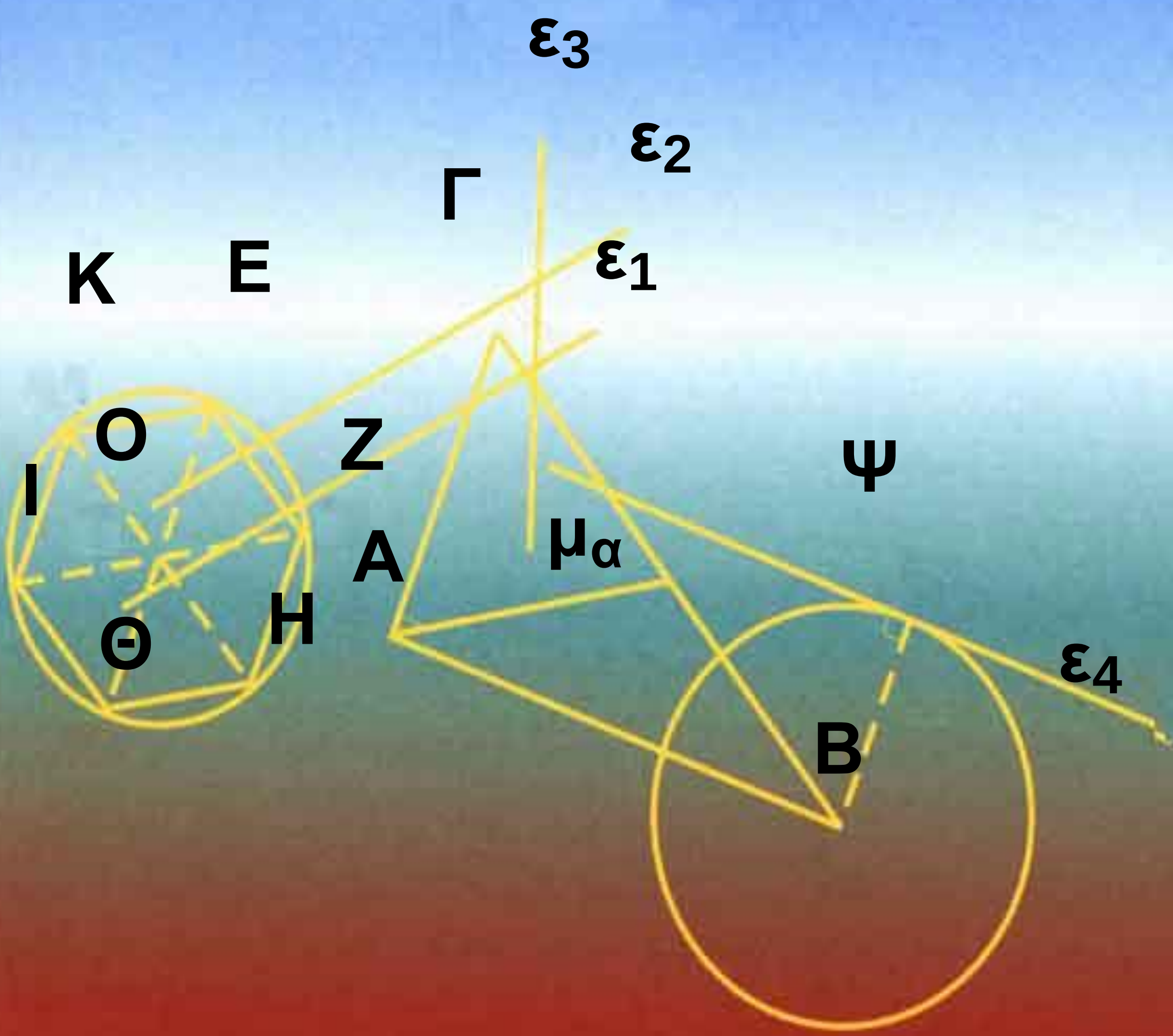
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ,
ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ
ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

Α΄ και Β΄
Γενικού Λυκείου



Τόμος 7ος

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ ΚΑΙ ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΠΟΛΟΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΚΔΟΣΕΩΝ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ

