίλυσής τους. Οι τρόποι αυτοί όμως απαιτούν γνώσεις που είναι έξω από το σκοπό αυτού του βιβλίου και δε θα αναπτυχθούν εδώ. Τέλος, έχει αποδειχθεί ότι γενικός τρόπος επίλυσης για πολυωνυμικές εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4 δεν υπάρχει. Για τους λόγους αυτούς, για την επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων βαθμού μεγαλύτερου από 2, θα περιοριστούμε στην γνωστή μας παραγοντοποίηση.

Η επίλυση μια εξίσωσης με τη μέθοδο αυτή στηρίζεται στην ισοδυναμία

$$P_1(x)\cdot P_2(x)\cdot \ldots\ldots \cdot P_k(x)=0 \Leftrightarrow (P_1(x)=0 \quad ή \quad P_2(x)=0 \quad ή \quad \ldots\ldots P_k(x)=0)$$

Δηλαδή, για να λύσουμε μια πολυωνυμική εξίσωση P(x) = 0, παραγοντοποιούμε το P(x) και αναγόμαστε έτσι στην επίλυση πολυωνυμικών εξισώσεων μικρότερου βαθμού.

Για παράδειγμα, ας λύσουμε την εξίσωση $x^3-3x+2=0$. Αυτή γράφεται:

$$\begin{aligned}
&x^3-3x+2=0 \Leftrightarrow\\
&\Leftrightarrow x^3-x-2x+2=0\\
&\Leftrightarrow x(x^2-1)-2(x-1)=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)[x(x+1)-2]=0\\
&\Leftrightarrow (x-1)(x^2+x-2)=0\\
&\Leftrightarrow x-1=0 \quad ή \quad x^2+x-2=0\\
&\Leftrightarrow x=1 \quad ή \quad x=-2
\end{aligned}$$

Παράγοντας της μορφής x-ρ

Το θεώρημα που ακολουθεί μας βοηθά σε ορισμένες περιπτώσεις, στην εύρεση πρωτοβάθμιων παραγόντων.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ακέραιων ριζών) Έστω η πολυωνυμική εξίσωση $\alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0 = 0$ με ακέραιους συντελεστές.

Αν ο ακέραιος $\rho \neq 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε ο ρ είναι διαιρέτης του σταθερού όρου α0.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν ο $\rho \neq 0$είναι ρίζα της εξίσωσης, τότε διαδοχικά έχουμε

$$\alpha_\nu \rho^\nu + \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1\rho + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow \alpha_0 = -\alpha_\nu\rho^\nu - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-1} - \ldots\ldots - \alpha_1\rho$$

$$\Leftrightarrow \alpha_0 = \rho(-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots\ldots - \alpha_1)$$

Επειδή οι ρ, α1, ,α2,..., αν είναι ακέραιοι έπεται ότι και ο $-\alpha_\nu\rho^{\nu-1} - \alpha_{\nu-1}\rho^{\nu-2} - \ldots\ldots - \alpha_1$ είναι ακέραιος. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε, ότι ο ρ είναι διαιρέτης του α_0.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί η εξίσωση $x^3-3x^2+x+2=0$

ΛΥΣΗ

Οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι οι διαιρέτες ±1, ±2 του σταθερού όρου. Με το σχήμα Horner εξετάζουμε αν κάποιος από αυτούς μηδενίζει το πολυώνυμο $P(x)=x^3-3x^2+x+2$.

1	−3	1	2	ρ=1
	1	−2	−1	
1	−2	−1	1	

$P(1)=1\neq 0$
Άρα το 1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	−3	1	2	ρ=−1
	−1	4	−5	
1	−4	5	−3	

$P(-1)=-3\neq 0$
Άρα το -1 δεν είναι ρίζα του P(x)

1	-3	1	2	$\rho=2$
	2	-2	-2	
1	-1	-1	0	

$P(2)=0$

Άρα το 2 είναι ρίζα του P(x)

Επομένως το $x-2$ είναι παράγοντας του P(x). Συγκεκριμένα από το τελευταίο σχήμα έχουμε

$$P(x)=(x-2)(x^2-x-1)$$

οπότε η εξίσωση γράφεται $(x-2)(x^2-x-1)=0$ και έχει ρίζες τους αριθμούς 2, $\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ και $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Σχόλιο: Από το παραπάνω παράδειγμα συμπεραίνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος δεν αληθεύει. Με άλλα λόγια μπορεί ένας ακέραιος ρ να είναι διαιρέτης του α0 , χωρίς αυτός να είναι κατ' ανάγκη και ρίζα της εξίσωσης π.χ. ο ρ=1.

2ο Να λυθεί η εξίσωση $x^4+5x^3+9x^2+8x+4=0$

ΛΥΣΗ

Οι διαιρέτες του 4 είναι οι: ±1, ±2, ±4. Επειδή όλοι οι συντελεστές της εξίσωσης είναι θετικοί, οι διαιρέτες 1, 2, και 4 αποκλείεται να είναι ρίζες της. Επομένως οι πιθανές ακέραιες ρίζες είναι -1, -2 και -4.

Αν εργαστούμε όπως στο προηγούμενο παράδειγμα, βρίσκουμε $P(-1)=1\neq 0$, ενώ για $\rho=-2$ έχουμε:

1	5	9	8	4	$\rho=-2$
	-2	-6	-6	-4	
1	3	3	2	0	

$P(-2)=0$

Άρα το -2 δεν είναι ρίζα του $P(x)$

Η εξίσωση τότε γράφεται

$$(x+2)(x^3+3x^2+3x+2)=0$$

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία για το $Q(x)=x^3+3x^2+3x+2$

και $\rho=-2$ έχουμε

1	3	3	2	$\rho=-2$
	-2	-2	-2	
1	1	1	0	

$Q(-2)=0$

Άρα το -2 δεν είναι ρίζα του $Q(x)$

Επομένως είναι $x^3+3x^2+3x+2=(x+2)(x^2+x+1)$ και η αρχική εξίσωση γράφεται $(x+2)^2(x^2+x+1)=0$

Η τελευταία έχει μια μόνο διπλή ρίζα τον αριθμό -2.

Πρόσημο γινομένου

Έστω ότι θέλουμε να μελετήσουμε ένα γινόμενο $P(x)=A(x)\cdot B(x)\cdot .....\cdot \Phi(x)$ ως προς το πρόσημό του, όπου οι παράγοντες $A(x), B(x), ..., \Phi(x)$ είναι της μορφής αx + β (πρωτοβάθμιοι) ή της μορφής $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ (τριώνυμα).
Βρίσκουμε το πρόσημο κάθε παράγοντα χωριστά και στη συνέχεια το πρόσημο του P(x) , όπως φαίνεται στο παράδειγμα που ακολουθεί.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να βρεθεί για τις διάφορες τιμές του $x\in\mathbb{R}$ το πρόσημο του γινομένου $P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$.

ΛΥΣΗ

Αρχικά βρίσκουμε το πρόσημο του κάθε παράγοντα χωριστά ως εξής:

✓**Επειδή**

$$x-1\geq 0 \Leftrightarrow x\geq 1,$$

το $x-1$ είναι θετικό για x >1 , μηδέν για x =1 και αρνητικό για x <1 .

