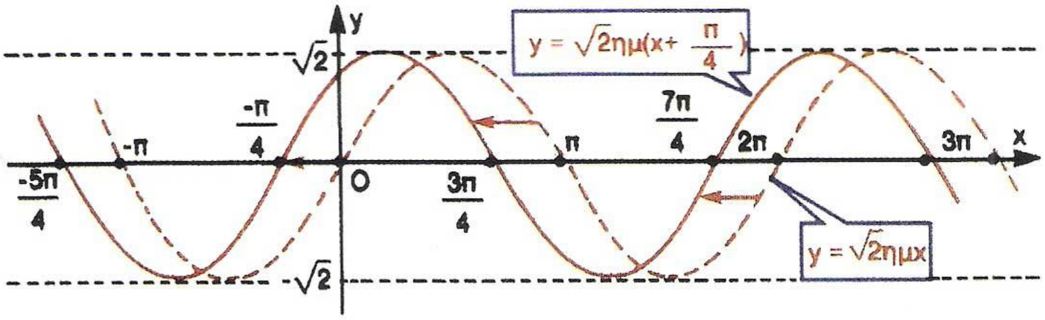
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΑΛΓΕΒΡΑ



Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σ. ΑΝΔΡΕΑΔΑΚΗΣ
Β. ΚΑΤΣΑΡΓΥΡΗΣ
Σ. ΠΑΠΑΣΤΑΥΡΙΔΗΣ
Γ. ΠΟΛΥΖΟΣ
Α. ΣΒΕΡΚΟΣ

Άλγεβρα

Β΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 3ος

Συγγραφική ομάδα:

Ανδρεαδάκης Στυλιανός • Καθηγητής Πανεπιστημίου Αθηνών

Κατσαργύρης Βασίλειος • Καθηγητής μαθηματικών Βαρβακείου Πειραμ. Λυκείου

Παπασταυρίδης Στάυρος • Καθηγητής Πανεπιστημίου Πάτρας

Πολύζος Γεώργιος • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αμαρουσίου

Σβέρκος Ανδρέας • Καθηγητής μαθηματικών Β' Λυκείου Αγ. Παρασκευής

Α' ΕΚΔΟΣΗ: 1991

ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΕΙΣ ΜΕ ΒΕΛΤΙΩΣΕΙΣ: 1992, 1993, 1994, 1995, 1996, 1997, 1998, 2012

Η προσαρμογή του βιβλίου στο νέο αναλυτικό πρόγραμμα έγινε από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα Εργασίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

ΜΕΤΑΤΡΟΠΗ-ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ

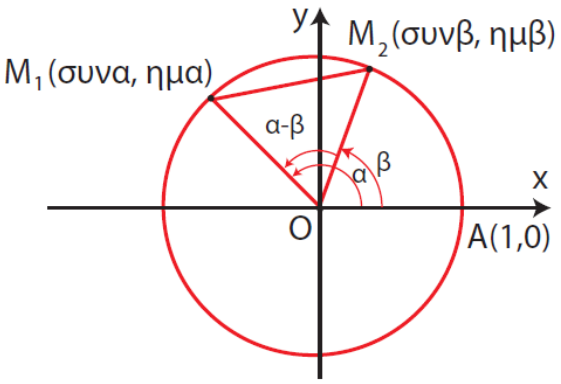
Γραμμένος Νικόλαος, Εκπαιδευτικός

3.6 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΑΘΡΟΙΣΜΑΤΟΣ ΓΩΝΙΩΝ

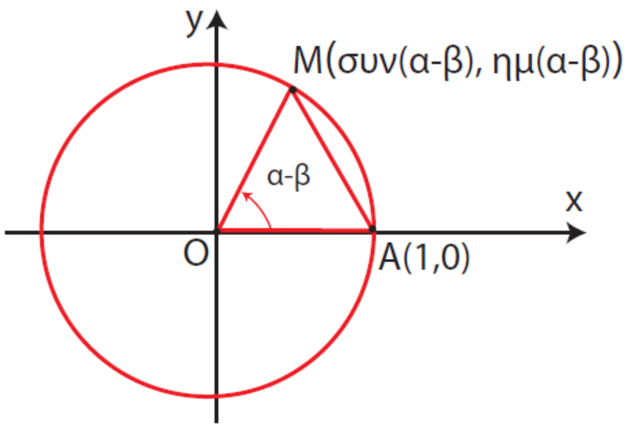
Συνημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Ας θεωρήσουμε δυο γωνίες α, β που οι τελικές τους πλευρές τέμνουν τον τριγωνομετρικό κύκλο στα σημεία M_1,M_2 αντιστοίχως (Σχ. 1).

Έστω επιπλέον και η γωνία α – β, που η τελική της πλευρά τέμνει τον τριγωνομετρικό κύκλο στο σημείο Μ. (Σχ. 2).



Σχ. (1)



Σχ. (2)

Όπως είναι γνωστό, τα σημεία M_1, M_2, Α και Μ έχουν συντεταγμένες:
το Μ1: τετμημένη συνα και τεταγμένη ημα
το Μ2: τετμημένη συνβ και τεταγμένη ημβ
το Α: τετμημένη 1 και τεταγμένη 0
το Μ: τετμημένη $συν(α-β)$ και τεταγμένη $ημ(α-β)$

Επειδή $M_2\hat{O}M_1 = A\hat{O}M = α-β$, θα είναι και $(M_2M_1)=(AM)$.
Άρα

$$(M_2M_1)^2 = (AM)^2$$

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε το γνωστό μας τύπο:

$$(P_1P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2},$$

που δίνει την απόσταση δύο σημείων $P_1(x_1, y_1)$ και $P_2(x_2, y_2)$, έχουμε:

- $(M_2M_1)^2 =$

$= (συνα - συνβ)^2 + (ημα - ημβ)^2 =$

$= συν^2α + συν^2β - 2συνασυνβ$

$+ημ^2α + ημ^2β - 2ημαημβ$

$= 2 - 2(συνασυνβ + ημαημβ)$ **και**

- $(AM)^2 = [συν(α-β) - 1]^2$

$+[ημ(α-β) - 0]^2 =$

$= συν^2(α-β) + 1$

$-2συν(α-β) + ημ^2(α-β)$

$= 2 - 2συν(α-β).$

Έτσι η σχέση $(M_2M_1)^2 = (AM)^2$ γράφεται

$2 - 2(συνασυνβ + ημαημβ) =$

$2 - 2συν(α-β)$

ή

$συνασυνβ + ημαημβ = συν(α - β)$

Επομένως:

$$συν(α - β) = συνασυνβ + ημαημβ$$

Η ισότητα αυτή, που αποδείξαμε για γωνίες α, β με
$0 \leq β < α < 360^0$, ισχύει
και για οποιεσδήποτε γωνίες α, β.

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με
το $-β$, έχουμε:

$$συν(α - (-β)) = συνασυν(-β) + ημαημ(-β) = συνασυνβ - ημαημβ$$

Επομένως:

$$συν(α + β) = συνασυνβ - ημαημβ$$

Με τη βοήθεια των τύπων (1) και (2) μπορούμε να

υπολογίσουμε το συνημίτονο ορισμένων γωνιών,
χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τριγωνομετρικούς πίνακες
ή
υπολογιστικές μηχανές.

Για παράδειγμα, έχουμε:

- $συν15^\circ = συν(45^\circ - 30^\circ) =$

$συν45^\circ συν30^\circ + ημ45^\circ ημ30^\circ$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$$

- $συν75^\circ = συν(45^\circ + 30^\circ) =$

$= συν45^\circ συν30^\circ - ημ45^\circ ημ30^\circ =$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$$

Ημίτονο αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια του τύπου (1), που βρήκαμε προηγουμένως, θα υπολογίσουμε τώρα το ημίτονο του αθροίσματος δυο γωνιών.

Επειδή $συν\left(\frac{π}{2} - x\right) = ημx$ **και** $ημ\left(\frac{π}{2} - x\right) = συνx$**,**

έχουμε:

$$ημ(α+β) = συν\left(\frac{π}{2} - (α+β)\right) =$$

$$συν\left((\frac{π}{2} - α) - β\right) =$$

$$= συν\left(\frac{π}{2} - α\right)συνβ + ημ\left(\frac{π}{2} - α\right)ημβ =$$

$ημασυνβ + συναημβ$

Επομένως:

$$ημ(α+β) = ημασυνβ + συναημβ \quad (3)$$

Αν στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με $-\beta$ βρίσκουμε ότι:

$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

Σύμφωνα με τους τύπους αυτούς για παράδειγμα, έχουμε:

- $\eta\mu15^\circ=\eta\mu(45^\circ-30^\circ)=$

$=\eta\mu45^\circ\sigma\upsilon\nu30^\circ-\sigma\upsilon\nu45^\circ\eta\mu30^\circ=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$

- $\eta\mu75^\circ=\eta\mu(45^\circ+30^\circ)=$

$=\eta\mu45^\circ\sigma\upsilon\nu30^\circ+\sigma\upsilon\nu45^\circ\eta\mu30^\circ=$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=$

$=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

Εφαπτομένη αθροίσματος και διαφοράς γωνιών

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τύπων θα υπολογίσουμε την εφαπτομένη του αθροίσματος α+β δυο γωνιών α, β, αν γνωρίζουμε την εφαπτομένη καθεμιάς.

Όπως ξέρουμε, για να ορίζονται οι: $\varepsilon\varphi(\alpha+\beta)$, $\varepsilon\varphi\alpha$ και $\varepsilon\varphi\beta$, πρέπει $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)\neq0$, $\sigma\upsilon\nu\alpha\neq0$ και $\sigma\upsilon\nu\beta\neq0$. Με την προϋπόθεση αυτή έχουμε:

$$\begin{bmatrix}\text{Διαιρούμε} & \text{με}\\ \text{συνασυνβ} \neq 0 & \end{bmatrix}$$

$$εφ(α+β)=\frac{ημ(α+β)}{συν(α+β)}=$$

$$=\frac{ημασυνβ+συναημβ}{συνασυνβ-ημαημβ}=$$

$$=\frac{\dfrac{ημασυνβ}{συνασυνβ}+\dfrac{συναημβ}{συνασυνβ}}{\dfrac{συνασυνβ}{συνασυνβ}-\dfrac{ημαημβ}{συνασυνβ}}=$$

$$=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ}$$

Επομένως έχουμε:

$$εφ(α+β)=\frac{εφα+εφβ}{1-εφαεφβ} \qquad \textbf{(5)}$$

Αν τώρα στην παραπάνω ισότητα αντικαταστήσουμε το β με το $-β$, βρίσκουμε ότι:

$$εφ(α-β)=\frac{εφα-εφβ}{1+εφαεφβ} \qquad (6)$$

1Τέλος με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι:

$$\sigma\varphi(\alpha+\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta+\sigma\varphi\alpha} \qquad (7)$$

$$\sigma\varphi(\alpha-\beta)=\frac{\sigma\varphi\alpha\sigma\varphi\beta+1}{\sigma\varphi\beta-\sigma\varphi\alpha} \qquad (8)$$

Σύμφωνα με τους παραπάνω τύπους για παράδειγμα, έχουμε:

- $\varepsilon\varphi 15^\circ=\varepsilon\varphi(45^\circ-30^\circ)=$

$$=\frac{\varepsilon\varphi 45^\circ-\varepsilon\varphi 30^\circ}{1+\varepsilon\varphi 45^\circ\varepsilon\varphi 30^\circ}=\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{3}}{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}=$$

$$=\frac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}=\frac{(3-\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}{(3+\sqrt{3})(3-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{12-6\sqrt{3}}{6}=2-\sqrt{3}$$

- $\varepsilon\varphi 75^\circ = \varepsilon\varphi(45^\circ + 30^\circ) =$

$$= \frac{\varepsilon\varphi 45^\circ + \varepsilon\varphi 30^\circ}{1 - \varepsilon\varphi 45^\circ \varepsilon\varphi 30^\circ} = \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{3}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{3}} =$$

$$= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}} = \frac{(3+\sqrt{3})(3+\sqrt{3})}{(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})} =$$

$$= \frac{12+6\sqrt{3}}{6} = 2+\sqrt{3}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Αν $\eta\mu\alpha = -\frac{3}{5}$, με $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και $\sigma\upsilon\nu\beta = -\frac{12}{13}$, με $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$, να υπολογιστούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί του α+β.

ΛΥΣΗ

Επειδή ημ(α+β) = ημασυνβ+συναημβ και $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta - \eta\mu\alpha\eta\mu\beta$ αρκεί να υπολογίσουμε το συνα και το ημβ.

Έχουμε λοιπόν:

$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 1 - \eta\mu^2\alpha = 1 - \frac{9}{25} = \frac{16}{25}$, όποτε $\sigma\upsilon\nu\alpha = \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$, αφού $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$ και $\eta\mu^2\beta = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\beta = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$, οπότε $\eta\mu\beta = -\sqrt{\frac{25}{169}} = -\frac{5}{13}$, αφού $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

Επομένως

$$ημ(α+β)=\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{12}{13}\right)$$

$$+\frac{4}{5}\left(-\frac{5}{13}\right)=\frac{16}{65}$$

$$συν(α+β)=\frac{4}{5}\left(-\frac{12}{13}\right)-$$

$$\left(-\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)=-\frac{63}{65},$$

οπότε:

$$εφ(α+β)=-\frac{16}{63} \quad \text{και} \quad σφ(α+β)=-\frac{63}{16}$$

2ο Να αποδειχθεί ότι: $ημ(α+β)\cdot ημ(α-β)=ημ^2α-ημ^2β$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$ημ(α+β)ημ(α-β)=$$

$$=(ημασυνβ+συναημβ)$$

$$(ημασυνβ-συναημβ)=$$

$$=ημ^2ασυν^2β-συν^2αημ^2β=$$

$$=ημ^2α(1-ημ^2β)-(1-ημ^2α)ημ^2β=$$

$$=ημ^2α-ημ^2αημ^2β-$$

$$ημ^2β+ημ^2αημ^2β=ημ^2α-ημ^2β$$

3ο Να λυθεί η εξίσωση: $2\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

ΛΥΣΗ

$2\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu x\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{6}+\sigma\upsilon\nu x\eta\mu\frac{\pi}{6}$

$\Leftrightarrow 2\sigma\upsilon\nu x=\frac{\sqrt{3}}{2}\eta\mu x+\frac{1}{2}\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow 4\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{3}\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow 3\sigma\upsilon\nu x=\sqrt{3}\eta\mu x$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\sqrt{3}$

$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi x=\varepsilon\varphi\frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow x=\kappa\pi+\frac{\pi}{3},\kappa\in\mathbb{Z}$

Αφού $\sigma\upsilon\nu x\neq 1$

4ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε μη ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi \Gamma=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi \Gamma$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αφού το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο, ορίζονται οι εφΑ, εφΒ, εφΓ. Επειδή επιπλέον

$A+B=\pi-\Gamma\neq\frac{\pi}{2}$**, ορίζεται η** $\varepsilon\varphi(A+B)$ **και έχουμε διαδοχικά:**

$\varepsilon\varphi(A+B)=\varepsilon\varphi(\pi-\Gamma)$

$$\frac{\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B}{1-\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B}=-\varepsilon\varphi \Gamma$$
$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B=-\varepsilon\varphi \Gamma+\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi \Gamma$$
$$\varepsilon\varphi A+\varepsilon\varphi B+\varepsilon\varphi \Gamma=\varepsilon\varphi A\varepsilon\varphi B\varepsilon\varphi \Gamma$$