ΑΡΓΥΡΟΠΟΥΛΟΣ ΗΛΙΑΣ
ΒΛΑΜΟΣ ΠΑΝΑΓΙΩΤΗΣ
ΚΑΤΣΟΥΛΗΣ ΓΕΩΡΓΙΟΣ
ΜΑΡΚΑΤΗΣ ΣΤΥΛΙΑΝΟΣ
ΣΙΔΕΡΗΣ ΠΟΛΥΧΡΟΝΗΣ

ΤΟΜΟΣ 7ος
ΚΕΦΑΛΑΙΑ 9.1 - 10.6

ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΕΤΑΙΡΕΙΑ

ΟΜΑΔΑ ΣΥΓΓΡΑΦΗΣ

Αργυρόπουλος Ηλίας
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Βλάμος Παναγιώτης
Διδάκτωρ Μαθηματικών
Ε.Μ.Πολυτεχνείου

Κατσούλης Γεώργιος
Μαθηματικός

Μαρκάτης Στυλιανός
Επίκουρος Καθηγητής, Τομέα Μαθηματικών Ε.Μ. Πολυτεχνείου

Σίδερης Πολύχρονης
Μαθηματικός, τ. Σχολικός Σύμβουλος

Ιστορικά Σημειώματα: Βανδουλάκης Ιωάννης

Διδάκτωρ Πανεπιστημίου M. Lomonosov Μόσχας Ιόνιο Πανεπιστήμιο

Φιλολογική Επιμέλεια:
Δημητρίου Ελένη

Επιλογή εικόνων:
Παπαδοπούλου Μπία

Εικονογράφηση - Σελιδοποίηση:
Αλεξοπούλου Καίτη

ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ

Ομάδα εργασίας του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

(Μαγγιώρης Δημήτριος)

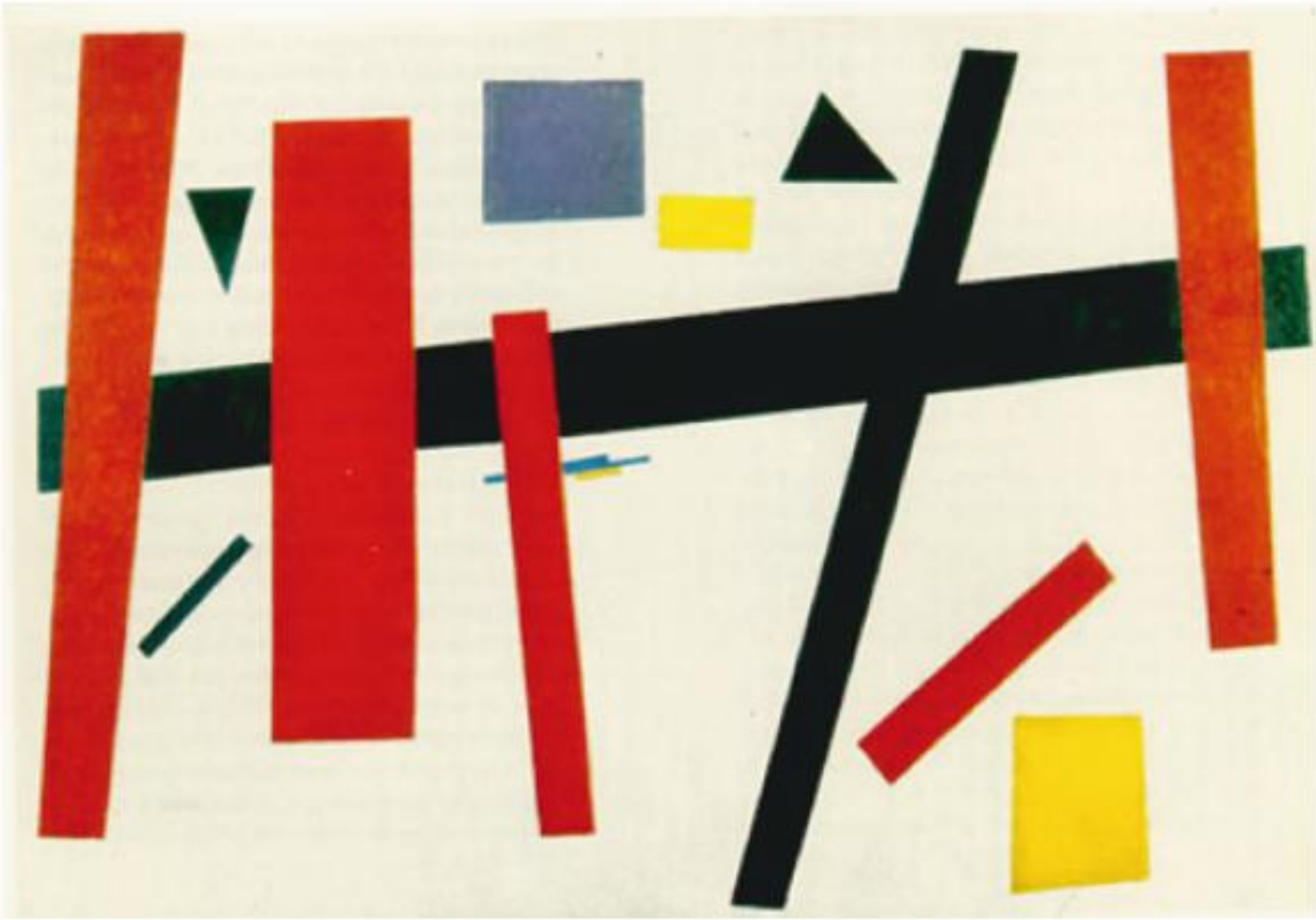
Επιμέλεια: (Ζώτος Ιωάννης)