✓**Επειδή**

$$x^2+x-6\geq 0 \Leftrightarrow (x+3)(x-2)\geq 0 \Leftrightarrow x\leq -3 \quad ή \quad x\geq 2,$$

το x^2+x-6 είναι θετικό για $x<-3$ και για x > 2 , μηδέν $x=-3$ και για x = 2 και αρνητικό για $-3<x<2$.

✓**Επειδή το $2x^2+x+1$ έχει διακρίνουσα $\Delta=1-8=-7<0$, το τριώνυμο αυτό είναι θετικό για κάθε $x\in\mathbb{R}$.**

Ο προσδιορισμός, τώρα, του προσήμου του γινομένου P(x) γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα, εφαρμόζοντας τον κανόνα των προσήμων.

x	$-\infty$	-3		1		2		$+\infty$
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$		$+$	
x^2+x-6	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x^2+x+1$	$+$		$+$		$+$		$+$	
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

Ανισώσεις της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots\ldots \cdot \Phi(x) > 0 \quad (< 0)$

Άμεση εφαρμογή των παραπάνω έχουμε στην επίλυση ανισώσεων της μορφής $A(x)\cdot B(x)\cdot \ldots\ldots \cdot \Phi(x) > 0 \quad (< 0)$, όπως είναι για παράδειγμα η ανίσωση

$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)<0$
Προκειμένου να λύσουμε την ανίσωση αυτή αρκεί να βρούμε τις τιμές του $x \in \mathbb{R}$ για τις οποίες το γινόμενο $P(x)=(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)$ είναι αρνητικό.

Από την πρώτη και την τελευταία γραμμή του πίνακα προσήμου του P(x) διαπιστώνουμε ότι η ανίσωση αληθεύει όταν $x \in (-\infty,-3) \cup (1,2)$.

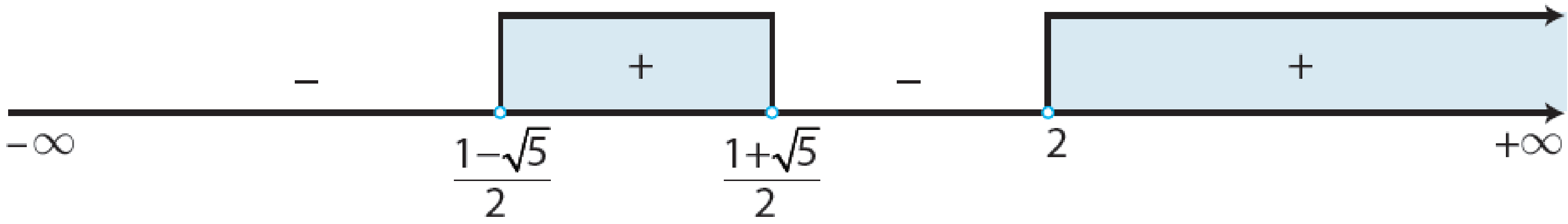
Να λυθεί η ανίσωση $x^3-3x^2+x+2>0$

ΛΥΣΗ

Αν εργαστούμε όπως στο παράδειγμα 1, η ανίσωση γράφεται

$$(x-2)(x^2-x-1)>0 \text{ ή } (x-2)\left(x-\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)>0.$$

Τοποθετούμε τις ρίζες του $P(x)=x^3-3x^2+x+2$ σε άξονα και παρατηρούμε ότι:
Στο 1ο από δεξιά διάστημα $(2,+\infty)$ το P(x) είναι θετικό, αφού όλοι οι παράγοντες είναι θετικοί. Στο επόμενο διάστημα $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2},2\right)$ το P(x) είναι αρνητικό, αφού ένας μόνο παράγοντας, ο $x-2$, είναι αρνητικός. Αν συνεχίσουμε έτσι, βρίσκουμε το πρόσημο του P(x) σε όλα τα διαστήματα όπως φαίνεται στο σχήμα.



Επομένως οι λύσεις της ανίσωσης είναι τα $x \in \mathbb{R}$, με $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ή x>2.

Προσδιορισμός ρίζας με προσέγγιση

Όταν ο ακριβής προσδιορισμός των ριζών μιας εξίσωσης είναι δύσκολος ή αδύνατος, τότε χρησιμοποιούνται διάφορες μέθοδοι για να προσδιοριστούν με προσέγγιση οι ρίζες αυτές. Μια τέτοια προσεγγιστική μέθοδος, που παρουσιάζεται βήμα προς βήμα στο παράδειγμα που ακολουθεί, στηρίζεται στο παρακάτω θεώρημα:

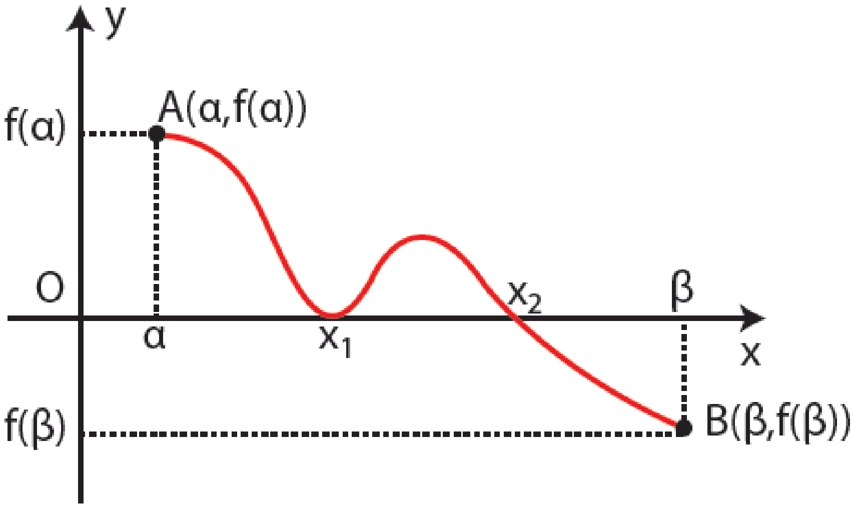
ΘΕΩΡΗΜΑ Έστω η συνάρτηση

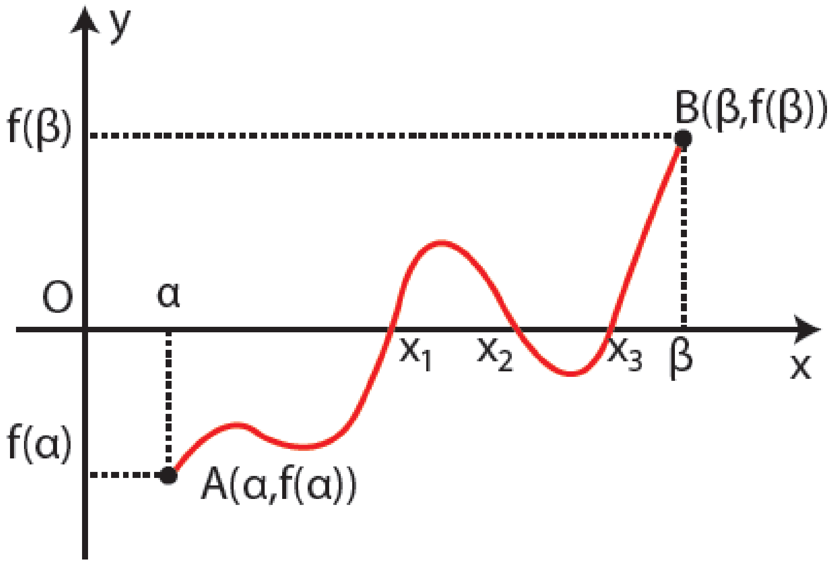
$$f(x) = \alpha_\nu x^\nu + \alpha_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots\ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$$

Αν για δυο πραγματικούς αριθμούς α, β με α<β οι τιμές f(α), f(β) της συνάρτησης είναι ετερόσημες, τότε υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης f(x) = 0 μεταξύ των α, β.