5ο Θεωρούμε έναν αγωγό από τον οποίο διέρχονται τρία εναλλασσόμενα ρεύματα της ίδιας κυκλικής συχνότητας ω με στιγμιαίες εντάσεις $I_1=\eta\mu\omega t$, $I_2=\eta\mu(\omega t+\frac{2\pi}{3})$ και $I_3=\eta\mu(\omega t+\frac{4\pi}{3})$. Να αποδειχθεί ότι η ολική ένταση $I=I_1+I_2+I_3$ του ρεύματος που διέρχεται από τον αγωγό είναι μηδέν.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Είναι

$$I=\eta\mu\omega t+\eta\mu(\omega t+\frac{2\pi}{3})+\eta\mu(\omega t+\frac{4\pi}{3})$$
$$=\eta\mu\omega t+\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{2\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{2\pi}{3}$$
$$+\eta\mu\omega t\sigma\upsilon\nu\frac{4\pi}{3}+\sigma\upsilon\nu\omega t\eta\mu\frac{4\pi}{3}$$
$$=\eta\mu\omega t+\eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\omega t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+$$
$$\eta\mu\omega t\left(-\frac{1}{2}\right)+\sigma\upsilon\nu\omega t\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$=\eta\mu\omega t-\frac{1}{2}\eta\mu\omega t-\frac{1}{2}\eta\mu\omega t=0$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστά-σεων:

i) $συν\frac{π}{12}συν\frac{π}{4}-ημ\frac{π}{12}ημ\frac{π}{4}$

ii) $συν170^\circ συν50^\circ+ημ170^\circ ημ50^\circ$

iii) $ημ110^\circ ημ70^\circ-συν110^\circ συν70^\circ$

iv) $συν\frac{7π}{12}συν\frac{π}{12}+ημ\frac{7π}{12}ημ\frac{π}{12}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $συν3xσυν(-2x)-ημ3xημ(-2x)$

ii) $συν(x+\frac{π}{4})συνx+ημ(x+\frac{π}{4})ημx$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $συν(x+\frac{π}{4})+συν(x-\frac{π}{4})=\sqrt{2}συνx$

ii) $συν^2(x-\frac{π}{4})-συν^2(x+\frac{π}{4})$
$=2ημxσυνx$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, την τιμή των παραστάσεων:

i) $ημ\frac{17π}{18}συν\frac{4π}{9}-συν\frac{17π}{18}ημ\frac{4π}{9}$

ii) $ημ70^\circ συν20^\circ+συν70^\circ ημ20^\circ$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}-\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}{1+\varepsilon\varphi\frac{7\pi}{12}\varepsilon\varphi\frac{\pi}{4}}$

iv) $\dfrac{\varepsilon\varphi165^\circ+\varepsilon\varphi15^\circ}{1-\varepsilon\varphi165^\circ\varepsilon\varphi15^\circ}$

5. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $\eta\mu2x\sigma\upsilon\nu x+\sigma\upsilon\nu2x\eta\mu x$

ii) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sigma\upsilon\nu x-\sigma\upsilon\nu\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\eta\mu x$

iii) $\dfrac{\varepsilon\varphi x-\varepsilon\varphi2x}{1+\varepsilon\varphi x\varepsilon\varphi2x}$

iv) $\dfrac{\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)+\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}{1-\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{3}+2x\right)\varepsilon\varphi\left(\frac{\pi}{6}-x\right)}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\eta\mu x$

ii) $(\eta\mu\alpha+\sigma\upsilon\nu\alpha)(\eta\mu\beta+\sigma\upsilon\nu\beta)=$
$\eta\mu(\alpha+\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)$

7. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τους τριγωνομετρικούς αριθμούς των 105° και 195°.

8. Να αποδείξετε ότι:

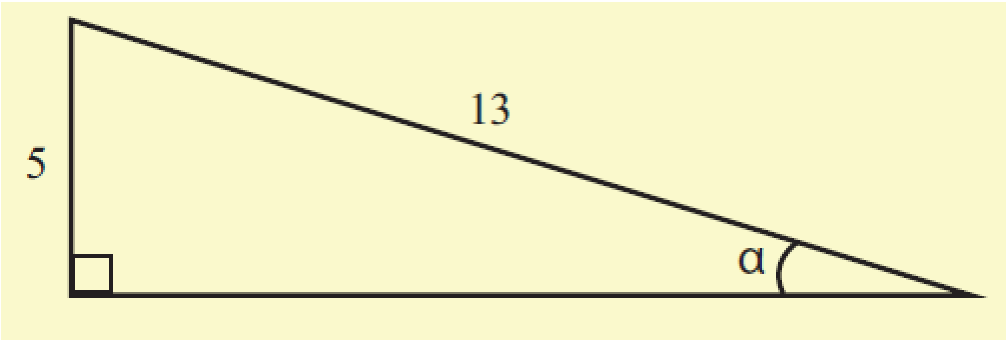
i) $\varepsilon\varphi\alpha+\varepsilon\varphi\beta=\dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta}$

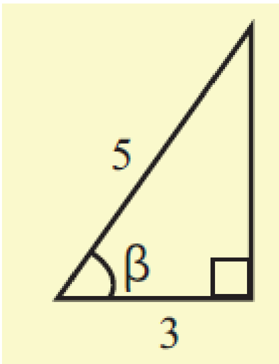
ii) $\sigma\varphi\alpha + \sigma\varphi\beta = \dfrac{\eta\mu(\alpha+\beta)}{\eta\mu\alpha\eta\mu\beta}$

9. Να αποδείξετε ότι για τις γωνίες α, β του διπλανού σχήματος ισχύει:

i) $\eta\mu(\alpha+\beta) = \dfrac{63}{65}$

ii) $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = \dfrac{16}{65}$





10. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α+β, αν:

i) $\eta\mu\alpha = \dfrac{3}{5}$, $\quad \sigma\upsilon\nu\beta = -\dfrac{5}{13}$, $\quad 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$ και $\dfrac{\pi}{2} < \beta < \pi$

ii) $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{3}{5}$, $\eta\mu\beta = -\frac{4}{5}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ και $\frac{3\pi}{2} < \beta < 2\pi$

11. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu(x + \frac{\pi}{6})$ ii) $\varepsilon\varphi x + \varepsilon\varphi(\frac{\pi}{4} + x) = -2$

iii) $\varepsilon\varphi(x - \alpha) = -2$, αν $\varepsilon\varphi\alpha = -3$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

$$\frac{\eta\mu(\alpha-\beta)}{\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta} + \frac{\eta\mu(\beta-\gamma)}{\sigma\upsilon\nu\beta\sigma\upsilon\nu\gamma} + \frac{\eta\mu(\gamma-\alpha)}{\sigma\upsilon\nu\gamma\sigma\upsilon\nu\alpha} = 0$$

2. Αν $\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta) = 0$, να αποδείξετε ότι: $\eta\mu(\alpha + 2\beta) = \eta\mu\alpha$

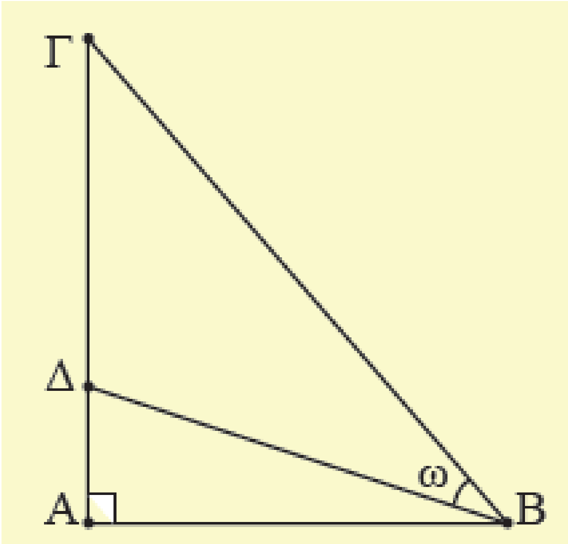
3. Αν $\varepsilon\varphi\alpha = -3$, να λύσετε στο $[0,2\pi]$ τη εξίσωση: $\eta\mu(x-\alpha) = -2\eta\mu(x+\alpha)$

4. Αν $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$, να αποδείξετε ότι: $(1+\varepsilon\varphi\alpha)(1+\varepsilon\varphi\beta) = 2$

5. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι $А\Gamma = 3 \cdot А\Delta$, να αποδείξετε ότι:

i) $\varepsilon\varphi\omega = \frac{2\varepsilon\varphi B}{3+\varepsilon\varphi^2 B}$, όπου $B = A\hat{B}\Gamma$

ii) Η ΒΔ είναι διχοτόμος της γωνίας Β, αν $B = 60^0$



6. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $\frac{ημΑ+ημ(Β-Γ)}{συν(Β-Γ)}=εφΒ$,

να αποδείξετε ότι $Α=\frac{π}{2}$ και αντιστρόφως.

*7. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) $σφΑσφΒ+σφΒσφΓ+σφΓσφΑ=1$,

ii) $\frac{συνΑ}{ημΒημΓ}+\frac{συνΒ}{ημΓημΑ}+\frac{συνΓ}{ημΑημΒ}=2$

8. Να λυθεί στο διάστημα [0,π] η εξίσωση:

$εφ(\frac{π}{4}+x)-εφ(\frac{π}{4}-x)=2\sqrt{3}$

*9. Αν $0<x,y,z<\frac{π}{2}$ με $εφx=\frac{1}{2}$, $εφy=\frac{1}{5}$ και $εφz=\frac{1}{8}$, να αποδείξετε ότι: $x+y+z=\frac{π}{4}$

3.7 ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ ΤΗΣ ΓΩΝΙΑΣ 2α

Οι τύποι που εκφράζουν τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας 2α, ως συνάρτηση των τριγωνομετρικών αριθμών της γωνίας α, είναι ειδικές περιπτώσεις των τύπων της προηγούμενης παραγράφου.

Συγκεκριμένα, αν στους τύπους του $ημ(α+β)$, του $συν(α+β)$ και της $εφ(α+β)$ αντικαταστήσουμε το β με το α, έχουμε:

- $ημ2α = ημ(α+α) = ημασυνα + συναημα = 2ημασυνα$

Επομένως:

$$ημ2α = 2ημασυνα \qquad (1)$$

- $συν2α = συν(α+α) = συνασυνα - ημαημα$

$= συν^2α - ημ^2α$

$= συν^2α - (1 - συν^2α) = 2συν^2α - 1$

Επίσης $συν2α = συν^2α - ημ^2α$

$= (1 - ημ^2α) - ημ^2α = 1 - 2ημ^2α$

Επομένως:

$$συν2α = συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1 = 1 - 2ημ^2α \qquad (2)$$

- $$εφ2α = \frac{εφα + εφα}{1 - εφαεφα} = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}$$

Επομένως:

$$\boxed{εφ2α = \frac{2εφα}{1 - εφ^2α}} \qquad (3)$$

Από τους τύπους (2) μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας α, αν γνωρίζουμε το συν2α.

Πράγματι, έχουμε:

- $συν2α = 2συν^2α - 1 \Leftrightarrow$ $1 + συν2α = 2συν^2α$ $\Leftrightarrow συν^2α = \frac{1 + συν2α}{2}$
- $συν2α = 1 - 2ημ^2α \Leftrightarrow$ $2ημ^2α = 1 - συν2α$ $\Leftrightarrow ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}$

$$εφ^2α = \frac{ημ^2α}{συν^2α} = \frac{\frac{1 - συν2α}{2}}{\frac{1 + συν2α}{2}} = \frac{1 - συν2α}{1 + συν2α}$$

Επομένως:

$$\boxed{ημ^2α = \frac{1 - συν2α}{2}} \qquad (4)$$

$$\sigma\upsilon\nu^2\alpha = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{2} \quad (5)$$

$$\varepsilon\varphi^2\alpha = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha} \quad (6)$$

Με τη βοήθεια των παραπάνω τύπων μπορούμε να υπολογίσουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του μισού μιας γωνίας, αν γνωρίζουμε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας αυτής. Για παράδειγμα οι τριγωνομετρικοί αριθμοί της γωνίας $22{,}5^\circ = \frac{45^\circ}{2}$ υπολογίζονται ως εξής:

$$\eta\mu^2 22{,}5^\circ = \frac{1-\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} = \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{4},$$

οπότε $\eta\mu 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

$$\sigma\upsilon\nu^2 22{,}5^\circ = \frac{1+\sigma\upsilon\nu 45^\circ}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{2}}{4},$$

οπότε $\sigma\upsilon\nu 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

Επομένως $\varepsilon\varphi 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}-1$ **και**

$$\sigma\varphi 22{,}5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{\sqrt{2-\sqrt{2}}} = \sqrt{2}+1$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να αποδειχθεί ότι:

i) $\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

ii) $\sigma\upsilon\nu 3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έχουμε:

i) $\eta\mu 3\alpha = \eta\mu(2\alpha + \alpha) = \eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu 2\alpha\eta\mu\alpha$

$= 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha + (1 - 2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$

$= 2\eta\mu\alpha(1 - \eta\mu^2\alpha) + (1 - 2\eta\mu^2\alpha)\eta\mu\alpha$

$= 2\eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha + \eta\mu\alpha - 2\eta\mu^3\alpha$

$= 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$

ii)

$\sigma\upsilon\nu 3\alpha = \sigma\upsilon\nu(2\alpha + \alpha) = \sigma\upsilon\nu 2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha - \eta\mu 2\alpha\eta\mu\alpha$

$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha$

$= (2\sigma\upsilon\nu^2\alpha - 1)\sigma\upsilon\nu\alpha - 2(1 - \sigma\upsilon\nu^2\alpha)\sigma\upsilon\nu\alpha$

$= 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha - \sigma\upsilon\nu\alpha - 2\sigma\upsilon\nu\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^3\alpha = 4\sigma\upsilon\nu^3\alpha - 3\sigma\upsilon\nu\alpha$

2ο Να αποδείξετε ότι για κάθε γωνία α με $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$ ισχύει:

i) $\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

ii) $\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Αν $\sigma\upsilon\nu\alpha \neq 0$, έχουμε:

$$\eta\mu 2\alpha = 2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha = \frac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} =$$

i) $$\frac{\dfrac{2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

$$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha =$$

$$\frac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha - \eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha + \eta\mu^2\alpha} =$$

$$\frac{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} - \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}}{\dfrac{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha} + \dfrac{\eta\mu^2\alpha}{\sigma\upsilon\nu^2\alpha}} = \frac{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha}{1 + \varepsilon\varphi^2\alpha}$$

3ο Αν $\varepsilon\varphi 2\alpha = \frac{3}{4}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, να βρεθεί η εφα.