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετρικές Σχέσεις

Το κεφάλαιο αυτό ασχολείται ουσιαστικά με τον προσδιορισμό των στοιχείων του τριγώνου αν είναι γνωστές οι πλευρές, καθώς και με μετρικές σχέσεις στον κύκλο. Στις μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο παρουσιάζεται το Πυθαγόρειο θεώρημα και η γενίκευσή του με άμεση εφαρμογή στον προσδιορισμό του είδους του τριγώνου ως προς τις γωνίες του - ακόμα και στον προσδιορισμό των γωνιών του, αν χρησιμοποιήσουμε τον ισοδύναμο νόμο των συνημιτόνων - καθώς και των υψών του τριγώνου. Κατόπιν υπολογίζονται οι διάμεσοι με τα

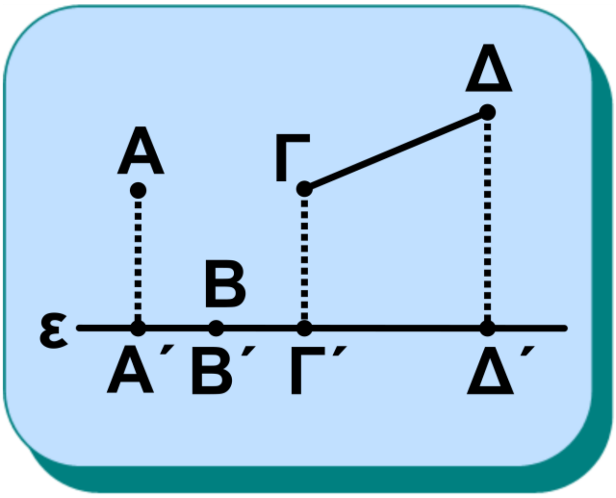
δύο θεωρήματα των διαμέσων. Το κεφάλαιο ολοκληρώνεται με το θεώρημα τεμνουσών από το οποίο προκύπτουν οι μετρικές σχέσεις σε κύκλο.



Κάζιμιρ Μαλέβιτς (Ρώσος, 1878 - 1935), «Υπέρτατο», πριν το 1915.

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

9.1 Ορθές προβολές



Σχήμα1

Ας θεωρήσουμε μία ευθεία ε και ένα σημείο Α που δεν ανήκει σε αυτή. Το ίχνος Α΄ της καθέτου που φέρουμε από το Α προς την ε το λέμε **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του Α στην ευθεία ε. Αν το σημείο είναι σημείο της ευθείας, π.χ. το Β, τότε ως προβολή του Β΄ πάνω στην ε θεωρούμε το ίδιο το Β. Τέλος ορθή προβολή του τμήματος ΓΔ πάνω στην ευθεία ε λέμε το τμήμα Γ΄Δ΄ που έχει ως άκρα τις ορθές προβολές Γ΄, Δ των άκρων Γ, Δ, αντίστοιχα, του τμήματος ΓΔ πάνω στην ε .