Το παραπάνω θεώρημα ερμηνεύεται γεωμετρικά ως εξής:

Αν η γραφική παράσταση της f περνάει από δυο σημεία Α (α, f(α)) και Β(β,f(β)) που βρίσκονται εκατέρωθεν του άξονα x'x, τότε αυτή τέμνει τον άξονα σε ένα τουλάχιστον σημείο με τετμημένη μεταξύ των α και β.





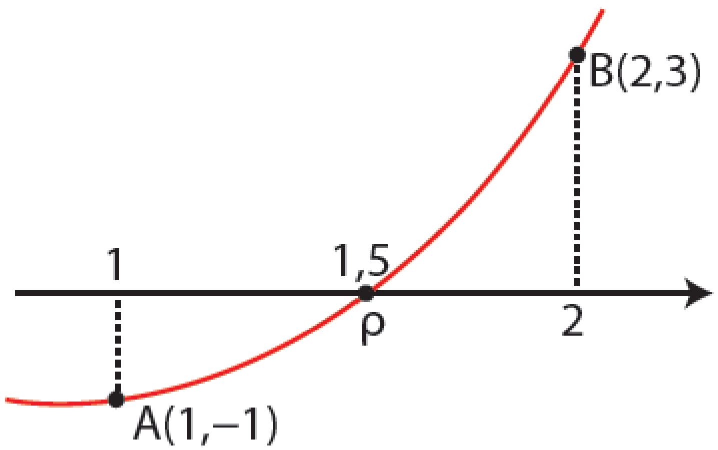
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Να αποδειχτεί ότι η εξίσωση $x^3 - 3x + 1 = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα μεταξύ των αριθμών 1 και 2. Στη συνέχεια να βρεθεί μια ρίζα με προσέγγιση δεκάτου.

ΛΥΣΗ

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 3x + 1$

1ο βήμα: Έχουμε $\begin{cases} f(1) = -1 < 0 \\ f(2) = 3 > 0 \end{cases}$



Επομένως, σύμφωνα με το παραπάνω θεώρημα, υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα της εξίσωσης στο διάστημα (1,2)

2ο βήμα: Βρίσκουμε τις τιμές της συνάρτησης στα ενδιάμεσα σημεία 1,1, 1,2, ... 1,9 και παρατηρούμε ότι:

$$\begin{cases} f(1{,}5) \simeq -0{,}13 < 0 \\ f(1{,}6) \simeq 0{,}30 > 0 \end{cases}$$

Επομένως υπάρχει μια τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα (1,5 , 1,6).

3ο βήμα: Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία στο διάστημα (1,5 , 1,6) και έχουμε:

$$\begin{cases} f(1{,}53) \simeq -0{,}01 < 0 \\ f(1{,}54) \simeq 0{,}03 > 0 \end{cases}$$

Επομένως υπάρχει μια ρίζα ρ στο διάστημα (1,53 , 1,54) δηλαδή ισχύει 1,53 < ρ < 1,54.

Άρα με προσέγγιση δεκάτου είναι ρ = 1,5.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1.Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $5x^4 = 6x^2$

ii) $x^3 + 2x^2 - 9x - 18 = 0$

iii) $3x^5 + 5x^4 = 3x^3 + 5x^2$

iv) $x^6 - 64 = 0$

v) $x^3 + x^2 - 2 = 0$

vi) $x^3 - 7x + 6 = 0$

vii) $(x+1)^3 + 1 = 0$

viii) $7(3x+2)^2(1-x)^2 - (3x+2)(1-x)^3 = 0$

ix) $x^3 + 8 = 7(x^2 + 5x + 6) + 9x^2 - 36$ x) $x^4 - 3x^3 + 6x - 4 = 0$

2. Να βρείτε τις ακέραιες ρίζες των εξισώσεων

i) $x^3 - 3x^2 + x + 2 = 0$

ii) $3x^3 + 8x^2 - 15x + 4 = 0$

iii) $x^3 - 10x - 12 = 0$

iv) $x^3 + 2x^2 + 7x + 6 = 0$

3. Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω εξισώσεις δεν έχουν ακέραιες ρίζες.

i) $x^4 + 3x - 2 = 0$

ii) $2x^4 - 3x^3 + 6x^2 - 24x + 5 = 0$

4. Να βρείτε το πρόσημο των παρακάτω γινομένων, για τις διάφορες τιμές του x.

i) $P(x) = (2 - 3x)(x^2 - x - 2)(x^2 - x + 1)$

ii) $Q(x) = (-x^2 + 4)(x^2 - 3x + 2)(x^2 + x + 1)$

5.Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $2x^5 - 162x \le 0$ ii) $(x^3 - x^2 + 2x - 2)(x^2 - 9) > 0$

iii) $2x^3 - 5x^2 - 6x + 9 > 0$ iv) $x^3 - 4x^2 - 3x + 18 \le 0$

6. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $x^3 + 2x^2 + 3x + 6 > 0$ ii) $x^4 - 6x^3 + 22x^2 - 30x + 13 \le 0$

iii) $x^3 - 3x + 2 < 0$ iv) $x^4 - x^3 + x^2 - 3x - 6 \ge 0$

7. Να βρείτε τα σημεία τομής του άξονα x'x και της γραφικής παράστασης καθεμίας από τις συναρτήσεις:

i) $f(x) = 3x^3 - 3x^2 - 5x - 2$

ii) $g(x) = 4x^3 - 3x - 1$

8. Να βρείτε τα διαστήματα, στα οποία η γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $f(x) = x^4 - 5x^3 + 3x^2 + x$ βρίσκεται κάτω από τον άξονα x'x.

9. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x^8 - 15x^4 - 16 = 0$

ii) $(x - 1)^6 - 9(x - 1)^3 + 8 = 0$

iii) $6\left(\frac{x}{x+1}\right)^2+5\left(\frac{x}{x+1}\right)-6=0$

10. Να βρεθεί μια ρίζα της εξίσωσης $x^3+5x-3=0$ στο διάστημα (0,1) με προσέγγιση δεκάτου.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\frac{1}{10}x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{5}x-\frac{4}{5}=0,$

ii) $x^3-\frac{5}{6}x^2-\frac{22}{3}x+\frac{5}{2}=0$

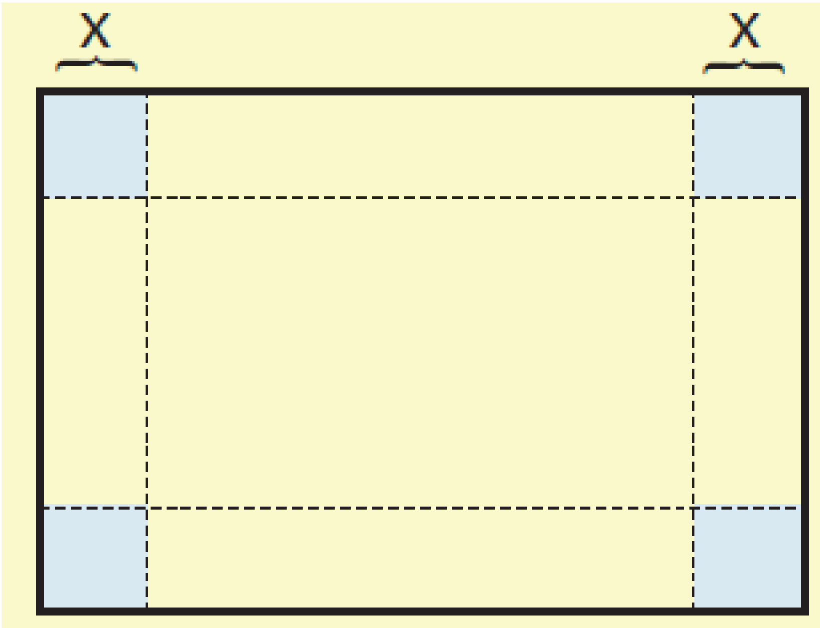
2. Να βρείτε για ποιες τιμές των $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ το $P(x)=x^4+\alpha x^3+\beta x^2-16x-12$ έχει παράγοντες τους x+1 και $x-2$. Στη συνέχεια να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

3. Να βρείτε τις τιμές του $k\in\mathbb{Z}$ για τις οποίες, η εξίσωση $x^3-x^2+kx+3=0$ έχει μία τουλάχιστον ακέραια ρίζα.

*** 4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^\nu+2\lambda x-2=0$, $\nu\in\mathbb{N}$, $\nu\geq 2$, $\lambda\in\mathbb{Z}^*$, δεν έχει ακέραιες ρίζες.**

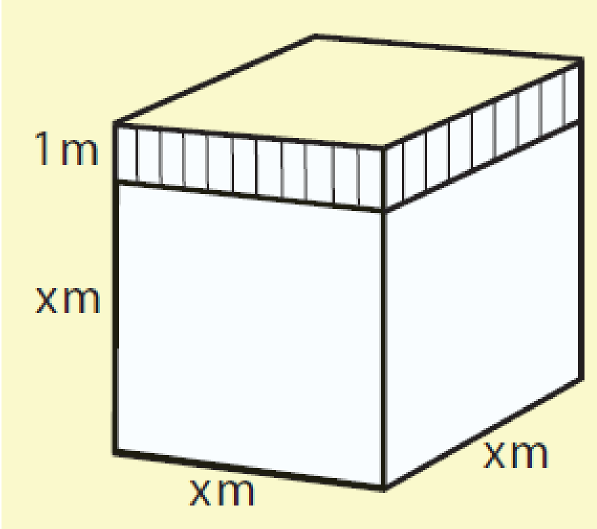
5. Αν $P(x)=x^6-5x^4-10x^2+k$ να βρείτε τις τιμές του k για τις οποίες το $x-1$ είναι παράγοντας του P(x). Για αυτές τις τιμές του k να λύσετε την εξίσωση P(x) = 0.

6. Για να κατασκευάσουμε ένα ανοικτό κουτί από ένα ορθογώνιο χαρτόνι με διαστάσεις 5dm και 9dm, κόβουμε ίσα τετράγωνα από κάθε γωνία του και γυρίζουμε προς τα πάνω τις πλευρές του. Να βρείτε τις διαστάσεις του κουτιού, αν είναι γνωστό ότι αυτές εκφράζονται σε dm με ακέραιους αριθμούς και ακόμη ότι ο όγκος του είναι 21dm3.



7. Η συγκέντρωση μιας χημικής ουσίας στο αίμα t ώρες μετά από ενδομυϊκή ένεση δίνεται από τον τύπο $c = \dfrac{3t^2 + t}{t^3 + 50}$. Η συγκέντρωση είναι μέγιστη, όταν $3t^4 + 2t^3 - 300t - 200 = 0$. Να υπολογίσετε με προσέγγιση δεκάτου το χρόνο t καθώς και τη μέγιστη συγκέντρωση.

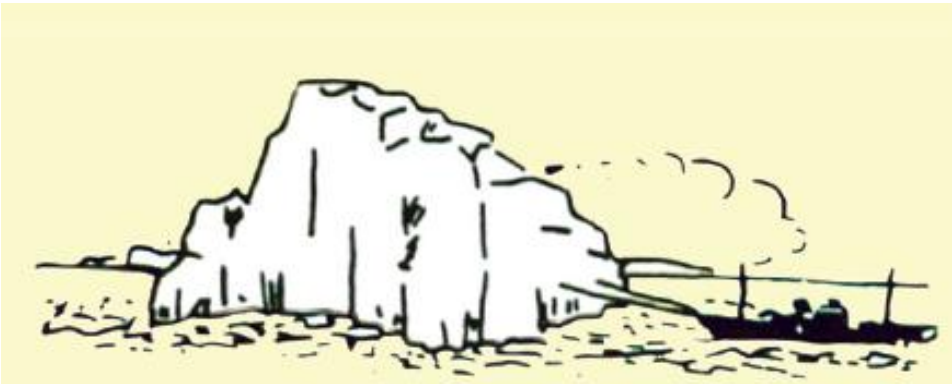
8. Αν ο όγκος του παρακάτω σχήματος είναι 36m3, να βρείτε το x.



9. Ένα παγόβουνο σύρεται από την Ανταρκτική προς την Αφρική. Αν ο όγκος του V, μετά από ν ημέρες δίνεται από τον τύπο

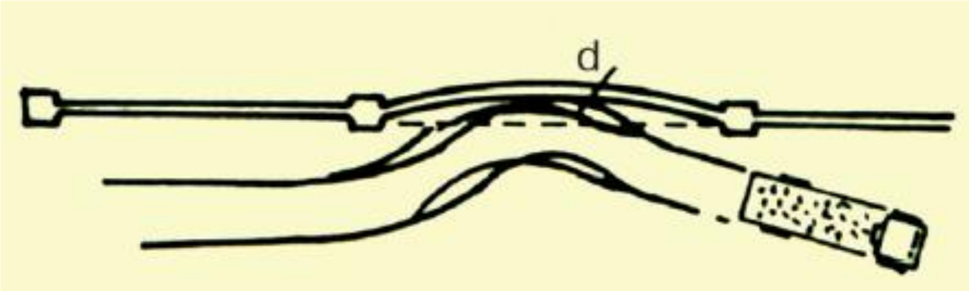
$$V = \frac{500\pi}{3}(2000 - 100v + 20v^2 - v^3),$$

να βρείτε μετά πόσο χρόνο το παγόβουνο θα λιώσει τελείως.