ΛΥΣΗ

Από τον τύπο (3) έχουμε:

$$\frac{3}{4} = \frac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1 - \varepsilon\varphi^2\alpha} \Leftrightarrow 8\varepsilon\varphi\alpha = 3 - 3\varepsilon\varphi^2\alpha$$

$$\Leftrightarrow 3\varepsilon\varphi^2\alpha + 8\varepsilon\varphi\alpha - 3 = 0$$

[αφού Δ=100]

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{-8 \pm 10}{6}$$

$$\Leftrightarrow \varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{3} \qquad \text{ή} \qquad \varepsilon\varphi\alpha = -3$$

Από τις τιμές της εφα που βρήκαμε δεκτή είναι μόνο η -3, αφού $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

4ο Να αποδειχθεί ότι $\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x}$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή $\varepsilon\varphi^2\alpha=\frac{1-\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu 2\alpha}$, έχουμε:

$$\varepsilon\varphi^2\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=$$

$$\frac{1-\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)}{1+\sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)} \text{ αφού } \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=\eta\mu 2x$$

$$=\frac{1-\eta\mu 2x}{1+\eta\mu 2x},$$

5ο Να λυθεί η εξίσωση: $2-\eta\mu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}$

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$$2-\eta\mu^2x=2\sigma\upsilon\nu^2\frac{x}{2}\Leftrightarrow$$

$$2-\eta\mu^2x=1+\sigma\upsilon\nu x$$

$\Leftrightarrow 2-(1-\sigma\upsilon\nu^2 x)=1+\sigma\upsilon\nu x$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu^2 x-\sigma\upsilon\nu x=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x(\sigma\upsilon\nu x-1)=0$

$\Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu x=0 \qquad ή \qquad \sigma\upsilon\nu x=1$

$\Leftrightarrow x=2\kappa\pi\pm\dfrac{\pi}{2} \qquad ή \qquad x=2\kappa\pi$

$\kappa\in\mathbb{Z}$

6ο Να εκφρασθεί το 8συν4α ως συνάρτηση του συν2α και του συν4α

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Σύμφωνα με τον τύπο (5) έχουμε:

$8\sigma\upsilon\nu^4\alpha=8(\sigma\upsilon\nu^2\alpha)^2=$

$=8\left(\dfrac{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha}{2}\right)^2=$

$=8\cdot\dfrac{1+2\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu^2\alpha}{4}=$

$=2+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+2\sigma\upsilon\nu^2 2\alpha=$

$=2+4\sigma\upsilon\nu\alpha2\alpha+1+\sigma\upsilon\nu4\alpha=$

$=3+4\sigma\upsilon\nu2\alpha+\sigma\upsilon\nu4\alpha.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων:

i) $2\eta\mu\dfrac{3\pi}{4}\sigma\upsilon\nu\dfrac{3\pi}{4}$

ii) $1-2\eta\mu^2\dfrac{\pi}{12}$

iii) $2\sigma\upsilon\nu^2 135^0-1$

iv) $\dfrac{2\varepsilon\varphi 75^0}{1-\varepsilon\varphi^2 75^0}$

2. Να γράψετε σε απλούστερη μορφή τις παραστάσεις:

i) $2\eta\mu 2\alpha\sigma\upsilon\nu 2\alpha$

ii) $2\sigma\upsilon\nu^2\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)-1$

iii) $\dfrac{2\varepsilon\varphi 3\alpha}{1-\varepsilon\varphi^2 3\alpha}$

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^2\alpha+\sigma\upsilon\nu 2\alpha=\sigma\upsilon\nu^2\alpha$

ii) $\dfrac{\eta\mu 2\alpha}{1-\eta\mu^2\alpha}=2\varepsilon\varphi\alpha$

iii) $\sigma\varphi\alpha-\varepsilon\varphi\alpha=2\sigma\varphi 2\alpha$

iv) $\varepsilon\varphi\alpha+\sigma\varphi\alpha=\dfrac{2}{\eta\mu 2\alpha}$

4. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του 2α, αν:

i) $\sigma\upsilon\nu\alpha = -\frac{4}{5}$ και $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ ii) $\eta\mu\alpha = \frac{3}{5}$ και $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$

5. Να υπολογίσετε την εφ(α+2β), αν $\varepsilon\varphi\alpha = \frac{1}{4}$ και $\varepsilon\varphi\beta = \frac{1}{3}$

6. Να αποδείξετε ότι:

i) $\eta\mu^3\alpha\sigma\upsilon\nu\alpha + \sigma\upsilon\nu^3\alpha\eta\mu\alpha = \frac{1}{2}\eta\mu2\alpha$

ii) $\eta\mu2\alpha\varepsilon\varphi\alpha + 2\sigma\upsilon\nu^2\alpha = 2$

iii) $\frac{\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

iv) $\frac{1-\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha}{1+\sigma\upsilon\nu2\alpha+\eta\mu2\alpha} = \varepsilon\varphi\alpha$

7. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sigma\upsilon\nu2x - \eta\mu x - 1 = 0$ ii) $\eta\mu2x - 2\sigma\upsilon\nu x + \eta\mu x - 1 = 0$

8. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\frac{\pi}{16}$

9. Να υπολογίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς του $\frac{\alpha}{2}$,αν:

i) $συνα = \frac{5}{13}$ και $0 < α < \frac{π}{2}$

ii) $συνα = \frac{3}{5}$ και $\frac{3π}{2} < α < 2π$

10. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $συν2x + 2συν^2\frac{x}{2} = 0$

ii) $συνx - 2ημ^2\frac{x}{2} = 0$

iii) $2 - συν^2x = 4ημ^2\frac{x}{2}$

iv) $συν^2x - 1 = 2συν^2\frac{x}{2}$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $0 \le α < \frac{π}{4}$, να αποδείξετε ότι:

$συνα - ημα = \sqrt{1 - ημ2α}$.

2. Να αποδείξετε ότι: $\frac{ημ^2α + 1 - συν^2α}{ημα(1 + συνα)} = 2εφ\frac{α}{2}$

3. Να αποδείξετε ότι: $ημ^2\frac{π}{8} - συν^4\frac{3π}{8} = \frac{1}{8}$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{1 + εφαεφ2α}{εφα + σφα} = \frac{εφ2α}{2}$

ii) $\dfrac{3-4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}{3+4\sigma\upsilon\nu 2\alpha+\sigma\upsilon\nu 4\alpha}=\varepsilon\varphi^4\alpha$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\varepsilon\varphi(45^0-\alpha)=\frac{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}{1+\eta\mu 2\alpha}=\frac{1}{\sigma\upsilon\nu 2\alpha}-\varepsilon\varphi 2\alpha$$

και με τη βοήθεια αυτού του τύπου να υπολογίσετε την εφ 15°.

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $\varepsilon\varphi 2x=2\sigma\upsilon\nu x$

ii) $\varepsilon\varphi x\cdot\varepsilon\varphi 2x=-3$

7. Να αποδείξετε ότι: $\sigma\upsilon\nu 4\alpha=8\sigma\upsilon\nu^4\alpha-8\sigma\upsilon\nu^2\alpha+1$

8. Να αποδείξετε ότι:

i) $\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{\pi}{8}+\sigma\upsilon\nu^4\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{3}{4}$

ii) $\eta\mu^4\dfrac{\pi}{8}+\eta\mu^4\dfrac{3\pi}{8}=\dfrac{3}{4}$

iii) $8\eta\mu^2\alpha\sigma\upsilon\nu^2\alpha=1-\sigma\upsilon\nu 4\alpha$

9. Αν $\sigma\upsilon\nu x=\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}$, $\sigma\upsilon\nu y=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}$ **και** $\sigma\upsilon\nu z=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$, **να αποδείξετε ότι:**

$$\varepsilon\varphi^2\frac{x}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{y}{2}+\varepsilon\varphi^2\frac{z}{2}=1.$$

3.8 ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΩΝ ΠΑΡΑΣΤΑΣΕΩΝ

Σε αρκετές εφαρμογές της Τριγωνομετρίας χρειάζεται το γινόμενο τριγωνομετρικών αριθμών να μετασχηματισθεί σε άθροισμα ή αντιστρόφως το άθροισμα σε γινόμενο.

Στην παράγραφο αυτή θα αναζητήσουμε τύπους, με τους οποίους γίνονται οι παραπάνω μετασχηματισμοί.

Μετασχηματισμός γινομένου σε άθροισμα

Από τις γνωστές μας ισότητες:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$
$$\eta\mu(\alpha-\beta)=\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\sigma\upsilon\nu\alpha\eta\mu\beta$$

με πρόσθεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)=2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta$$

δηλαδή: $2\eta\mu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\eta\mu(\alpha+\beta)+\eta\mu(\alpha-\beta)\,(1)$

ενώ από τις: $\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$

$$\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)=\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta-\eta\mu\alpha\eta\mu\beta$$

με πρόσθεση και αφαίρεση κατά μέλη βρίσκουμε ότι:

$$2\sigma\upsilon\nu\alpha\sigma\upsilon\nu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)+\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)(2)$$

$$2\eta\mu\alpha\eta\mu\beta=\sigma\upsilon\nu(\alpha-\beta)-\sigma\upsilon\nu(\alpha+\beta)(3)$$

Μετασχηματισμός αθροίσματος σε γινόμενο

Με τη βοήθεια των προηγούμενων τριών τύπων μπορούμε να μετασχηματίσουμε το άθροισμα τριγωνομετρικών αριθμών σε γινόμενο. Πράγματι, αν θέσουμε

α+β=Α και $\alpha - \beta = B$,

τότε έχουμε

$$A + B = \alpha + \beta + \alpha - \beta = 2\alpha, \quad \text{οπότε} \quad \alpha = \frac{A+B}{2}$$

$$A - B = \alpha + \beta - \alpha + \beta = 2\beta, \quad \text{οπότε} \quad \beta = \frac{A-B}{2}$$

Έτσι ο παραπάνω τύπος (1) γράφεται

$$2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} = \eta\mu A + \eta\mu B.$$

Δηλαδή έχουμε:

$$\eta\mu A + \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2} \quad (4)$$

Αν τώρα στον τύπο (4) αντικαταστήσουμε το Β με –Β, βρίσκουμε:

$$\eta\mu A - \eta\mu B = 2\eta\mu\frac{A-B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2} \quad (5)$$

Ομοίως, από τον τύπο (2), βρίσκουμε:

$$\text{συν}A+\text{συν}B=2\text{συν}\frac{A+B}{2}\text{συν}\frac{A-B}{2}$$
(6)

ενώ από τον τύπο (3) βρίσκουμε

$2\text{ημ}\frac{A+B}{2}\text{ημ}\frac{A-B}{2}=\text{συν}B-\text{συν}A$, οπότε

$$\text{συν}A-\text{συν}B=-2\text{ημ}\frac{A-B}{2}\text{ημ}\frac{A+B}{2}$$
(7)

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1° **Να λυθεί η εξίσωση: ημ6xσυν3x=ημ5xσυν4x (1)**

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$$
\begin{aligned}
(1) &\Leftrightarrow 2\text{ημ}6x\text{συν}3x=2\text{ημ}5x\text{συν}4x\\
&\Leftrightarrow \text{ημ}9x+\text{ημ}3x=\text{ημ}9x+\text{ημ}x\\
&\Leftrightarrow \text{ημ}3x=\text{ημ}x\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 3x=2κπ+x \\ \quad\quad ή \\ 3x=2κπ+π-x \end{cases},κ\in\mathbb{Z}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x=κπ \\ \quad\quad ή \\ x=\dfrac{2κπ+π}{4} \end{cases},κ\in\mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

2° Να λυθεί η εξίσωση: συν3x+συνx=ημ2x

ΛΥΣΗ

Έχουμε: : (1)

$$\Leftrightarrow 2\text{συν}\frac{3x+x}{2}\text{συν}\frac{3x-x}{2} = 2\text{ημ}x\text{συν}x$$

$$\Leftrightarrow 2\text{συν}2x\text{συν}x = 2\text{ημ}x\text{συν}x$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}2x\text{συν}x - \text{ημ}x\text{συν}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}x(\text{συν}2x - \text{ημ}x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{συν}x = 0 \, (2) \quad \text{ή} \quad \text{συν}2x = \text{ημ}x \, (3)$$

Αλλά (2) $\Leftrightarrow \text{συν}x = \text{συν}\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow x = 2\kappa\pi \pm \frac{\pi}{2}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$

και (3) $\Leftrightarrow \text{συν}2x = \text{συν}(\frac{\pi}{2} - x)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 2\kappa\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \text{ή}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ 2x = 2\kappa\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \\ \text{ή}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{4\kappa\pi + \pi}{6} \\ \text{ή}, \quad \kappa \in \mathbb{Z} \\ x = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

3ο Να αποδειχθεί ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$\eta\mu A+\eta\mu B+\eta\mu\Gamma=$$

$$=2\eta\mu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+$$

$$2\eta\mu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}=$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+$$

$$2\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}$$

$$\left(\gamma\iota\alpha\tau\acute{\iota}\qquad\frac{A+B}{2}+\frac{\Gamma}{2}=\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}\left[\sigma\upsilon\nu\frac{A-B}{2}+\sigma\upsilon\nu\frac{A+B}{2}\right]$$

$$=2\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}2\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}=$$

$$=4\sigma\upsilon\nu\frac{A}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{B}{2}\sigma\upsilon\nu\frac{\Gamma}{2}.$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α ΟΜΑΔΑΣ

1. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα γινόμενα:

i) $συν75^\circ συν15^\circ$

ii) $ημ105^\circ συν15^\circ$

iii) $ημ\frac{13π}{2}συν\frac{π}{12}$

iv) $ημ\frac{11π}{12}ημ\frac{7π}{12}$

2. Να μετατρέψετε σε αθροίσματα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω γινόμενα:

i) $2ημxσυν2x$ ii) $2ημ4xημ2x$

iii) $2συν3xσυν5x$

iv) $συν6xημ2x$

v) $ημ(\frac{π}{4}-x)ημ(\frac{π}{4}+x)$

3. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $ημ3xσυνx = ημ6xσυν2x$

ii) $συν3xσυν2x = ημ2xημx$

4. Να υπολογίσετε, χωρίς τη χρήση υπολογιστών τσέπης, τα αθροίσματα:

i) $ημ75^\circ + ημ15^\circ$

ii) $ημ\frac{11π}{12} - ημ\frac{5π}{12}$

iii) $συν40^\circ + συν80^\circ + συν160^\circ$

5. Να μετατρέψετε σε γινόμενα τριγωνομετρικών αριθμών τα παρακάτω αθροίσματα:

i) $ημ4x + ημ2x$

ii) $συν5x - συν3x$

iii) $συν3x + συνx$

iv) $1 + ημx$

v) $1 + συνx$

6. Αν Β και Γ είναι οι οξείες γωνίες ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $ημ2Β + ημ2Γ = 2συν(Β - Γ)$

ii) $ημΒ - ημΓ = \sqrt{2}ημ\dfrac{Β - Γ}{2}$

7. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{συν3α - συν5α}{ημ3α + ημ5α} = εφα$

ii) $\dfrac{ημα + ημ3α + ημ5α}{συνα + συν3α + συν5α} = εφ3α$

iii) $\dfrac{ημαημ2α + ημ3αημ6α}{ημασυν2α + ημ3ασυν6α} = εφ5α$

8. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $ημ3x - ημx = συν2x$

ii) $συν5x - συνx = ημ3x$

iii) $ημ3x + ημ6x + ημ9x = 0$

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να αποδείξετε ότι:

i) $2ημ50^\circ - \dfrac{1}{2συν20^\circ} = 1$

ii) $2ημ52^\circ ημ68^\circ - 2ημ47^\circ συν77^\circ$
$-2συν65^\circ συν81^\circ = 1$

2. Αν για τις οξείες γωνίες Β και Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $4ημΒσυνΓ = 1$, να αποδείξετε ότι Β = 30°.