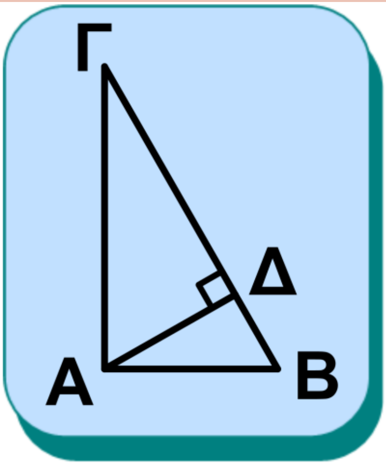
9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα

Θεώρημα Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ και Δ η προβολή της κορυφής Α στην υποτείνουσα ΒΓ. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι



Σχήμα 2

$$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta \text{ και } A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$$

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\dfrac{AB}{B\Delta} = \dfrac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΒΑ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1^{\llcorner}$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή.

Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Διαιρώντας τις $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$ κατά μέλη προκύπτει το εξής πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.

Θεώρημα II (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

Απόδειξη

Θέλουμε δηλαδή (σχ.2) να αποδεί-

ξουμε ότι:
$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ ή $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα έχουμε:
$AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Με πρόσθεση των ισοτήτων κατά μέλη προκύπτει ότι:
$AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot B\Delta + B\Gamma \cdot \Gamma\Delta =$
$B\Gamma \cdot (B\Delta + \Gamma\Delta) = B\Gamma \cdot B\Gamma = B\Gamma^2$.

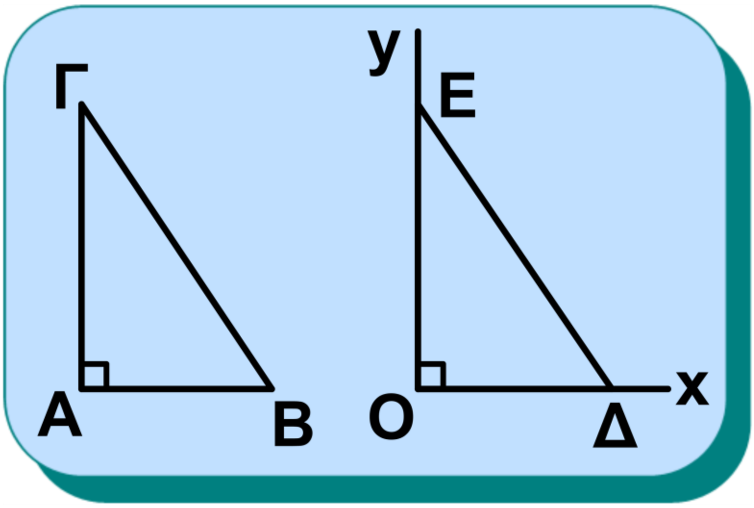
Θεώρημα ΙΙΙ (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει: $AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$ τότε $\hat{A} = 1 ⌊$.

Απόδειξη

Πάνω στις πλευρές Οx, Οy ορθής γωνίας xOy θεωρούμε αντίστοιχα τμήματα ΟΔ=ΑΒ και ΟΕ=ΑΓ. Επειδή το τρίγωνο ΟΔΕ είναι ορθογώνιο σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα και την υπόθεση, έχουμε:
$\Delta E^2 = O\Delta^2 + OE^2 = AB^2 + A\Gamma^2 = B\Gamma^2$.

Άρα ΔΕ = ΒΓ. Επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΟΔΕ είναι ίσα, γιατί έχουν και τις τρεις πλευρές



Σχήμα 3

ίσες, οπότε θα είναι $\hat{A} = \hat{O} = 1^{\llcorner}$, που είναι το ζητούμενο.

Θεώρημα IV

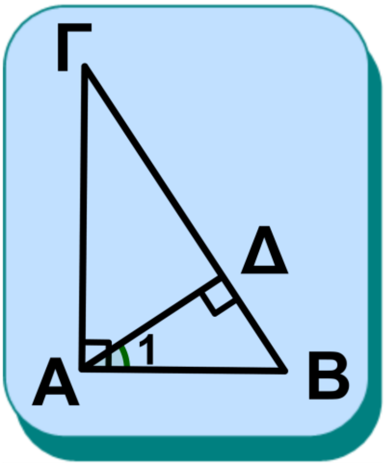
Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.