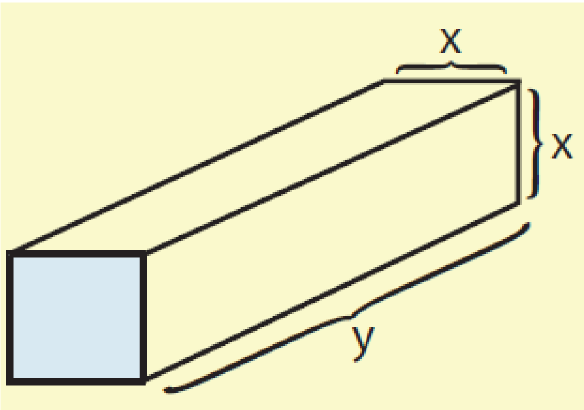


10. Σε χρόνο t δευτερολέπτων μετά την πρόσκρουση του φορτηγού στο κιγκλίδωμα του δρόμου, η παραμόρφωση σε mm του κιγκλιδώματος δίνεται από τον τύπο

$d = 15t(t^2 - 6t - 9)$. Σε πόσο χρόνο μετά την πρόσκρουση η μπάρα του κιγκλιδώματος θα επανέλθει στην αρχική της θέση;



11. Ένα πακέτο σχήματος παραλληλεπιπέδου, για να σταλεί με το ταχυδρομείο, πρέπει το άθροισμα του μήκους του με την περίμετρο μιας κάθετης τομής του να μην υπερβαίνει τα 108cm (βλέπε σχήμα). Να βρεθούν οι διαστάσεις του πακέτου, αν γνωρίζουμε ότι ο όγκος του είναι 11664 cm^3.

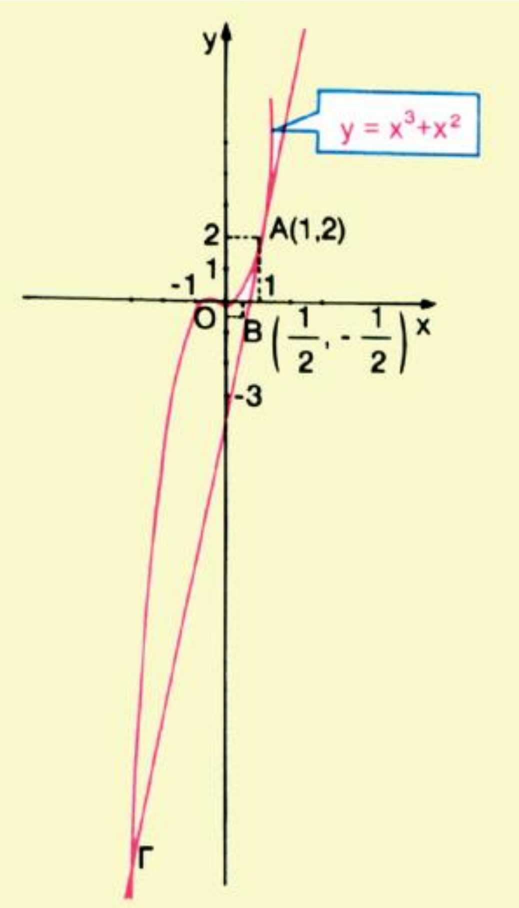


12.i) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας που περνάει από τα σημεία Α (1,2) και Β$(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$.

ii) Να αποδείξετε ότι η ευθεία αυτή τέμνει την καμπύλη y=x3+x2 για τα x που είναι ρίζες της εξίσωσης.

$$x^3 + x^2 - 5x + 3 = 0$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση και να βρείτε τις συντεταγμένες του Γ.



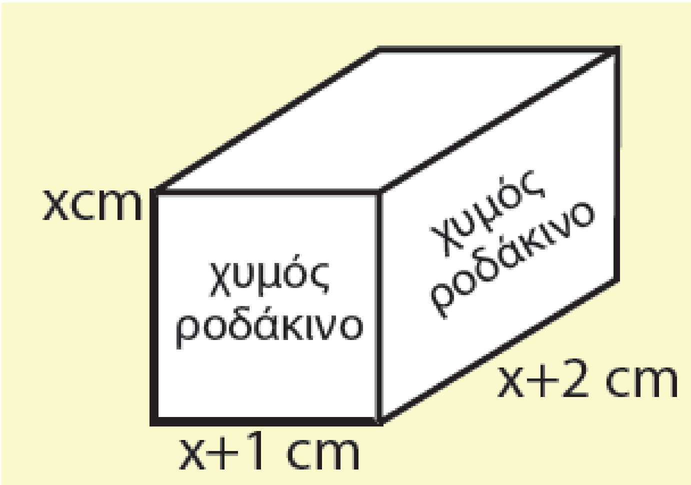
13. Ένα εργοστάσιο κατασκευάζει μικρά δοχεία για χυμούς φρούτων. Το τμήμα σχεδιασμού του εργοστασίου έλαβε τρείς παραγγελίες:
α) Ο πρώτος πελάτης θέλει κουτιά που να χωρούν 200ml χυμού και με διαστάσεις, που να διαφέρουν κατά 1cm, όπως φαίνεται στο σχήμα.

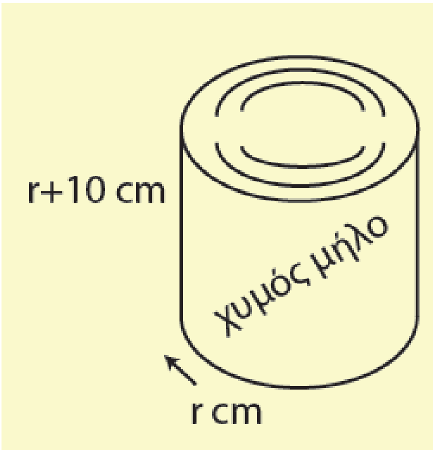
Να αποδειχθεί ότι το τμήμα έχει να λύσει την εξίσωση $x^3+3x^2+2x-200=0$. Μπορείτε να τους βοηθήσετε να βρουν το x με προσέγγιση ενός mm.
β) Ο δεύτερος πελάτης θέλει τενεκεδάκια κυλινδρικά που να χωρούν 1lit, και να έχουν ύψος 10cm μεγαλύτερο από το μήκος της ακτίνας τους, Να

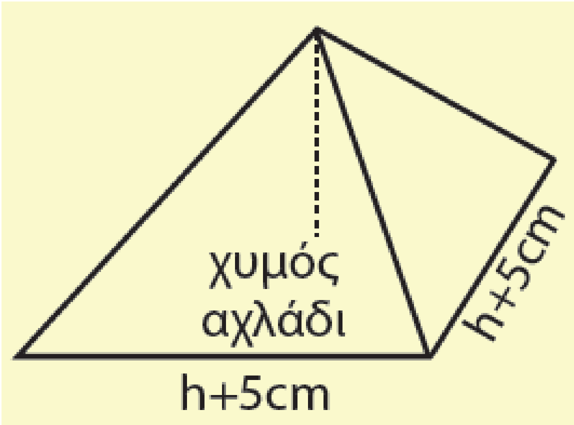
αποδειχθεί ότι η εξίσωση αυτή τη φορά είναι $r^3 + 10r^2 - 318 = 0$ και να βρεθεί το r με προσέγγιση ενός mm. (Να πάρετε $\frac{1000}{\pi} \simeq 318$).