3. Να αποδείξετε ότι:

i) $ημαημβ \le ημ^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$

ii) $συνασυνβ \le συν^2\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$

4. Να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{ημα+ημβ}{2} \le ημ\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$, για οποιαδήποτε $α,β \in [0,π]$

ii) $\dfrac{συνα+συνβ}{2} \le συν\left(\dfrac{α+β}{2}\right)$, για οποιαδήποτε $α,β \in [-\dfrac{π}{2},\dfrac{π}{2}]$

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

i) $ημΑ + ημ(Β-Γ) = 2ημΒσυνΓ$

ii) $συν(Β-Γ) - συνΑ = 2συνΒσυνΓ$

iii) $συνΑ + συνΒ + συνΓ = 1 + 4ημ\dfrac{Α}{2}ημ\dfrac{Β}{2}ημ\dfrac{Γ}{2}$.

6. Να αποδείξετε ότι για τις οξείες γωνίες Β, Γ ενός ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ
ισχύει:

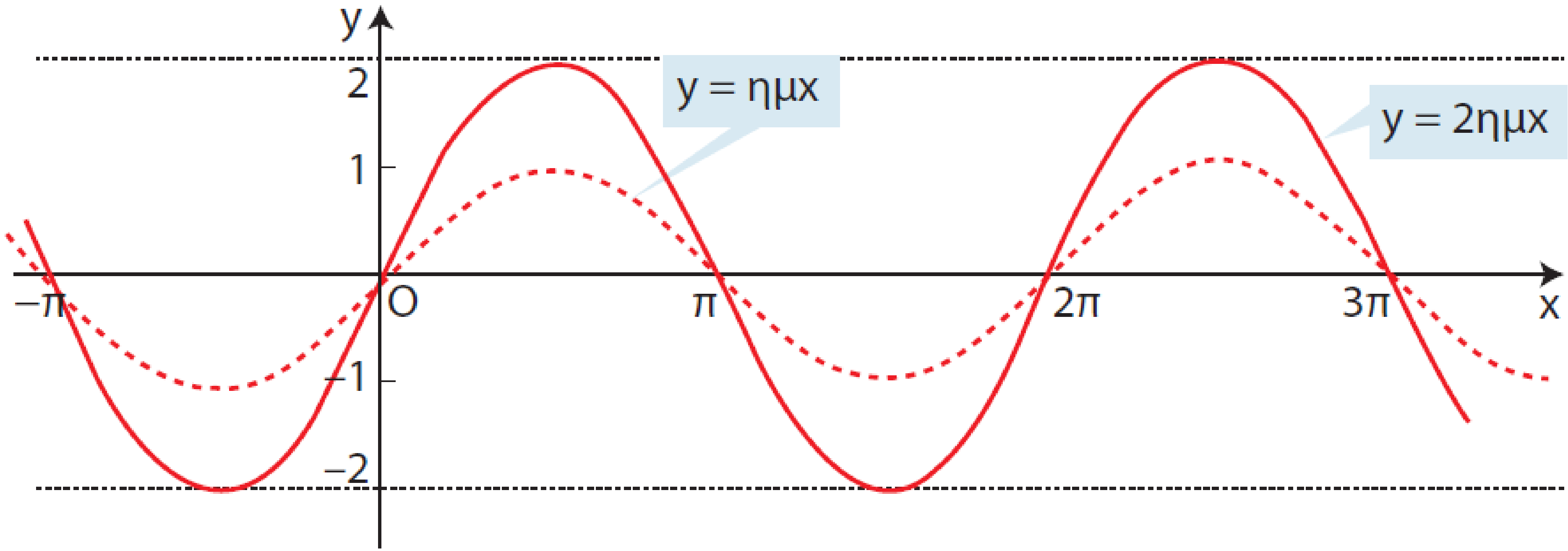
$$2\sqrt{2}συν\frac{B}{2}συν\frac{Γ}{2}-1=\sqrt{2}συν\frac{B-Γ}{2}$$

7. Αν για τις γωνίες Α, Β, Γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $ημA=συνB+συνΓ$, να αποδείξετε ότι Β=900 ή Γ=900 και αντιστρόφως.

3.9 Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ f(x)=αημx+βσυνx

Στην προηγούμενη τάξη είδαμε ότι μια συνάρτηση της μορφής f(x)=ρημx, ρ > 0 είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με $-ρ$. Η γραφική της παράσταση είναι μια ημιτονοειδής καμπύλη.

Μια τέτοια συνάρτηση είναι, π.χ., και η f(x)=2ημx, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Η συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ)

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x)=2\etaμ(x+\frac{\pi}{4})$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή

προκύπτει από την $g(x)=2ημx$ αν, όπου x, θέσουμε $x+\frac{π}{4}$ δη-

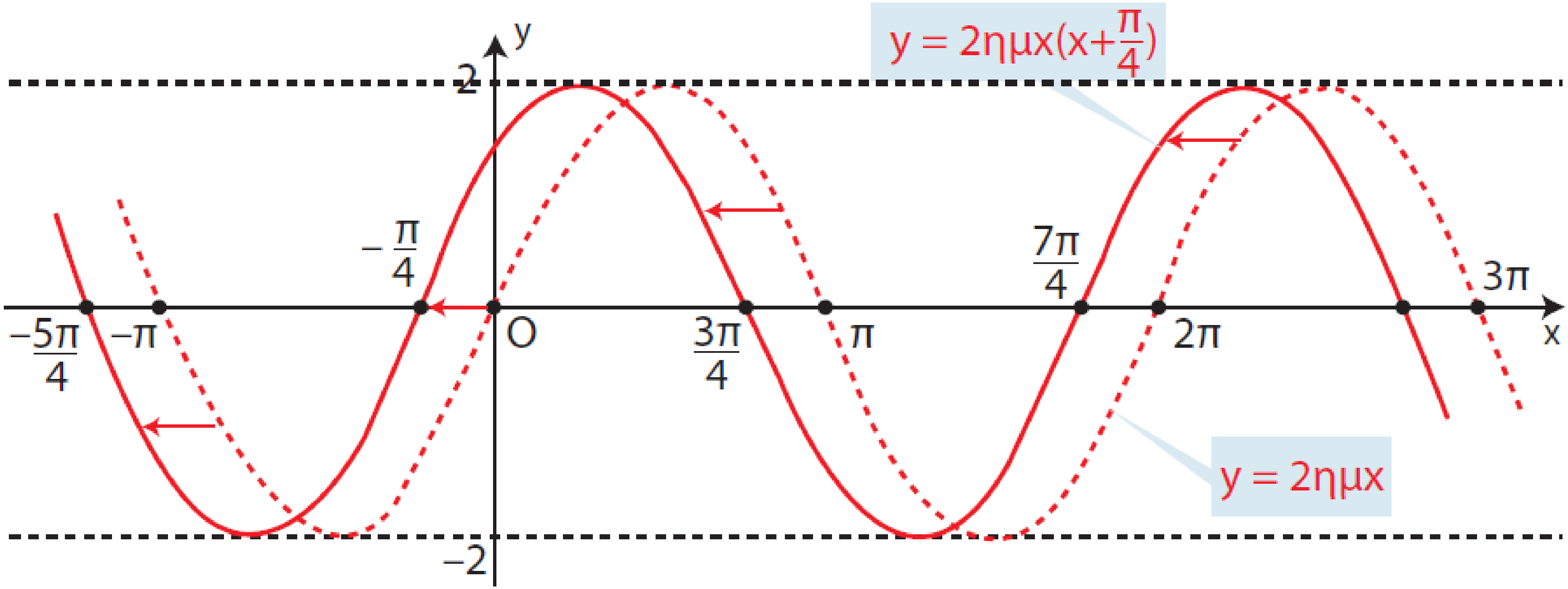
λαδή ισχύει $f(x)=g(x+\frac{π}{4})$

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{π}{4}$ μονάδες, προς τα αριστερά.

Όμως η συνάρτηση $g(x)=2ημx$ έχει περίοδο 2π, μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με -2.

Επομένως η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με 2 και ελάχιστο ίσο με -2.

Ο σταθερός αριθμός $\frac{π}{4}$ λέγεται διαφορά φάσεως των καμπυλών $y=2ημ(x+\frac{π}{4})$ και y = 2ημx. Οι καμπύλες αυτές φαίνονται στο παρακάτω σχήμα:



Γενικότερα, η γραφική παράσταση της συνάρτησης f(x)=ρημ(x+φ), ρ>0 προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = ρημx$. Επομένως:

Η συνάρτηση f(x)=ρημ(x+φ) είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με ρ και ελάχιστο ίσο με −ρ.

Η συνάρτηση f(x)=αημx+βσυνx, $\alpha,\beta \neq 0$

Έστω για παράδειγμα η συνάρτηση f(x)=ημx+συνx.
Για να τη μελετήσουμε
θα προσπαθήσουμε να τη μετατρέψουμε σε άλλη συνάρτηση γνωστής μορφής.

Έχουμε:

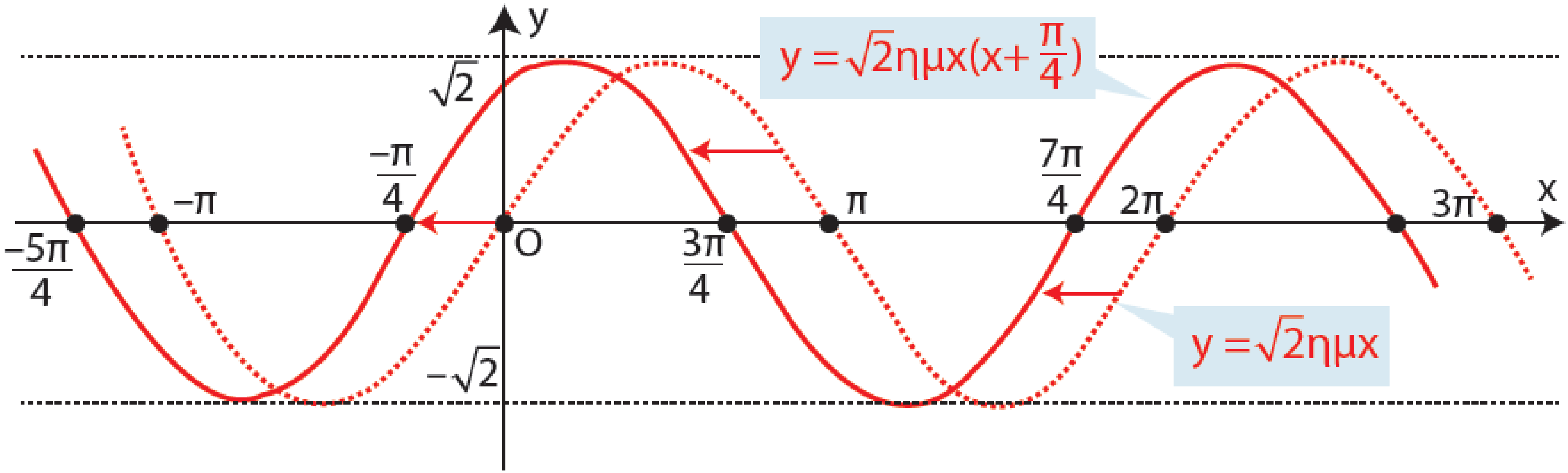
$$ημx + συνx = ημx + εφ\frac{\pi}{4}συνx$$

$$= ημx + \frac{ημ\frac{\pi}{4}}{συν\frac{\pi}{4}}συνx =$$

$$= \frac{ημx \cdot συν\frac{\pi}{4} + συνx \cdot ημ\frac{\pi}{4}}{συν\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{ημ\left(x + \frac{\pi}{4}\right)}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \sqrt{2}ημ\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

Επομένως $f(x) = \sqrt{2}ημ\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση f είναι περιοδική με περίοδο 2π και έχει μέγιστο ίσο με $\sqrt{2}$ και ελάχιστο ίσο με $-\sqrt{2}$. Η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μια οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x) = \sqrt{2}ημx$ κατά $\frac{\pi}{4}$ μονάδες προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:



Γενικότερα θα αποδείξουμε ότι:

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\alpha,\beta \neq 0$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει:

$$\alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x = \rho\eta\mu(x+\varphi)$$

όπου

$$\rho = \sqrt{\alpha^2+\beta^2} \text{ και } \varphi \in \mathbb{R} \text{ με } \begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \end{cases}$$

Έστω το σημείο Μ(α,β) και φ μια από τις γωνίες με αρχική πλευρά Ox και τελική πλευρά OM. Τότε έχουμε:

$$\rho = (OM) = \sqrt{\alpha^2+\beta^2}$$

και

$$\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\alpha}{\rho} \quad \text{ή} \quad \alpha = \rho\sigma\upsilon\nu\varphi \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{\beta}{\rho} \quad \text{ή} \quad \beta = \rho\eta\mu\varphi \end{cases}$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \alpha\eta\mu x + \beta\sigma\upsilon\nu x &= \rho\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu x + \rho\eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu x \\ &= \rho(\sigma\upsilon\nu\varphi\eta\mu x + \eta\mu\varphi\sigma\upsilon\nu x) \\ &= \rho\eta\mu(x+\varphi) \end{aligned}$$

Η μελέτη λοιπόν της συνάρτησης f(x)=αημx+βσυνx, $\alpha,\beta \neq 0$ μπορεί να γίνει με τη μελέτη της συνάρτησης $f(x) = \rho\eta\mu(x+\varphi)$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

1$^{\text{o}}$ i) Να παρασταθεί γραφικά η συνάρτηση

$$f(x) = 2ημ(2x - \frac{π}{3})$$

ii) Ομοίως η συνάρτηση $f(x) = ημ2x - \sqrt{3}συν2x$

ΛΥΣΗ

i) Η συνάρτηση f γράφεται $f(x) = 2ημ\left(2(x - \frac{π}{6})\right)$.

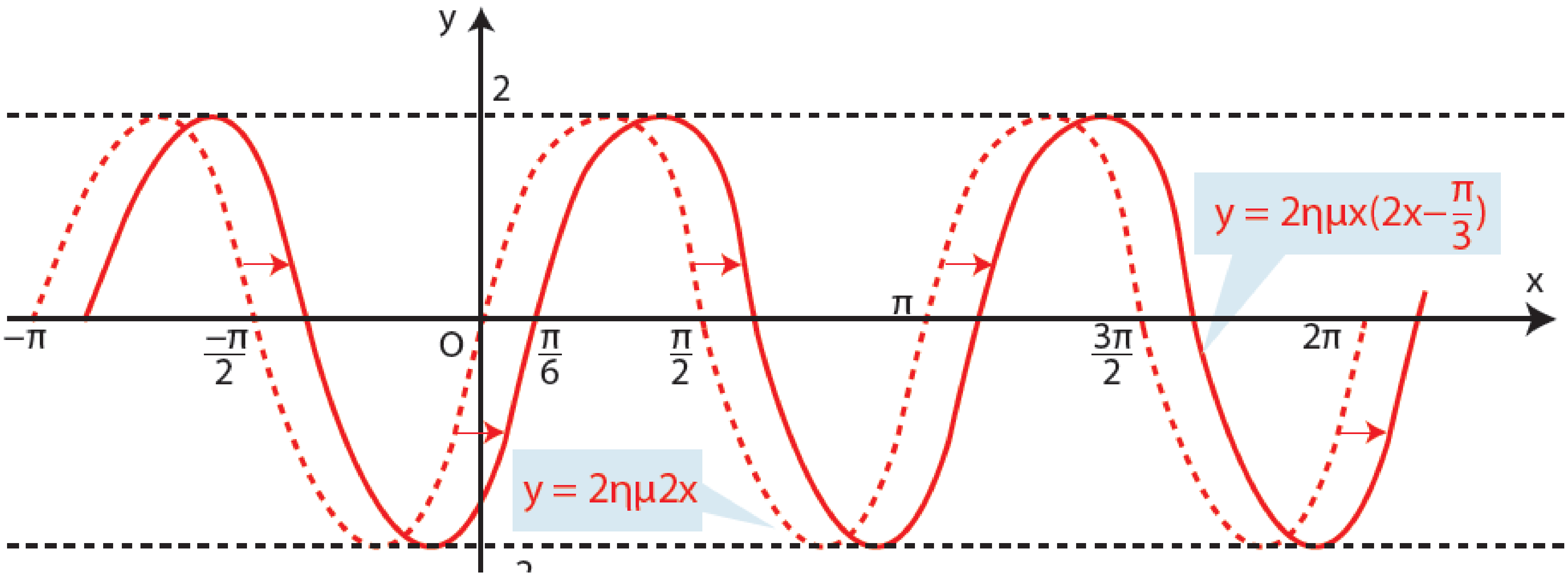
Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση αυτή προκύπτει από τη συνάρτηση $g(x) = 2ημ2x$ αν, όπου x θέσουμε $x - \frac{π}{6}$.