Απόδειξη

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα.

Θα αποδείξουμε ότι: $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$.



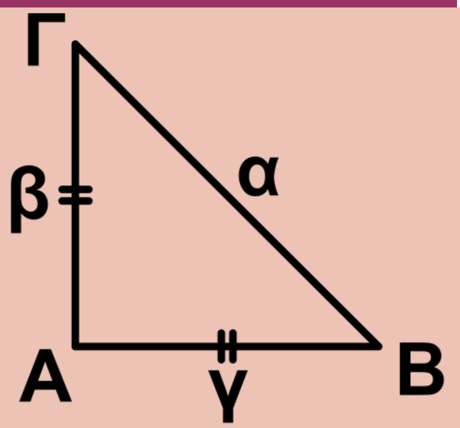
Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή

Σχήμα 4

$\frac{A\Delta}{B\Delta} = \frac{\Delta\Gamma}{A\Delta}$, οπότε $A\Delta^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές, τότε $\alpha^2 = \sqrt{2}\beta$.



Σχήμα 5

Απόδειξη

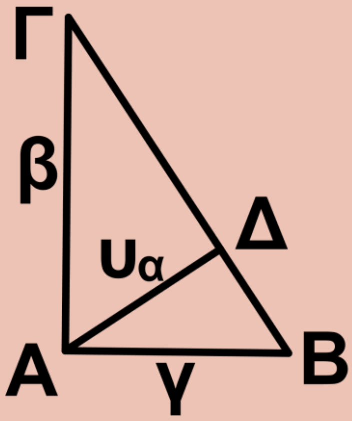
Πράγματι, με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος στο ΑΒΓ παίρνουμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 = 2\beta^2$ ή $\alpha^2 = \sqrt{2}\beta$.

ΣΧΟΛΙΟ

Η εφαρμογή αυτή αποδεικνύει την ύπαρξη τμημάτων με άρρητο λόγο. Είναι αξιοσημείωτο ότι ενώ είναι αδύνατη η μέτρηση με το υποδεκάμετρο τμημάτων άρρητου μήκους, ωστόσο είναι ακριβής ο προσδιορισμός τους με γεωμετρικές κατασκευές.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Αν ΑΔ είναι το ύψος ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα, τότε ισχύει



Σχήμα 6

$$\frac{1}{β^2}+\frac{1}{γ^2}=\frac{1}{υ_α^2}$$

Απόδειξη

Επειδή $\alpha\upsilon_\alpha = \beta\gamma$, έχουμε ότι

$$\frac{1}{\beta^2}+\frac{1}{\gamma^2}=\frac{1}{\upsilon_\alpha^2}=\frac{\beta^2+\gamma^2}{(\beta\gamma)^2}=\frac{\alpha^2}{(\alpha\upsilon_\alpha)^2}=\frac{1}{\upsilon_\alpha^2}$$

Παρατήρηση: Υπενθυμίζουμε ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ (Â=90°) ισχύει: $AB\cdot A\Gamma = A\Delta\cdot B\Gamma \Leftrightarrow \beta\cdot\gamma=\alpha\cdot\upsilon_\alpha$

(Βλ. Εφαρμογή 4, σελ. 117)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Â=1 └) έχει ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Ποιο το μήκος της διαμέσου ΑΜ;

2. Αν ο λόγος των κάθετων πλευρών ενός ορθογώνιου τριγώνου είναι 4, τότε ο λόγος των προβολών τους στην υποτείνουσα είναι :

α. 2 β. 4 γ. 16 δ. $\frac{1}{4}$

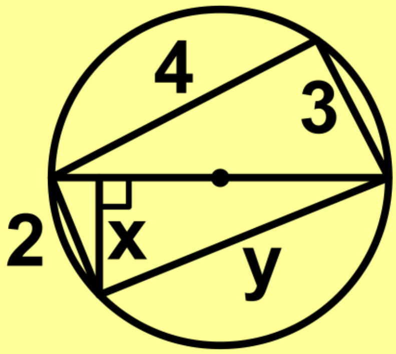
Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Ένα ορθογώνιο τρίγωνο έχει κάθετες πλευρές ίσες με 9 cm και 12 cm. Η πλευρά ισόπλευρου τριγώνου που έχει ίση περίμετρο με το ορθογώνιο τρίγωνο είναι:

α. 10 cm β. 12 cm γ. 13 cm δ. 14 cm.