γ) Ο τρίτος πελάτης ζήτησε κουτιά σε σχήμα τετραγωνικής πυραμίδας, που να χωρούν 250ml, με πλευρά βάσης 5cm μεγαλύτερη από το ύψος.

Να βρεθεί η εξίσωση και στη συνέχεια μια κατά προσέγγιση τιμή του ύψους h (προσέγγιση χιλιοστού).







4.4 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ ΠΟΥ ΑΝΑΓΟΝΤΑΙ ΣΕ ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ

Υπάρχουν εξισώσεις, οι οποίες δεν είναι πολυωνυμικές, αλλά με κατάλληλη διαδικασία η λύση τους ανάγεται στη λύση πολυωνυμικών. Τέτοιες εξισώσεις επιλύονται στα παραδείγματα που ακολουθούν.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1ο Να λυθεί ,η εξίσωση $x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}=0$

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **με** $x\neq 0$ **και** $x\neq\frac{1}{2}$**.**

Με αυτούς τους περιορισμούς έχουμε:

$$x^2+\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x(2x-1)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(2x-1)x^2+x(2x-1)\frac{2}{2x-1}-$$

$$-x(2x-1)\frac{1}{x(2x-1)}=0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^4-x^3+2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x^3(2x-1)+2x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (2x-1)(x^3+1)=0$$

Η τελευταία εξίσωση έχει ρίζες τους αριθμούς $\frac{1}{2}$ και -1. Λόγω των περιορισμών δεκτή είναι μόνο η $x=-1$.

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{x}=x-2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για $x\geq 0$. Αν υψώσουμε και τα δυο μέλη της στο τετράγωνο, προκύπτει η εξίσωση $x=x^2-4x+4$, η οποία γράφεται $x^2-5x+4=0$ και έχει ως ρίζες τις $x1 = 4$ και $x2 = 1$. Οι τιμές αυτές του x, αν και ικανοποιούν τον περιορισμό $x\geq 0$ δεν είναι και οι δύο ρίζες της αρχικής εξίσωσης,

Πράγματι· αν θέσουμε τις τιμές αυτές στην αρχική εξίσωση, παίρνουμε:

Για x = 4 : $\sqrt{4}=4-2$ που είναι αληθής ισότητα
Για x = 1 : $\sqrt{1}=1-2$ που δεν είναι αληθής ισότητα.

Άρα η αρχική εξίσωση έχει ως μοναδική ρίζα την x=4.

Σχόλιο: Από το παραπάνω παράδειγμα προκύπτει ότι, αν υψώσουμε τα μέλη μιας εξίσωσης στο τετράγωνο, τότε η εξίσωση που προκύπτει μπορεί να έχει και άλλες ρίζες εκτός από τις ρίζες της αρχικής εξίσωσης. Είναι λοιπόν απαραίτητο σε τέτοιες περιπτώσεις να κάνουμε επαλήθευση των ριζών που βρίσκουμε και να απορρίπτουμε όσες από αυτές δεν επαληθεύουν την αρχική εξίσωση,

3ο Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+7}-x=2$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $x\geq -\frac{7}{2}$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$\sqrt{2x+7}=x+2$ **(απομονώνουμε το ριζικό)**

$(\sqrt{2x+7})^2=(x+2)^2$ **(υψώνουμε στο τετράγωνο)**

$2x+7=x^2+4x+4$

$x^2+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 1. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με, επαλήθευση ότι μόνο η x=1 είναι ρίζα της αρχικής.

4ο Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{2x+6}-\sqrt{x+4}=1$.

ΛΥΣΗ

Η εξίσωση ορίζεται για τα $x \in \mathbb{R}$, για τα οποία ισχύουν $2x+6 \geq 0$ και $x+4 \geq 0$, δη-
λαδή για τα $x \geq -3$. Γι' αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:

$\sqrt{2x+6} = 1 + \sqrt{x+4}$ **(απομονώνουμε το ριζικό)**

$(\sqrt{2x+6})^2 = (1+\sqrt{x+4})^2$ **(υψώνουμε στο τετράγωνο)**

$2x+6 = 1 + 2\sqrt{x+4} + x + 4$

$x+1 = 2\sqrt{x+4}$

$(x+1)^2 = 4(x+4)$ **(υψώνουμε στο τετράγωνο)**

$x^2 - 2x - 15 = 0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και

5. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η x = 5 είναι ρίζα της αρχικής.

Ανισώσεις της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (<0)$

Όπως γνωρίζουμε το πηλίκο και το γινόμενο δύο αριθμών είναι ομόσημα.

Επομένως:

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \quad (<0)$$

$$\frac{A(x)}{B(x)} > 0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x) > 0, \text{και } \frac{A(x)}{B(x)} < 0 \Leftrightarrow A(x)\cdot B(x) < 0,$$

αφού, καμία από τις λύσεις της $A(x)\cdot B(x) > 0$ και της $A(x)\cdot B(x) < 0$ δεν μηδενίζει το B(x).

Για παράδειγμα , έστω ότι θέλουμε να λύσουμε την ανίσωση

$$\frac{(x-1)(2x^2+x+1)}{x^2+x-6} > 0.$$

Η ανίσωση αυτή είναι ισοδύναμη με την
$(x-1)(x^2+x-6)(2x^2+x+1)>0$
δηλαδή με την P(x)> 0 , η οποία, από τον πίνακα προσήμου του P(x) αληθεύει όταν $x \in (-3,1) \cup (2,+\infty)$.

ΣΧΟΛΙΟ

Μία ανίσωση της μορφής $\dfrac{A(x)}{B(x)} \geq 0$ αληθεύει για εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύουν συγχρόνως

$$A(x)\cdot B(x) \geq 0 \quad \text{και} \quad B(x) \neq 0.$$

Έστω για παράδειγμα η ανίσωση $\dfrac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0$.

Έχουμε:

$$\frac{x^2-4x+3}{x^2+3x-4} \geq 0 \Leftrightarrow \qquad \text{και } x^2+3x-4 \neq 0.$$

$$\Leftrightarrow (x^2-4x+3)(x^2+3x-4) \geq 0$$

Οι ρίζες του τριωνύμου x^2-4x+3 είναι οι 1 και 3 , ενώ του τριωνύμου
x^2+3x-4 είναι οι 1 και -4 .