Αυτό σημαίνει ότι η γραφική παράσταση της f προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της g κατά $\frac{π}{6}$ μονάδες προς τα δεξιά.

Όμως η συνάρτηση $g(x) = 2ημ2x$ έχει περίοδο $\frac{2π}{2} = π$, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Άρα και η f είναι περιοδική με περίοδο π, μέγιστο 2 και ελάχιστο -2.

Οι γραφικές παραστάσεις των f και g φαίνονται στο παρακάτω σχήμα.



ii) Η παράσταση $ημ2x - \sqrt{3}συν2x$ είναι της μορφής $αημt + βσυνt$ με α=1, $β = -\sqrt{3}$ και όπου t το 2x. Επομένως παίρνει τη μορφή $ρημ(2x + φ)$.

Έχουμε

$\rho = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$

και $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{1}{2} \\ \eta\mu\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$,

οπότε ένα $\varphi = -\dfrac{\pi}{3}$

Άρα

$$f(x) = \eta\mu 2x - \sqrt{3}\sigma\upsilon\nu 2x = 2\eta\mu(2x - \frac{\pi}{3})$$

Τη συνάρτηση αυτή όμως τη μελετήσαμε προηγουμένως.

2ο Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{3}\eta\mu 4x + \sigma\upsilon\nu 4x = \sqrt{2}$

ΛΥΣΗ

Το 1ο μέλος της εξίσωσης είναι της μορφής $\alpha\eta\mu t + \beta\sigma\upsilon\nu t$ με $\alpha = \sqrt{3}$, β=1 και όπου t το 4x. Επομένως παίρνει τη μορφή ρημ(4x+φ).

Έχουμε

$$\rho = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = \sqrt{4} = 2$$

και $\begin{cases} \sigma\upsilon\nu\varphi = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \eta\mu\varphi = \dfrac{1}{2} \end{cases}$, .

οπότε ένα $\varphi = \dfrac{\pi}{6}$

Άρα $\sqrt{3}\eta\mu 4x + \sigma\upsilon\nu 4x = 2\eta\mu\left(4x + \dfrac{\pi}{6}\right)$ και η εξίσωση γίνεται

$$2\eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2} \Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \eta\mu\left(4x + \frac{\pi}{6}\right) = \eta\mu\frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + \dfrac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + \dfrac{\pi}{4} \\ \qquad \text{ή} \\ 4x + \dfrac{\pi}{6} = 2\kappa\pi + (\pi - \dfrac{\pi}{4}) \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \kappa\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\pi}{48} \\ \qquad \text{ή} \\ x = \kappa\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{7\pi}{48} \end{cases}, \quad \kappa \in \mathbb{Z}$$

3ο **Δυο ρεύματα με την ίδια κυκλική συχνότητα ω και με εντάσεις $I_1 = 2ημωt$ και $I_2 = 2ημ\left(ωt + \frac{2π}{3}\right)$ διαρρέουν έναν αγωγό. Να δειχθεί ότι το άθροισμα τους έχει την ίδια κυκλική συχνότητα.**

ΛΥΣΗ

Έχουμε $I_{ολ} = I_1 + I_2 =$

$$2ημωt + 2ημ\left(ωt + \frac{2π}{3}\right)$$

$$= 2ημωt + 2\left(ημωtσυν\frac{2π}{3} + συνωtημ\frac{2π}{3}\right)$$

$$= 2ημωt + 2\left(-\frac{1}{2}ημωt + \frac{\sqrt{3}}{2}συνωt\right)$$

$$= ημωt + \sqrt{3}συνωt$$

$$= 2ημ\left(ωt + \frac{π}{3}\right),$$

που σημαίνει ότι το $I_{ολ}$ έχει την ίδια κυκλική συχνότητα ω.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την περίοδο, τη μέγιστη τιμή και την ελάχιστη τιμή των παρακάτω
συναρτήσεων και στη συνέχεια να τις παραστήσετε γραφικά:

i) $f(x)=2\eta\mu\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$

ii) $f(x)=\eta\mu\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

2. Να γράψετε στη μορφή $f(x)=\rho\eta\mu(x+\varphi)$ τις συναρτήσεις:

i) $f(x)=\sqrt{3}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

ii) $f(x)=-\eta\mu x+\sigma\upsilon\nu x$

iii) $f(x)=-\eta\mu x-\sqrt{3}\sigma\upsilon\nu x$

iv) $f(x)=\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x$

3. Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις της άσκησης 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:

i) $\sqrt{3}\eta\mu x-\sigma\upsilon\nu x=2$,

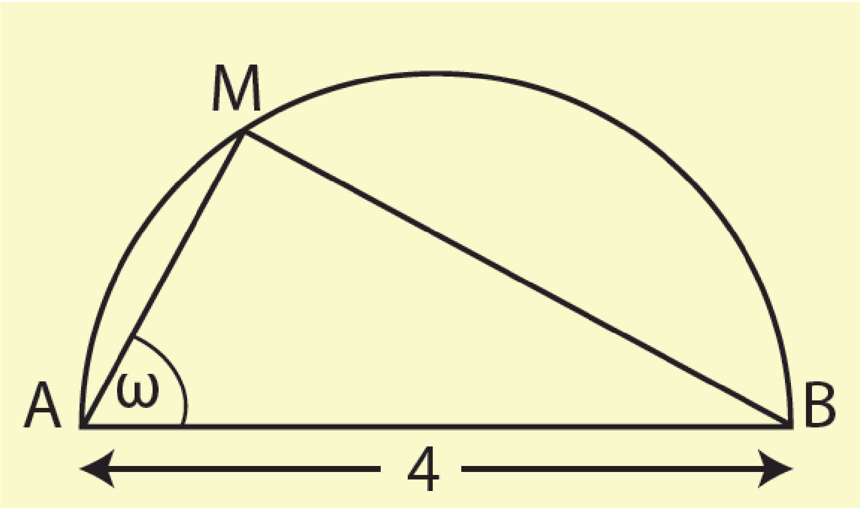
ii) $\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x=1$,

iii) $\sqrt{2}\eta\mu x+\sqrt{6}\sigma\upsilon\nu x+2=0$

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

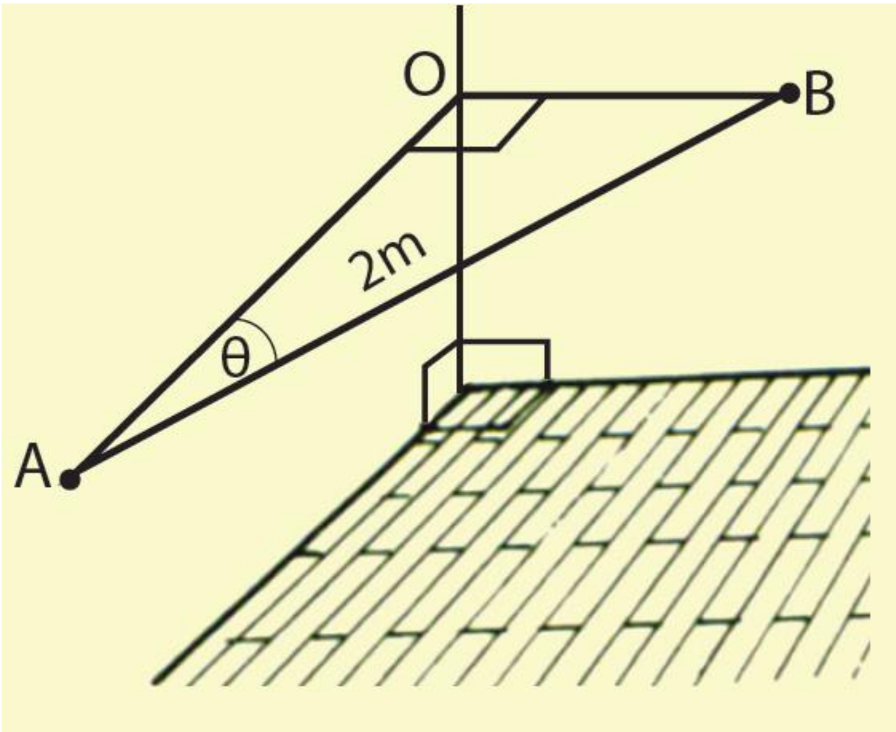
1. Να υπολογίσετε τη γωνία ω του παρακάτω σχήματος, έτσι ώστε να ισχύει:

$$(MA)+(MB)=2\sqrt{6}$$



2. Μια μπάρα AB μήκους 2m τοποθετείται οριζόντια μεταξύ δυο κάθετων τοίχων. Για μεγαλύτερη αντοχή πρέπει να τοποθετηθεί, έτσι ώστε το (OA)+(OB) να γίνει μέγιστο.

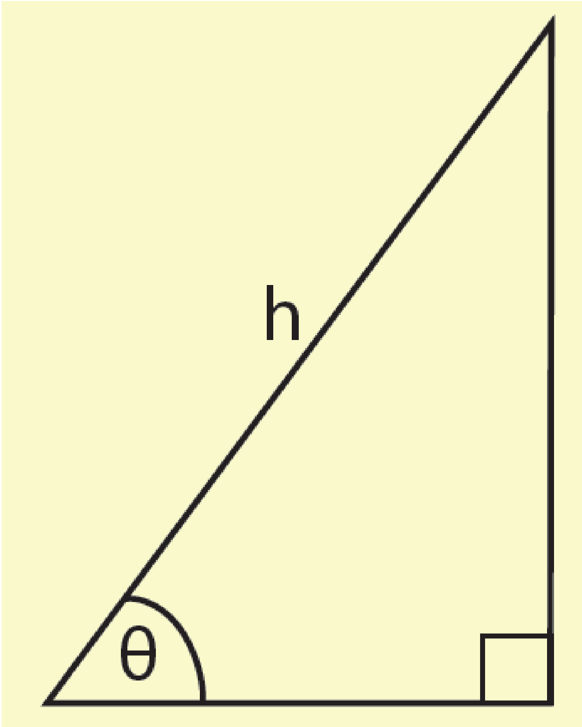
i) Να εκφράσετε το (OA)+(OB) ως συνάρτηση του θ.
ii) Να βρείτε την τιμή του θ για την οποία το (OA)+(OB) γίνεται μέγιστο και να προσδιορίσετε το μέγιστο αυτό.



3. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή των συναρτήσεων:
i) $f(x) = 5ημx + 12συνx + 3$,
ii) $f(x) = 4συνx(ημx + συνx)$

4. Να λύσετε την εξίσωση: $2ημx(\sqrt{3}συνx - ημx) = \sqrt{2} - 1$

5. Με συρματόπλεγμα μήκους 40m περιφράσσουμε τμήμα γης σχήματος ορθογωνίου τριγώνου. Αν η υποτείνουσα είναι h m και η μια οξεία γωνία Grad (Σχήμα).



i) Να αποδείξετε ότι:

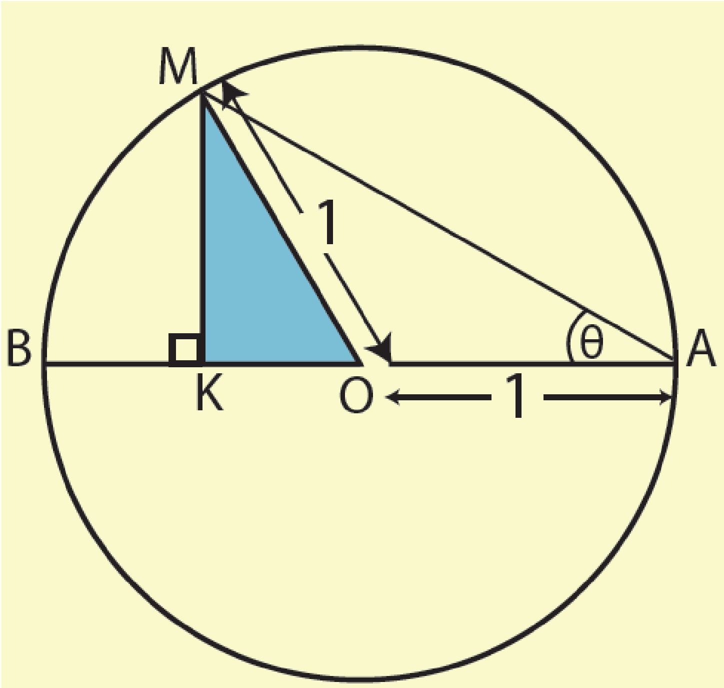
$$h=\frac{40}{\eta\mu\theta+\sigma\upsilon\nu\theta+1}$$

ii) Για ποια τιμή του θ το h παίρνει τη μικρότερη τιμή και ποια είναι αυτή;

6. Στο παρακάτω σχήμα:

i) Να δείξετε ότι η περίμετρος P του τριγώνου ΜΚΟ ισούται με $P=1+\eta\mu2\theta+\sigma\upsilon\nu2\theta$.

ii) Για ποια τιμή του θ το P παίρνει τη μεγαλύτερη τιμή και ποια είναι αυτή;



3.10 ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΡΙΓΩΝΟΥ

Το κλασικό πρόβλημα της Τριγωνομετρίας, από το οποίο πήρε και το όνομά της, είναι η επίλυση τριγώνου, δηλαδή ο υπολογισμός των άγνωστων κύριων στοιχείων ενός τριγώνου, όταν δίνονται επαρκή στοιχεία του.

Η επίλυση τριγώνου μπορεί να γίνει με τη βοήθεια των παρακάτω δυο βασικών θεωρημάτων, που είναι γνωστά το ένα ως νόμος των ημίτονων και το άλλο ως νόμος των συνημίτονων.