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

4. Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τα x και y.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}=1$ └) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 3 και ΑΓ = 4, να υπολογι-

στούν τα μήκη των τμημάτων ΒΓ, ΒΔ, ΔΓ και ΑΔ.

2. Αν σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1 \llcorner$) είναι $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ τότε ο λόγος $\frac{\beta}{\gamma}$ είναι ίσος με:

α. $\frac{1}{2}$ β. 1 γ. $\sqrt{3}$ δ. 2 ε. 3

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. Σε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1 \llcorner$) φέρουμε το ύψος ΑΔ. Αν είναι ΑΒ = 5 και ΒΔ = $\frac{25}{13}$, να διατάξετε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα: ΑΓ, ΒΓ, ΓΔ και ΑΔ.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Να αποδειχθεί ότι το τρίγωνο, που έχει πλευρές $\alpha = \kappa^2+\lambda^2$, $\beta = 2\kappa\lambda$ και $\gamma = \kappa^2 - \lambda^2$, όπου κ, λ θετικοί

ακέραιοι με κ > λ, είναι ορθογώνιο.

2. Αν ΑΕ, ΑΖ είναι αντίστοιχα οι προβολές δύο χορδών ΑΓ και ΑΔ ενός κύκλου σε μία διάμετρό του ΑΒ, να αποδείξετε ότι

$$\mathrm{AZ} \cdot \mathrm{A\Gamma}^2 = \mathrm{AE} \cdot \mathrm{A\Delta}^2.$$

3. Αν Δ είναι μέσο της κάθετης πλευράς ΑΓ ενός ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 ∟) και Ε η προβολή του στη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι $Ε\Gamma^2 + AB^2 = EB^2$.

Στη συνέχεια διατάξτε κατά αύξουσα σειρά μήκους τα τμήματα ΔΒ, ΕΒ, ΕΓ.

4. Δύο ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ ($\hat{A}$ = $\hat{A}$΄ = 1 ∟) έχουν $\mu_\beta = \mu_{\beta'}$ και $\mu_\gamma = \mu_{\gamma'}$. Να αποδείξετε ότι:

i) α = α΄ ii) β = β΄.

Τι συμπεραίνετε για τα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄;

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε το ύψος του ΒΕ. Να αποδείξετε ότι

$α^2 + β^2 + γ^2 = 3ΒΕ^2 + 2ΑΕ^2 + ΓΕ^2$.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α} = 1^{\llcorner}$) και το ύψος του ΑΔ. Αν Ε, Ζ είναι οι προβολές του Δ πάνω στις ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\dfrac{ΑΒ^3}{ΑΓ^3} = \dfrac{ΒΕ}{ΓΖ}$

ii) $ΑΔ^3 = ΒΓ \cdot ΔΕ \cdot ΔΖ$.

2. Δίνονται δύο κύκλοι (Κ,R) και (Λ,ρ) που εφάπτονται εξωτερικά στο Α. Αν ΒΓ είναι το κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους και (Ο,σ) ο κύκλος που εφάπτεται στους (Κ,R), (Λ,ρ) και στη ΒΓ, να αποδείξετε ότι:

i) $B\Gamma = 2\sqrt{R\rho}$ ii) $\dfrac{1}{\sqrt{R}} + \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} = \dfrac{1}{\sqrt{\sigma}}$.

3. **Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με $\hat{A} = \hat{B} = 1$ ∟. Αν Μ, Ν τα μέσα των διαγωνίων ΒΔ, ΑΓ αντίστοιχα και Κ το σημείο τομής της ΑΜ με τη ΒΓ να αποδείξετε ότι :**

i) το ΑΒΚΔ είναι ορθογώνιο,

ii) $\Delta\Gamma^2 - AB^2 = 4MN^2$.