Συντάσσουμε τον πίνακα προσήμου του γινομένου:
$P(x)=(x^2-4x+3)(x^2+3x-4)$

x	$-\infty$		-4		1		3		$+\infty$
x^2-4x+3		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
x^2+3x-4		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$P(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

Άρα η ανίσωση αληθεύει όταν $x\in(-\infty,-4)\cup[3,+\infty)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α’ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\dfrac{3x^2-1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-x}=\dfrac{x^2-3x+2}{x}$

ii) $\dfrac{x^2}{x-1}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{4}{x^2-1}$

2. Να λύσετε την εξίσωση: $2\eta\mu^3x+\sigma\upsilon\nu^2x+2\eta\mu x-2=0$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{x^3}=-4x$ ii) $\sqrt{3x-2}=4$

iii) $\sqrt{5x-1}=-4$

iv) $\sqrt{x+3}=x+1$

v) $\sqrt{x+3}=\sqrt{10-x}+1$

vi) $\sqrt{x}+\sqrt{x-20}=10$

vii) $\sqrt{x}=\dfrac{x-8}{2\sqrt{x}}+3$

viii) $\sqrt{1+2\sqrt{x}}=\sqrt{x+1}$

4.Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{x-2}{x+1}>0$ ii) $\frac{2x+1}{x-3}\le 0$

iii) $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-2}\le 0$

5.Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\frac{2x+3}{x-1}>4$ ii) $\frac{x-2}{3x+5}\le 4$

iii) $\frac{x^2-3x-10}{x-1}+2\le 0$

iv) $\frac{x}{3x-5}\le\frac{2}{x-1}$

v) $\frac{x}{2x-1}\le\frac{3}{x+2}$

6. Να λύσετε την ανίσωση: $x^2+\frac{2}{2x-1}\ge\frac{1}{x(2x-1)}$

Σχόλιο. Εξισώσεις όπως αυτές των παραδειγμάτων 2, 3 και 4, όπου παραστάσεις του x βρίσκονται κάτω από ριζικά, ανήκουν σε μια κατηγορία εξισώσεων που λέγονται άρρητες.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να λύσετε τις ανισώσεις:

i) $\sqrt{2x+3}<\sqrt{1-3x}$ ii) $\sqrt{x-3}>x-5$

2. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $x+3\sqrt{x}-10=0$ ii) $\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}-6=0$

3. Ομοίως τις εξισώσεις:
i) $x^2+x-4=\sqrt{x^2+x-2}$ ii) $\sqrt{x-1}+\sqrt{x-4}=\sqrt{x+4}$

4. Ομοίως τις εξισώσεις:
i) $\sqrt{x-1}=\alpha$ ii) $\sqrt{4x^2+1}=2x-\lambda$

5. Να λύσετε την εξίσωση
$2\eta\mu^4 x-3\eta\mu^3 x-3\sigma\upsilon\nu^2 x-3\eta\mu x+4=0$

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ' ΟΜΑΔΑΣ)

1. Με τη βοήθεια της $(x^2+x+1)(x-1)=x^3-1$, να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο $P(x)=x^{3\nu}+x^{3\mu+1}+x^{3\rho+2}$ διαιρείται με το πολυώνυμο x2+x+1 (ν, μ, ρ θετικοί ακέραιοι).

2. Να αποδείξετε ότι το πολυώνυμο:
i) $f(x)=\nu x^{\nu+1}-(\nu+1)x^{\nu}+1$ διαιρείται με το $(x-1)^2$. Να βρείτε το πηλίκο της διαίρεσης.
ii) $g(x)=(\nu-2)x^{\nu}-\nu x^{\nu-1}+\nu x-\nu+2$ διαιρείται με το $(x-1)^3$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $x^4+2x^3+2x+1=0$
ii) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$

(Οι εξισώσεις αυτές είναι της μορφής $\alpha x^4+\beta x^3+\gamma x^2+\beta x+\alpha=0$ $\alpha\neq 0$. Εξισώσεις της μορφής αυτής ανήκουν σε μια κατηγορία εξισώσεων που λέγονται αντίστροφες).

Υπόδειξη: Να διαιρέσετε τα μέλη των εξισώσεων με x2 και στη συνέχεια να θέσετε $x+\frac{1}{x}=y$.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις
i) $x^4+x^3-16x^2-2x+4=0$
ii) $x^4+8x^3+13x^2-8x+1=0$

5. Να λύσετε την εξίσωση
$(x^2+2x-1)^2-3(x^2+2x+3)+14=0$
Υπόδειξη: Να θέσετε $x^2+2x-1=y$

6. Να βρείτε τα $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ για τα οποία το πολυώνυμο $x^5+3x^2+\alpha x+\beta=0$ διαιρούμενο με το x^2-2, δίνει υπόλοιπο 5x+8.

7. Αν
$P(x)=x^{17}-12x^{16}+12x^{15}-$
$-12x^{14}+.......+12x-1$

να υπολογιστούν οι τιμές P(11) και P(13).

8. Ο ήλιος ενός πλανητικού συστήματος με την πάροδο του χρόνου γίνεται άλλοτε θερμότερος και άλλοτε ψυχρότερος. Έχει εκτιμηθεί ότι η θερμοκρασία T σε °C στην επιφάνεια ενός πλανήτη του συστήματος, μετά από x εκατομμύρια χρόνια θα είναι
$T=10x^3-100x^2+270x-180$
i) Μετά πόσο χρόνο θα έρθει το τέλος των παγετώνων στον πλανήτη;
ii) Πότε θα αρχίσει ο επόμενος παγετώνας και πόσο θα διαρκέσει;

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Οι ιστορικές ρίζες της μελέτης των πολυωνύμων βαθμού κυρίως 1 και 2 βρίσκονται στην κοιλάδα του Τίγρη και του Ευφράτη, τη Μεσοποταμία όπως λεγόταν, που βρίσκεται στο σημερινό Ιράκ. Οι αρχαίοι Βαβυλώνιοι που ζούσαν στην περιοχή αυτή και δημιούργησαν έναν από τους αρχαιότερους πολιτισμούς γύρω στο 2000 π.Χ. ήξεραν να βρίσκουν τις ρίζες πολυωνύμων 1ου και 2ου βαθμού και ήξεραν να υπολογίζουν προσεγγιστικά τετραγωνικές ρίζες αριθμών. Ο συμβολισμός τους ήταν πρωτόγονος και οι διατυπώσεις των προβλημάτων και των λύσεών τους γινόταν κυρίως με λόγια.

Αξίζει να σημειωθεί ότι για τα Μαθηματικά επιτεύγματα των Βαβυλωνίων, που ήταν πολύ αξιόλογα για τα μέτρα εκείνης της εποχής, υπήρχε σχεδόν απόλυτη άγνοια μέχρι πολύ τελευταία και μόλις γύρω στο 1930 μελέτες

του Otto Neugebauer μας διαφώτισαν γύρω από τα μαθηματικά εκείνης της περιόδου.

Το επόμενο μεγάλο βήμα οφείλεται στους αρχαίους Έλληνες. Οι Πυθαγόρειοι στον 5° αιώνα π.Χ. αποδεικνύουν ότι οι τετραγωνικές ρίζες, που συναντώνται αναγκαστικά στη μελέτη πολυωνύμων 2ου βαθμού, οδηγούν σε ένα νέο είδος αριθμών, που κανείς μέχρι τότε δεν υποπτευόταν την ύπαρξή τους. Οι βαβυλώνιοι είχαν βρει την πολύ ακριβή προσέγγιση ότι $\sqrt{2} = 1{,}414213$ όμως δεν είχαν διερωτηθεί αν υπάρχει ο $\sqrt{2}$, δηλαδή αν υπάρχει κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, τέτοιο ώστε $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = 2$. Αυτό είναι ένα πολύ βαθύτερο ερώτημα στο οποίο δε μπορούμε να απαντήσουμε οσοδήποτε ακριβείς υπολογισμούς και να κάνουμε. Η ανακάλυψη των Πυθαγορείων, ότι δεν υπάρχει τέτοιο κλάσμα, είναι μια από τις πρώτες μαθηματικές αποδείξεις όπου η αυστηρή λογική μας δείχνει ότι η απλή εμπειρία και διαίσθηση είναι δυνατόν να μας εξαπατήσουν.