Νόμος των ημίτονων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Όπου R, η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου

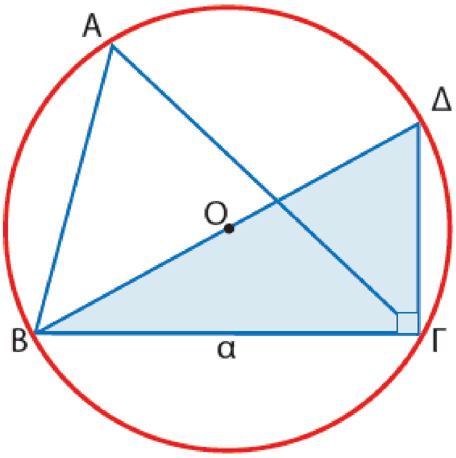
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω (0,R) ο περιγεγραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΓ. Αν φέρουμε τη διάμετρο ΒΔ και τη χορδή ΓΔ, τότε σχηματίζεται τρίγωνο ΓΒΔ που είναι ορθογώνιο στο Γ. Επομένως έχουμε:

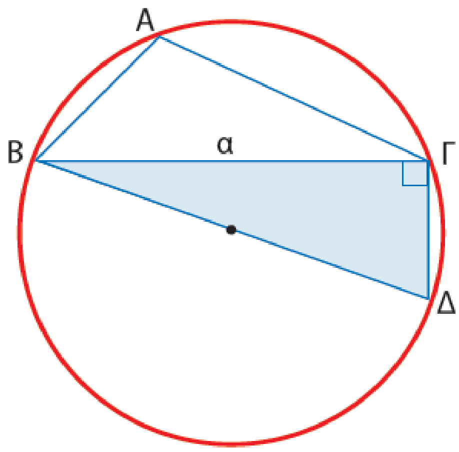
$$\eta\mu\Delta = \frac{(B\Gamma)}{(B\Delta)} = \frac{\alpha}{2R},$$

οπότε

$$\frac{\alpha}{\eta\mu\Delta} = 2R \qquad (1)$$



Σχήμα 1

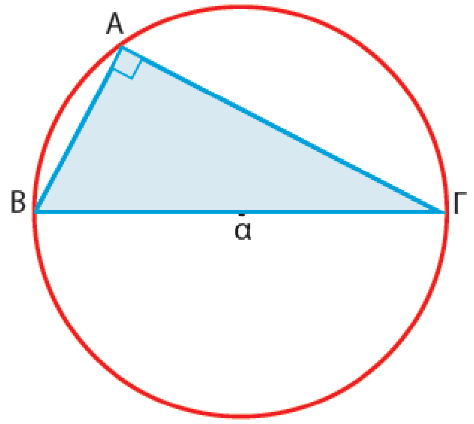


Σχήμα 2

Είναι όμως Δ=Α (Σχ. 1) ή $\mathbf{\Delta + A = 180^\circ}$ (Σχ. 2), οπότε ημΔ=ημΑ.

Επομένως η (1) γράφεται

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R$$



Σχήμα 3

Αν $A = 90^\circ$,, τότε έχουμε: ημΑ=1 και α=2R (Σχ. 3). Επομένως και στην περίπτωση αυτή ισχύει ισότητα

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = 2R.$$

Ομοίως αποδεικνύεται ότι:

$$\frac{\beta}{\eta\mu B} = 2R \text{ και } \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Επομένως: $$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R$$

Σχόλιο. Με το νόμο των ημίτονων μπορούμε εύκολα να επιλύσουμε ένα τρίγωνο, όταν δίνονται:
i) Μια πλευρά και δυο γωνίες του ή
ii) Δυο πλευρές και μια από τις μη περιεχόμενες γωνίες του.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 15, Α = 43° και Β = 82°.

ΛΥΣΗ

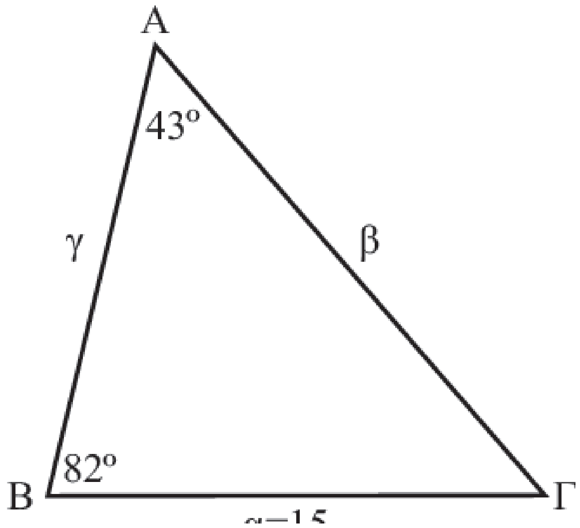
Έτσι, σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{15}{\eta\mu 43^\circ} = \frac{\beta}{\eta\mu 82^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu 55^\circ}$$

οπότε:

$$\beta = \frac{15 \cdot \eta\mu 82^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \simeq \frac{15 \cdot 0,9903}{0,6820} \simeq 22$$

$$\gamma = \frac{15 \cdot \eta\mu 55^\circ}{\eta\mu 43^\circ} \simeq \frac{15 \cdot 0,8192}{0,6820} \simeq 18$$

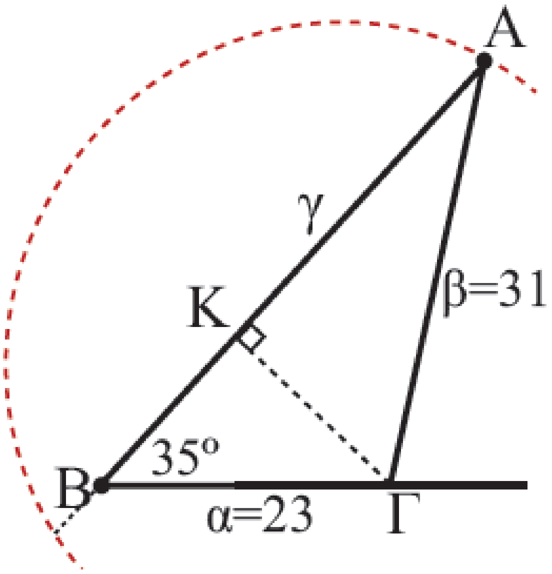


2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 23, β = 31 και Β = 35°

ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο των ημίτονων έχουμε:

$$\frac{23}{\eta\mu A} = \frac{31}{\eta\mu 35^\circ} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} \quad (1)$$



Οπότε

$$\eta\mu A = \frac{23 \cdot \eta\mu 35^\circ}{31} \simeq \frac{23 \cdot 0,5736}{31} \simeq 0,4255$$

Άρα

$A \simeq 25^\circ$ **ή** $A \simeq 155^\circ$

Επειδή όμως α < β, θα είναι και Α < Β.

Επομένως από τις παραπάνω τιμές της Α δεκτή είναι μόνο η $A \simeq 25^\circ$**.**

'Ετσι έχουμε

$\Gamma = 180^\circ - A - B \simeq$

$\simeq 180^\circ - 25^\circ - 35^\circ = 120^\circ$

οπότε, λόγω της (1), ισχύει

$$\frac{31}{ημ35^\circ} = \frac{γ}{ημ120^\circ} \Leftrightarrow$$

$$γ = \frac{31 \cdot ημ120^\circ}{ημ35^\circ} \simeq \frac{31 \cdot 0,8660}{0,5736} \simeq 47$$

3ο Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται τρεις δυνάμεις που έχουν μέτρα F1, F2 και F3 αντιστοίχως και σχηματίζουν ανά δυο γωνίες ω1, ω2 και ω3, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Αν το υλικό σημείο ισορροπεί, να αποδειχθεί ότι:

$$\frac{F_1}{ημω_1} = \frac{F_2}{ημω_2} = \frac{F_3}{ημω_3}$$

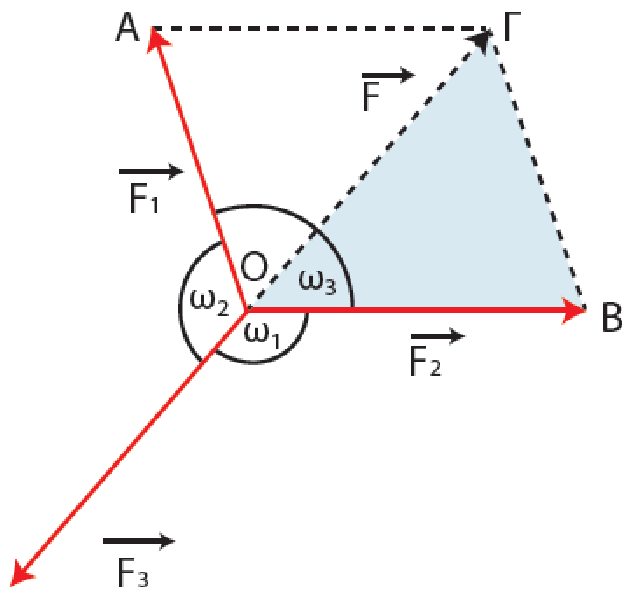
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Επειδή το σημείο Ο ισορροπεί, η συνισταμένη $\vec{F}$ των $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ θα έχει ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά και ίδιο μέτρο με την $\vec{F}_3$. Επομένως από το νόμο των ημιτόνων στο τρίγωνο ΟΒΓ έχουμε:

$$\frac{(ΒΓ)}{ημΒ\hat{Ο}Γ} = \frac{(ΟΒ)}{ημΒ\hat{Γ}Ο} = \frac{(ΟΓ)}{ημΟ\hat{Β}Γ} \Leftrightarrow$$

$$\frac{F_1}{ημω_1} = \frac{F_2}{ημω_2} = \frac{F_3}{ημω_3},$$

αφού $Β\hat{Ο}Γ = 180^\circ - ω_1$, $Β\hat{Γ}Ο = 180^\circ - ω_2$ και $Ο\hat{Β}Γ = 180^\circ - ω_3$.



Νόμος των συνημίτονων

Όταν είναι γνωστές οι τρεις πλευρές ενός τριγώνου ή οι δυο πλευρές και η περιεχόμενη γωνία τους δεν μπορούμε εύκολα με μόνο το νόμο των ημίτονων να υπολογίσουμε τα άλλα στοιχεία του. Στην περίπτωση αυτή χρησιμοποιούμε το
παρακάτω θεώρημα που είναι γνωστό ως νόμος των συνημίτονων.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει:

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\sigma\upsilon\nu A.$$

$$.\beta^2 = \gamma^2 + \alpha^2 - 2\gamma\alpha\sigma\upsilon\nu B.$$

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta\sigma\upsilon\nu \Gamma$$

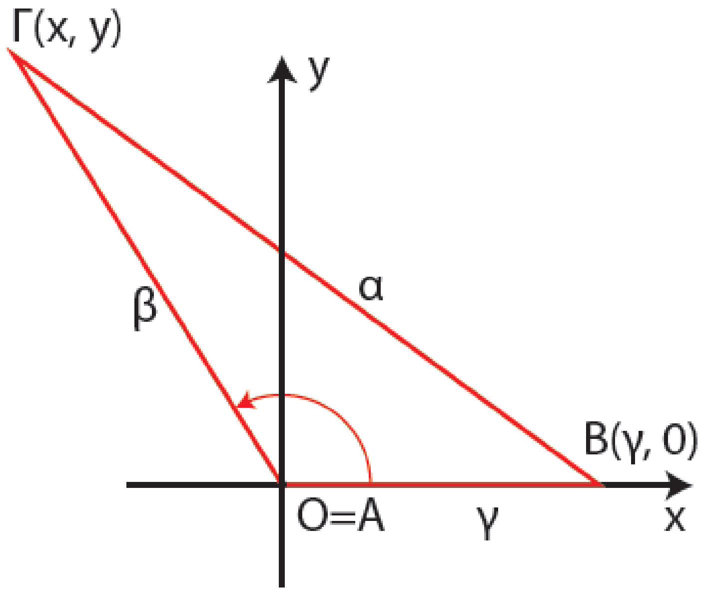
ΑΠΟΔΕΙΞΗ *

Θα αποδείξουμε μόνο την πρώτη ισότητα.

Με όμοιο τρόπο αποδεικνύονται και οι υπόλοιπες ισότητες.

Στο επίπεδο του τριγώνου θεωρούμε ένα σύστημα συντεταγμένων με αρχή το Α και θετικό ημιάξονα των x την ημιευθεία ΑΒ.

Έτσι οι συντεταγμένες του Β θα είναι (γ,0), ενώ για τις συντεταγμένες (χ, y) του Γ θα ισχύει



$$\text{συν}A = \frac{x}{\beta} \quad \text{και} \quad \text{ημ}A = \frac{y}{\beta}$$

ή ισοδύναμα

$$x = \beta\,\text{συν}A \quad \text{και} \quad y = \beta\,\text{ημ}A \qquad (1)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τώρα τον τύπο της απόστασης για τα σημεία $B(\gamma,0)$ και $\Gamma(x,y)$, βρίσκουμε ότι:

$$\alpha = (B\Gamma) = \sqrt{(x-\gamma)^2 + (y-0)^2}$$

οπότε, λόγω της (1), έχουμε:

$$\begin{aligned}
\alpha^2 &= (x-\gamma)^2 + y^2 = \\
&= (\beta\,\text{συν}A - \gamma)^2 + (\beta\,\text{ημ}A)^2 = \\
&= \beta^2\text{συν}^2A + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A + \beta^2\text{ημ}^2A \\
&= \beta^2(\text{συν}^2A + \text{ημ}^2A) + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A \\
&= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma\,\text{συν}A.
\end{aligned}$$

Σχόλιο. Είναι φανερό ότι με το νόμο των συνημίτονων μπορούμε αμέσως να υπολογίσουμε μια οποιαδήποτε πλευρά ενός τριγώνου, αρκεί να δοθούν οι άλλες δύο και η περιεχόμενη τους γωνία. Με τον ίδιο νόμο μπορούμε επιπλέον να υπολογίσουμε και τις γωνίες ενός τριγώνου, του οποίου είναι γνωστές και οι τρεις πλευρές, αφού οι παραπάνω ισότητες γράφονται:

$$\text{συν}A = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma}, \quad \text{συν}B = \frac{\gamma^2+\alpha^2-\beta^2}{2\gamma\alpha},$$

$$\text{συν}\Gamma = \frac{\alpha^2+\beta^2-\gamma^2}{2\alpha\beta}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με α = 35, β = 20 και γ = 42

ΛΥΣΗ

Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε:

- $35^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42 \text{συν} A$, οπότε

$$\text{συν}A = \frac{20^2 + 42^2 - 35^2}{2 \cdot 20 \cdot 42} \simeq 0,5589$$

Άρα $A \simeq 56^\circ$

- $20^2 = 35^2 + 42^2 - 2 \cdot 35 \cdot 42 \text{συν} B$, οπότε

$$\text{συν}B = \frac{35^2 + 42^2 - 20^2}{2 \cdot 35 \cdot 42} \simeq 0,8806$$

Άρα $B \simeq 28^\circ$

Άρα $\Gamma \simeq 96^\circ$

2ο Να επιλυθεί το τρίγωνο ΑΒΓ με β= 20, γ = 42 και Α = 56°

ΛΥΣΗ

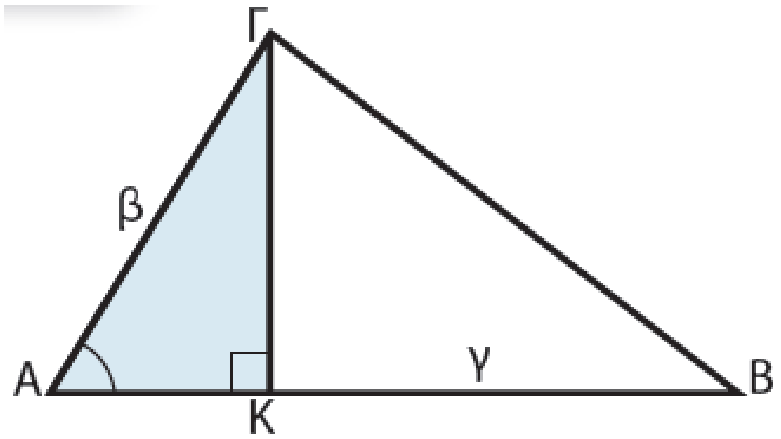
Από το νόμο των συνημιτόνων έχουμε

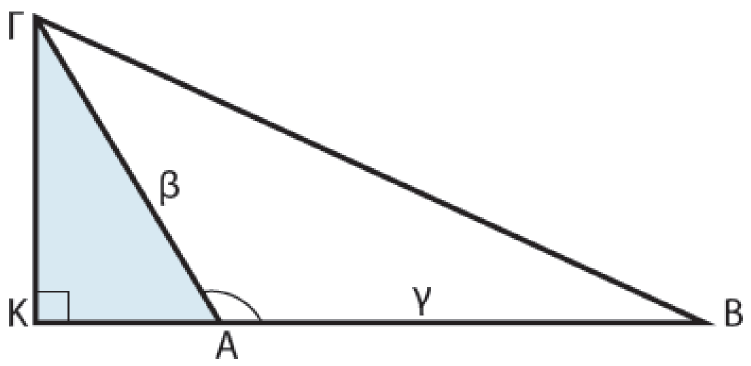
$\alpha^2 = 20^2 + 42^2 - 2 \cdot 20 \cdot 42 \text{συν} 56^\circ \simeq 1225$, οπότε $\alpha \simeq 35$.