Σε βιβλία του Ευκλείδη δίνεται η γεωμετρική λύση εξισώσεων 1ου και 2ου βαθμού, δηλαδή η κατασκευή των ριζών με κανόνα και διαβήτη. Η άλλη μεγάλη Ελληνική συνεισφορά προς την κατεύθυνση αυτή ήταν η βελτίωση του αλγεβρικού συμβολισμού που εκτίθεται στα Αριθμητικά του Διόφαντου (περί το 250 π.Χ.). Τα Αριθμητικά του Διόφαντου είναι για την Άλγεβρα ότι είναι τα Στοιχεία του Ευκλείδη για τη Γεωμετρία και η επίδρασή τους στους επόμενους αιώνες ήταν πολύ μεγάλη.

Από τους αρχαίους Έλληνες τη σκυτάλη παρέλαβαν οι Άραβες, οι οποίοι βελτίωσαν αποφασιστικά τον Αλγεβρικό λογισμό, δεν έλυσαν όμως εξισώσεις 3ου βαθμού παρ' όλο ότι εργάσθηκαν προς την κατεύθυνση αυτή με βασικό κίνητρο τη μελέτη τριγωνομετρικών ζητημάτων. Αξίζει να σημειωθεί ότι η λέξη Άλγεβρα προέρχεται από παραφθορά του τίτλου ενός βιβλίου του αστρονόμου Mohammed ibn Musa al-khowarizmi (περί το 825), που ήταν Al-jabr w'almuqabala.

Όπως γνωρίζουμε, οι ρίζες μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης $αx^2+βx+γ=0$ δίνονται από τον τύπο $x_{1,2}=\frac{-β\pm\sqrt{β^2-4αγ}}{2α}$ που βρίσκεται σχετικά εύκολα και με πολλούς τρόπους (βλέπε ιστορικό σημείωμα του 5ου Κεφαλαίου της Άλγεβρας της Α' Λυκείου). Ο σκοπός των μαθηματικών ήταν να βρουν ανάλογους τύπους για εξισώσεις 3ου και μεγαλύτερου βαθμού.

Μετά από άκαρπες προσπάθειες αιώνων ο Scipio del Ferro και ο Niccolo Fontana στις αρχές του 16ου αιώνα εργαζόμενοι ανεξάρτητα, βρήκαν ως τύπο επίλυσης της εξίσωσης $x^3+αx=β^{(*)}$ τον

$$x=\sqrt[3]{\frac{β}{2}+\sqrt{\left(\frac{β}{2}\right)^3+\left(\frac{α}{2}\right)^2}}+$$

$$+\sqrt[3]{\frac{β}{2}-\sqrt{\left(\frac{β}{2}\right)^3+\left(\frac{α}{2}\right)^2}}$$

Ο τύπος αυτός φέρει το όνομα του Cardano που τον δημοσίευσε στην εργασία του Ars Magna το 1545 και τον αποδίδει στον Fontana. Στην ίδια εργασία υπάρχει μια μέθοδος αναγωγής μιας εξίσωσης 4ου βαθμού σε επίλυση εξίσωσης 3ου βαθμού. Έχει μείνει ιστορική η διαμάχη των Cardano, του Niccolo del Ferro και του Ludovico Ferrari για την πατρότητα των τύπων αυτών. Όλες οι προσπάθειες που έγιναν στη συνέχεια και για τρεις περίπου αιώνες, με σκοπό να βρεθούν τύποι για εξισώσεις βαθμού μεγαλύτερου του 4, απέτυχαν. Είναι χαρακτηριστικό ότι με το πρόβλημα αυτό ασχολήθηκαν οι μεγάλοι μαθηματικοί της εποχής εκείνης, όπως ο Lagrange και ο Gauss.

Αυτοί, μολονότι δεν έφθασαν σε συμπέρασμα για το αν οι ρίζες τέτοιων εξισώσεων μπορούν να εκφρασθούν με τύπους όπως οι παραπάνω, εν τούτοις στην προσπάθεια τους αυτή έκαναν σημαντικές ανακαλύψεις στην Άλγεβρα.

Η μεγαλύτερη συμβολή στην τελική επίλυση του προβλήματος των αλγεβρικών εξισώσεων δόθηκε τελικά στις αρχές του 19ου αιώνα από τους νεαρούς μαθηματικούς Abel και Galois. Ο Νορβηγός Niels H. Abel (1802-1829) απέδειξε το 1824, σε ηλικία 22 ετών, ότι δεν υπάρχουν τύποι, όπως στην περίπτωση 2ου, 3ου και 4^{ου} βαθμού, που να δίνουν τις ρίζες μιας γενικής εξίσωσης 5ου βαθμού.

Οπωσδήποτε χρησιμοποίησε τα αποτελέσματα των προηγουμένων του και κυρίως του Lagrange. Το γενικό πρόβλημα που παρέμενε ήταν να βρεθούν οι συνθήκες, ώστε μια εξίσωση να μπορεί να επιλυθεί. Ο Abel πέθανε

το 1829 σε ηλικία 27 ετών από τις κακουχίες και τη φυματίωση, χωρίς να ολοκληρώσει τη λύση του προβλήματος. Κατά τους βιογράφους του ταξίδευε στην Ευρώπη πεζός, για να συναντήσει τους μεγάλους μαθηματικούς της εποχής.

*** Κάθε εξίσωση 3ου βαθμού: $x^3+\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$ με τη βοήθεια του μετασχηματισμού $x=y-\frac{\alpha}{3}$ παίρνει τη μορφή $x^3+Ax=B$.**

Το γενικό πρόβλημα έλυσε λίγο αργότερα ο νεαρός Γάλλος μαθηματικός Evariste Galois (1811-1832), που έδωσε τις συνθήκες, ώστε μια εξίσωση να έχει ρίζες που να εκφράζονται με τους συντελεστές.
Η ζωή του Galois απασχόλησε πολλούς ιστορικούς και οι βιογραφίες του είναι μεταξύ μύθου και πραγματικότητας. Ο Galois έζησε σε μια εποχή που η Γαλλία ταραζόταν από πολιτικές αναταραχές. Αφού απέτυχε στις εισαγωγικές εξετάσεις για την Ecole Polytechnique το 1829 λόγω ελλιπούς προπαρασκευής, γράφτηκε στην Ecole Preparatoire.
Εκεί η ζωή του σημαδεύτηκε από αποβολές, ασθένειες και φυλακίσεις για πολιτικούς λόγους.

Τελικά έλαβε μέρος σε μια μονομαχία, όπου τραυματίσθηκε θανάσιμα και πέθανε στις 31 Μαΐου του 1832, πριν συμπληρώσει τα 21 χρόνια του. Τις ανακαλύψεις του ο Galois τις έγραψε την τελευταία νύχτα της ζωής του πριν από τη μονομαχία σε ένα δυσανάγνωστο χειρόγραφο 31 σελίδων, το οποίο έμεινε στην αφάνεια, μέχρι που ο Γάλλος ακαδημαϊκός Joseph Liouville το παρουσίασε στη Γαλλική Ακαδημία στις 4 Ιουλίου 1843.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 4ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^{ο} – ΠΟΛΥΩΝΥΜΑ-ΠΟΛΥΩΝΥΜΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