Έτσι γνωρίζουμε και τις τρεις πλευρές του τριγώνου, οπότε αναγόμαστε στο προηγούμενο πρόβλημα.

3ο **Να αποδειχθεί ότι το εμβαδό Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο:** $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ





Αν φέρουμε το ύψος ΓΚ του τριγώνου, έχουμε:

$$E = \frac{1}{2}(AB)\cdot(\Gamma K) = \frac{1}{2}(AB)\cdot(A\Gamma)\cdot\eta\mu A$$

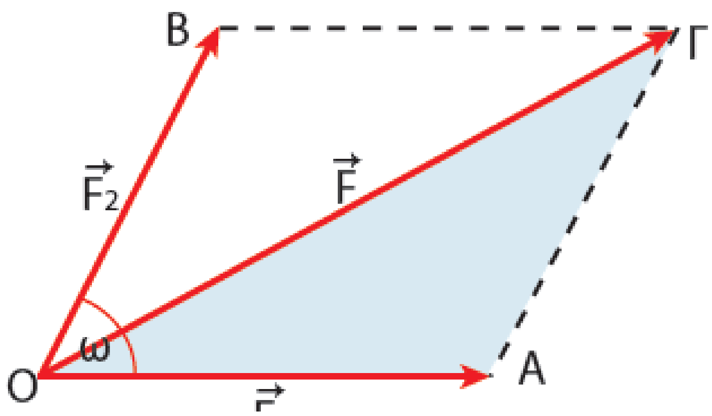
$$= \frac{1}{2}\gamma\cdot\beta\cdot\eta\mu A$$

$$\left[\text{γιατί} \quad \eta\mu A = \frac{(\Gamma K)}{(A\Gamma)}\right]$$

Ο παραπάνω τύπος ισχύει προφανώς και στην περίπτωση που Α = 90°.

4ο Σε ένα υλικό σημείο Ο εφαρμόζονται δυο δυνάμεις που έχουν μέτρα F1 και F2 αντίστοιχα και σχηματίζουν γωνία ω. Να αποδειχθεί ότι το μέτρο F της συνισταμένης τους δίνεται από τον τύπο:

$$F^2 = F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\text{συνω}$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

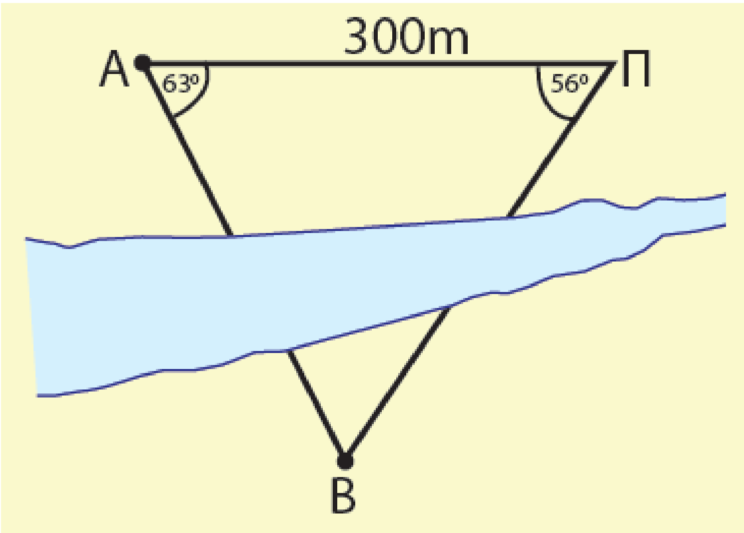
Επειδή $(OA) = F_1$, $(AΓ) = F_2$ και $(OΓ) = F$, στο τρίγωνο ΟΑΓ έχουμε:

$$F^2 = (OΓ)^2 =$$
$$= (OA)^2 + (AΓ)^2 - 2(OA)(AΓ)\text{συν}A =$$
$$= F_1^2 + F_2^2 - 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συν}(180^\circ - ω)$$
$$= F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 \cdot F_2 \cdot \text{συνω}$$

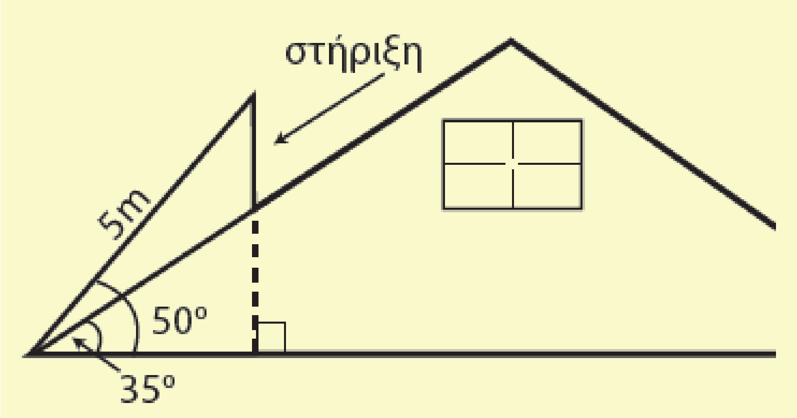
ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Δυο πύργοι Α και Β βρίσκονται εκατέρωθεν ενός ποταμού. Ένας παρατηρητής Π βρίσκεται προς το ίδιο μέρος του ποταμού με τον πύργο Α. Αν στο τρίγωνο ΠΑΒ είναι ΠΑ = 300m, Α = 63° και Π = 56°, να βρείτε την απόσταση των πύργων Α και Β.



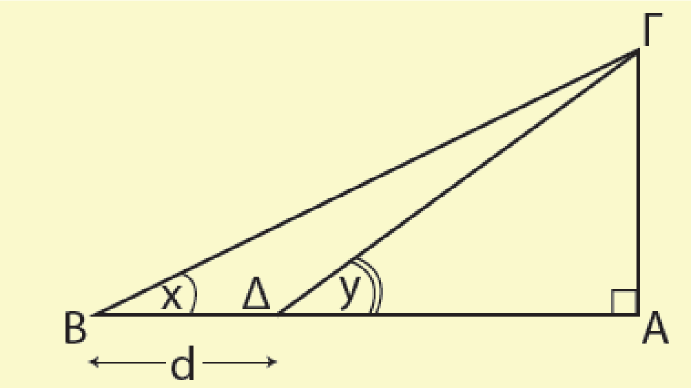
2. Ένας συλλέκτης ηλιακής ακτινοβολίας μήκους 5 m είναι τοποθετημένος στην οροφή ενός κτιρίου, όπως δείχνει το διπλανό σχήμα. Να υπολογίσετε το μήκος του βραχίονα με τον οποίο στηρίζεται ο συλλέκτης.



3. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

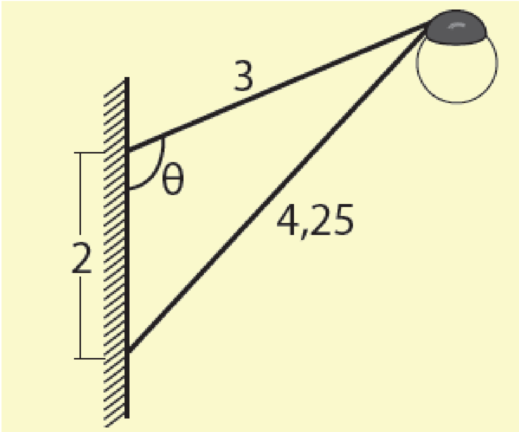
i) $\Gamma\Delta = \dfrac{d\eta\mu x}{\eta\mu(y-x)}$,

ii) $A\Gamma = \dfrac{d\eta\mu x \cdot \eta\mu y}{\eta\mu(y-x)}$

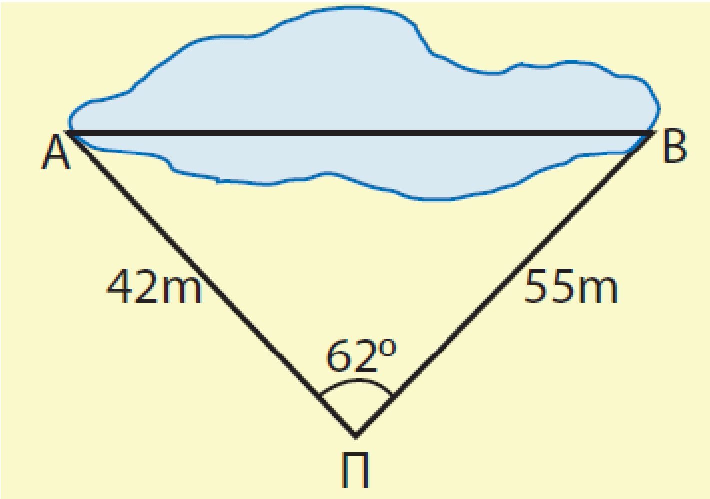


4. Να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ με α=30, β=10 και $B = 31^\circ$.

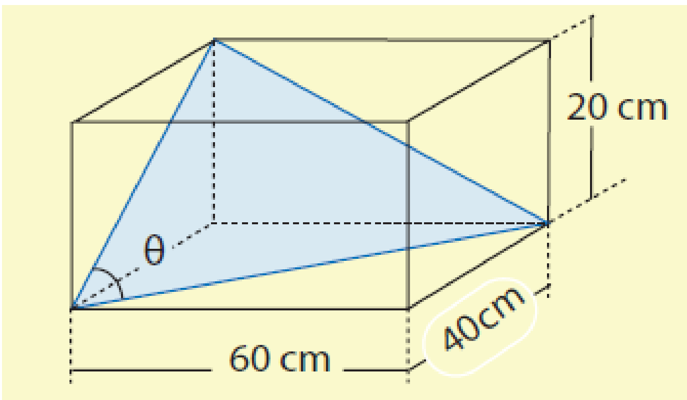
5. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του παρακάτω σχήματος.



6. Να υπολογίσετε το μήκος του έλους του παρακάτω σχήματος.



7. Να υπολογίσετε τη γωνία θ του ορθογωνίου κουτιού του παρακάτω σχήματος:



8. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα

$$\frac{\sigma\upsilon\nu A}{\alpha}+\frac{\sigma\upsilon\nu B}{\beta}+\frac{\sigma\upsilon\nu \Gamma}{\gamma}=$$
$$=\frac{\alpha^2+\beta^2+\gamma^2}{2\alpha\beta\gamma}$$

9. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα: $\beta\sigma\upsilon\nu\Gamma+\gamma\sigma\upsilon\nu B=\alpha$

10. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα βσυνΓ = γσυνΒ, να αποδείξετε ότι β=γ και αντιστρόφως.

11. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα α = 2βσυνΓ, να αποδείξετε ότι β = γ και αντιστρόφως.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

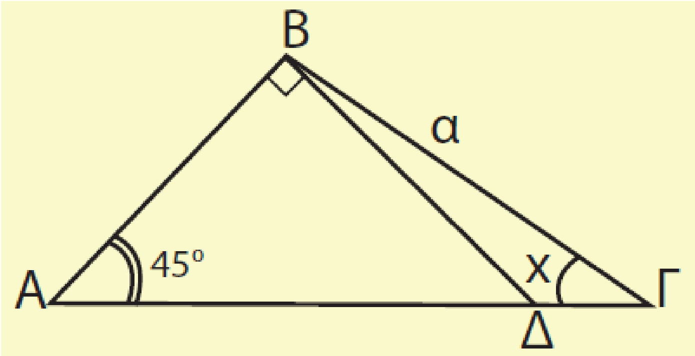
*** 1. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα Β = 2Α, να αποδείξετε ότι:**

i) $\sigma\upsilon\nu A=\frac{\beta}{2\alpha}$

ii) $\beta^2-\alpha^2=\alpha\gamma$

2. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

$$\Gamma\Delta=\alpha(\sigma\upsilon\nu x-\eta\mu x)$$



3. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει μια από τις ισότητες:
i) $\beta = \alpha\eta\mu B$,
ii) $\alpha\eta\mu A = \beta\eta\mu B + \gamma\eta\mu\Gamma$,
να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο.

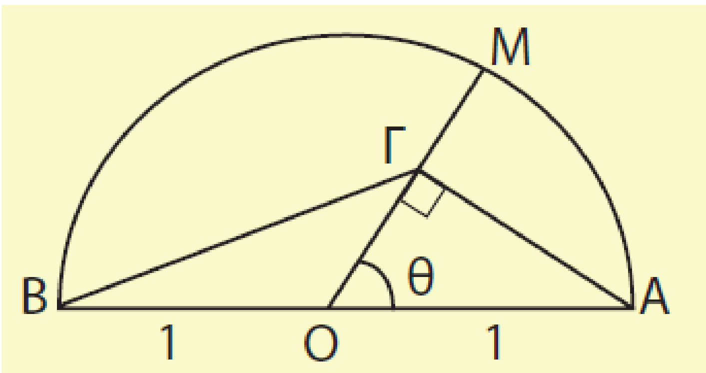
4. Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα ασυνΑ = βσυνΒ, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

5. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η ισότητα:

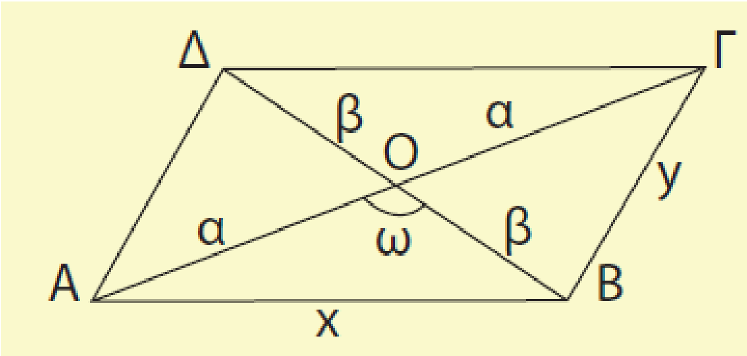
$$\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta} = \varepsilon\varphi\frac{A-B}{2}\cdot\varepsilon\varphi\frac{\Gamma}{2}$$

6. Στο παρακάτω σχήμα να αποδείξετε ότι:

$$(B\Gamma)^2 = \frac{5+3\sigma\upsilon\nu 2\theta}{2}$$



7. Να αποδείξετε ότι για το παρακάτω παραλληλόγραμμο ισχύουν οι ισότητες:
i) $x^2 + y^2 = 2\alpha^2 + 2\beta^2$
ii) $(\text{ΑΒΓΔ}) = 2\alpha\beta\eta\mu\omega$



ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Γ' ΟΜΑΔΑΣ)

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ το ύψος του ΑΔ είναι ίσο με το μισό της πλευράς ΒΓ. Να αποδείξετε ότι ισχύει
$\varepsilon\varphi B + \varepsilon\varphi \Gamma = 2\varepsilon\varphi B \varepsilon\varphi \Gamma$ και $\sigma\varphi B + \sigma\varphi \Gamma = 2$.

2. Αν για τις γωνίες ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει
$\dfrac{\varepsilon\varphi B}{\varepsilon\varphi \Gamma} = \dfrac{\eta\mu^2 B}{\eta\mu^2 \Gamma}$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο αυτό είναι ορθογώνιο ή ισοσκελές.

3. Να αποδείξετε ότι τα σημεία Μ (x.y) του επιπέδου με $x = 1 + 2\sigma\upsilon\nu t$,
y = 3 + 2ημt, βρίσκονται σε κύκλο κέντρου Κ(1,3) και ακτίνας ρ = 2.

4. Να λύσετε τις εξισώσεις:
i) $\dfrac{1+\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x} + \dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{1+\eta\mu x} = 4$

ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x \bullet \sigma\varphi x}{1-\eta\mu x}=3$

5. i) Αν $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι $\varepsilon\varphi x+\sigma\varphi x\geq 2$

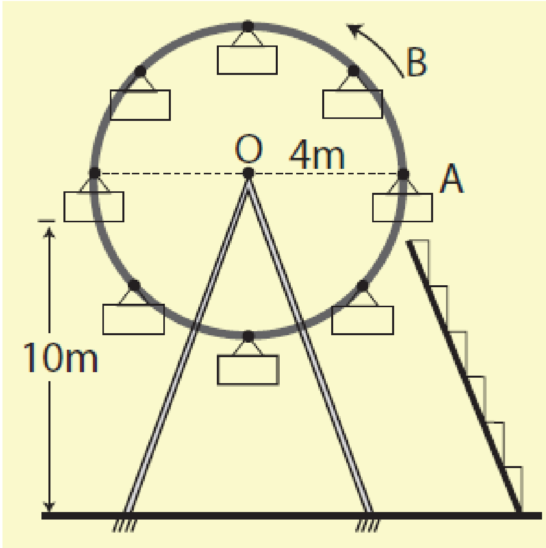
ii) Αν $0\leq \alpha<\beta<\dfrac{\pi}{2}$ να αποδείξετε ότι

$$\varepsilon\varphi\alpha<\frac{\eta\mu\alpha+\eta\mu\beta}{\sigma\upsilon\nu\alpha+\sigma\upsilon\nu\beta}<\varepsilon\varphi\beta$$

6. Να λύσετε την εξίσωση $2\sigma\upsilon\nu\left(\dfrac{\pi}{3}-2x\right)=1$ στο διάστημα (4π, 5π).

7. Σε ένα λούνα-παρκ ο περιστρεφόμενος τροχός έχει ακτίνα 4m, το κέντρο του απέχει από το έδαφος 10m και όταν αρχίζει να κινείται εκτελεί μια πλήρη περιστροφή σε 8 δευτερόλεπτα με σταθερή ταχύτητα. Να βρείτε το ύψος του βαγονιού Α από το έδαφος ύστερα από χρόνο 1sec, 2sec, 5sec και γενικότερα ύστερα από χρόνο t sec.

Να λύσετε το ίδιο πρόβλημα για το βαγόνι Β.



8. Να αποδείξετε ότι $i)\sigma\varphi x - \varepsilon\varphi x = 2\sigma\varphi 2x$

$ii)\sigma\varphi x - 2\varepsilon\varphi 2x - 4\varepsilon\varphi x - 8\varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x$

9. Με τη βοήθεια του τύπου

$\eta\mu 3\alpha = 3\eta\mu\alpha - 4\eta\mu^3\alpha$, να λύσετε τις εξισώσεις:

$i)8x^3 - 6x + \sqrt{2} = 0$

$ii)8x^3 - 6x - 1 = 0$

10. Να αποδείξετε ότι το σύνολο των σημείων M(x,y), με x=συνθ και y=συνθ2+1, όπου $\theta \in [0, \pi]$ είναι το τόξο της παραβολής $y = 2x^2$ με $x \in [-1,1]$

11. Με τη βοήθεια των τύπων $\eta\mu 2\alpha = \dfrac{2\varepsilon\varphi\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$ και

$\sigma\upsilon\nu 2\alpha = \dfrac{1-\varepsilon\varphi^2\alpha}{1+\varepsilon\varphi^2\alpha}$

να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{1+\eta\mu x}{5+4\sigma\upsilon\nu x}$

$x \in (-\pi, \pi)$

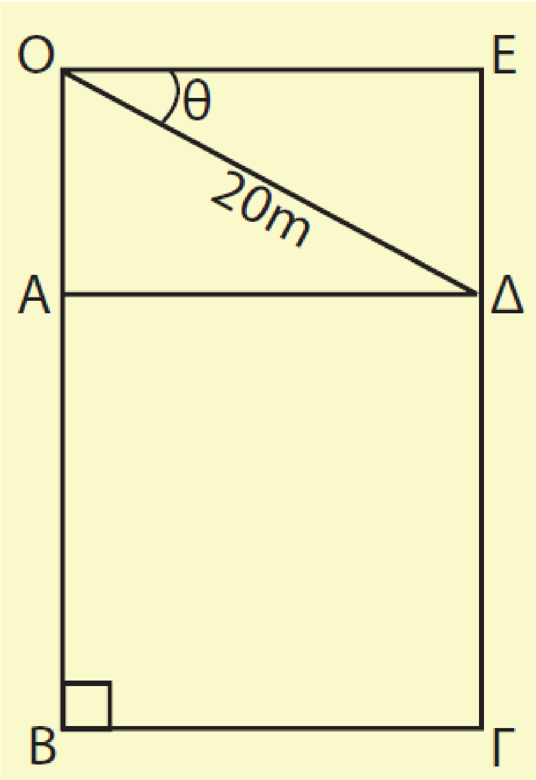
παίρνει τιμές στο διάστημα $[0, \dfrac{10}{9})$.

12. Να λύσετε την εξίσωση:

$$\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x - \frac{\eta\mu 2x}{\sqrt{2}+1} =$$

$$= \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$$

13. Ένα γκαράζ σχήματος ορθογωνίου έχει σχεδιασθεί, έτσι ώστε να αποτελείται (από ένα τετράγωνο ΑΒΓΑ και ένα ορθογώνιο ΟΑΔΕ με ΟΔ = 20m, όπως περιγράφει το διπλανό σχήμα. Για ποια τιμή της γωνίας 0 rad το εμβαδό S m2 του γκαράζ γίνεται μέγιστο;



Υπόδειξη

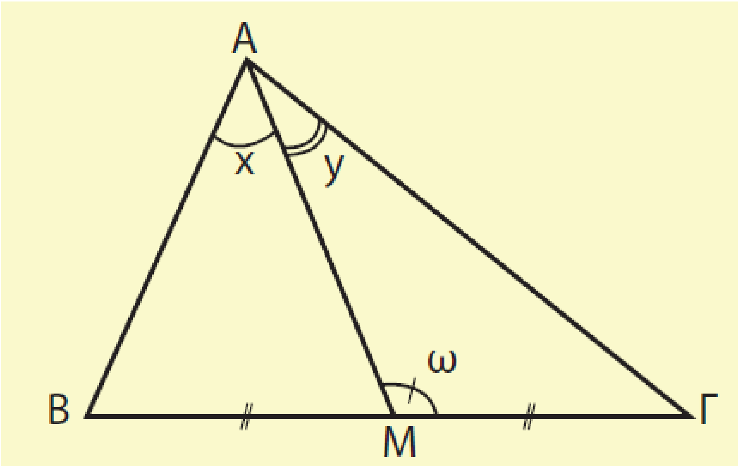
i) Να δείξετε ότι $S = 400\sigma\upsilon\nu^2\theta + 400\eta\mu\theta\sigma\upsilon\nu\theta$
ii) Να εκφράσετε το S στην μορφή

$S = \rho\eta\mu(2\theta + \varphi) + c$

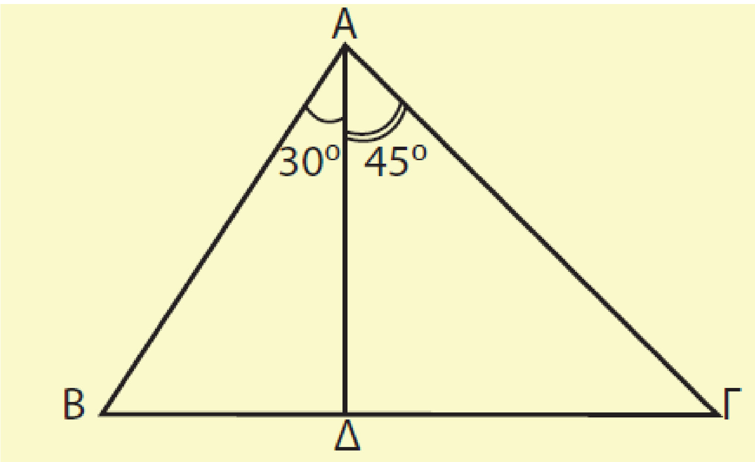
iii) Να βρείτε την τιμή του θ, για την οποία το S παίρνει τη μέγιστη τιμή, την οποία και να προσδιορίσετε.

14. Δίνεται ένα τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσος του ΑΜ. Αν $M\hat{A}B = x$, $M\hat{A}\Gamma = y$ και $A\hat{M}\Gamma = \omega$, να αποδείξετε ότι:

$$2\sigma\varphi\omega = \sigma\varphi x - \sigma\varphi y$$



15. Να υπολογίσετε τις γωνίες Β και Γ του διπλανού σχήματος, αν ισχύει $\frac{\Delta\Gamma}{\Delta B} = \sqrt{3}$.



ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Ενώ είναι κοινώς παραδεκτό ότι η γεωμετρία είναι δημιούργημα της κλασικής περιόδου της αρχαίας Ελλάδας, εντούτοις δεν είναι εξίσου γνωστό ότι η τριγωνομετρία είναι δημιούργημα της ελληνιστικής περιόδου με πρωταγωνιστές τον 'Ιππαρχο, τον Μενέλαο και τον Πτολεμαίο.

Η τριγωνομετρία ξεπήδησε στην προσπάθεια να θεμελιωθεί μια ποσοτική αστρονομία η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να προβλεφθούν οι θέσεις των ουρανίων σωμάτων, ο υπολογισμός του ημερολογίου και να εφαρμοσθεί στη ναυσιπλοΐα και στη γεωγραφία. Θεμελιωτής της αστρονομίας υπήρξε ο Ίππαρχος που έζησε στη Ρόδο και στην Αλεξάνδρεια και πέθανε γύρω στο 125 π.Χ. Για την προσωπική του ζωή ξέρουμε πολύ λίγα και τα περισσότερα που ξέρουμε γι' αυτόν προέρχονται από τα βιβλία του Πτολεμαίου. Ο Ίππαρχος συνέβαλε αποφασιστικά στη διαμόρφωση της θεωρίας των επικύκλων, και ήταν σε θέση να υπολογίσει εκλείψεις της σελήνης με ακρίβεια μιας έως δύο ωρών. Διέθετε επίσης και μια θεωρία για μια ικανοποιητική εξήγηση του φαινομένου των εποχών.

Η σημαντικότερη ανακάλυψη του ήταν ότι τα σημεία που ο άξονας περιστροφής της γης τέμνει την ουράνια σφαίρα μετακινούνται και διαγράφουν κύκλο με περίοδο 2600 χρόνια.

Το μεγαλύτερο μέρος της τριγωνομετρίας του Ιππάρχου αναφέρεται σε αυτό που σήμερα ονομάζουμε σφαιρική τριγωνομετρία. Και αυτό είναι μοιραίο, αφού τον ενδιέφεραν κυρίως τρίγωνα που σχηματίζονται πάνω στον ουράνιο θόλο. Όμως ανέπτυξε και βασικά σημεία της επιπέδου τριγωνομετρίας.
Το έργο του Ίππαρχου συνέχισε ο Μενέλαος που έζησε γύρω στο 98 μ.Χ. και του οποίου το βασικό έργο είναι τα «σφαιρικά».

Η ανάπτυξη της ελληνικής τριγωνομετρίας και των εφαρμογών της στην αστρονομία ολοκληρώνεται με το έργο του Πτολεμαίου που έζησε στην Αλεξάνδρεια γύρω στο 168 μ.Χ. και του οποίου το κύριο σύγγραμμα είναι η Αλμαγέστη (αραβική παραφθορά της λέξης «Μεγίστη»).

Το βιβλίο Α της Αλμαγέστης περιέχει όλα τα αναγκαία θεωρήματα για την κατασκευή ενός πίνακα ημιτόνων και συνημιτόνων.

Το Βασικό θεώρημα για
την κατασκευή αυτού του πίνακα είναι το εξής:
«Έστω ΑΒΓΔ είναι κυρτό τετράπλευρο εγγεγραμμένο σε κύκλο. Τότε ισχύει:
$ΑΒ \cdot ΓΔ + ΑΔ \cdot ΒΓ = ΑΓ \cdot ΒΔ$».

Στο θεώρημα αυτό στηρίχτηκε και ο Πτολεμαίος για να βρει διάφορους τριγωνομετρικούς τύπους μεταξύ των οποίων και αυτού που σήμερα εκφράζουμε ως

$$ημ(α-β) = ημα \cdot συνβ - συνα \cdot ημβ$$

Η Αλμαγέστη έκανε για την τριγωνομετρία ότι έκαναν τα «Στοιχεία του Ευκλείδη» για τη Γεωμετρία: Την διετύπωσαν στη μορφή που παρέμεινε για τα επόμενα 1000 χρόνια.

Μετά το 200 μ.Χ. με την τριγωνομετρία ασχολήθηκαν και οι Ινδοί με κίνητρο επίσης την αντιμετώπιση αστρονομικών προβλημάτων. Δεν είχαν σημαντική συνεισφορά και αξίζει να σημειωθεί ότι για διάφορους τριγωνομετρικούς και αστρονομικούς όρους όπως κέντρο, λεπτό κτλ., χρησιμοποιούσαν τις ελληνικές λέξεις.

Κατά τα χρόνια του Μεσαίωνα με την τριγωνομετρία ασχολούνται και οι Άραβες, χωρίς να συνεισφέρουν σε αυτήν κάτι σημαντικό δικό τους. Συνέβαλαν όμως στο να μεταδώσουν την Ελληνική τριγωνομετρία στην Ευρώπη.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 3ου ΤΟΜΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^o - ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΑ

ΒΙΒΛΙΟΣΗΜΟ