4. **Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 90^o$) να αποδείξετε ότι $2\mu_\alpha^2 \geq \beta\gamma$**

5. **Θεωρούμε κύκλο (Ο,R), διάμετρό του ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ που τέμνει την ΑΒ στο Ε και σχηματίζει με αυτή γωνία 45°. Να αποδείξετε ότι $E\Gamma^2 + E\Delta^2 = 2R^2$.**

6. **Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1$ ∟) και το ύψος του ΑΔ. Αν x, y και ω είναι αντίστοιχα τα μήκη οποιωνδήποτε ομόλογων γραμμικών στοιχείων των τριγώ-**

νων (π.χ. διαμέσων, υψών, ακτίνων εγγεγραμμένων κύκλων κτλ.) ΔΑΒ, ΔΑΓ και ΑΒΓ, τότε $x^2 + y^2 = \omega^2$.

9.3 Γεωμετρικές κατασκευές

Με εφαρμογή του Πυθαγόρειου θεωρήματος και του θεωρήματος IV αντιμετωπίζουμε τα παρακάτω βασικά προβλήματα γεωμετρικών κατασκευών ευθύγραμμων τμημάτων .

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

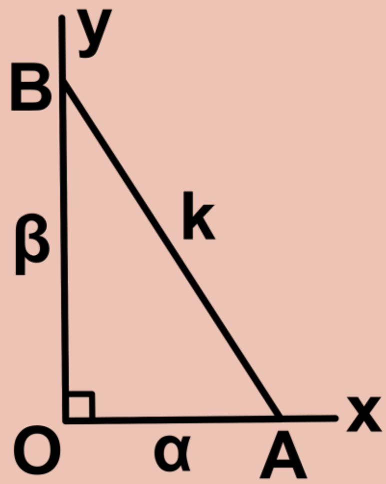
Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα k , που ορίζεται από την ισότητα :

(i) $k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, (ii) $k = \sqrt{\alpha^2 - \beta^2}$.

Λύση

(i) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 + \beta^2$, οπότε το ζητούμενο τμήμα k είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α, β.

Επομένως, αν πάνω στις κάθετες πλευρές (σχ.7) Οx, Oy μίας ορθής γωνίας $x\hat{O}y$ πάρουμε αντίστοιχα τα σημεία Α, Β, ώστε ΟΑ=α και ΟΒ=β, τότε



Σχήμα 7

$AB^2 = OA^2 + OB^2 = \alpha^2 + \beta^2$ και επομένως το τμήμα ΑΒ είναι το ζητούμενο τμήμα k .

Είναι φανερό ότι το τμήμα k κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.

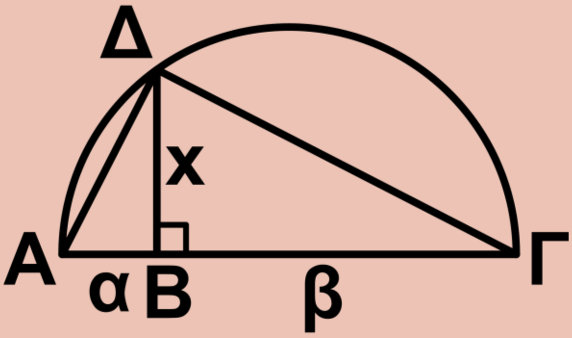
(ii) Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $k^2 = \alpha^2 - \beta^2$ η οποία σημαίνει ότι το ζητούμενο τμήμα k είναι η μία κάθετη πλευρά ορθογώνιου τριγώνου με υποτείνουσα α και άλλη κάθετη πλευρά το β. Η κατασκευή είναι όμοια της (i).

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Αν α, β είναι γνωστά τμήματα, να κατασκευάσετε το τμήμα x , που ορίζεται από την ισότητα $x = \sqrt{\alpha\beta}$.

Το τμήμα x είναι η μέση ανάλογος των α, β.

Λύση



Σχήμα 8

Η δοσμένη ισότητα γράφεται ισοδύναμα $x^2 = \alpha\beta$ η οποία σημαίνει ότι το x είναι το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου, που χωρίζει την υποτείνουσα σε δύο τμήματα ίσα με α και β αντίστοιχα.

Παίρνουμε επομένως σε μία ευθεία διαδοχικά τα τμήματα ΑΒ=α και ΒΓ=β (σχ.8). Γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΓ και στο Β υψώνουμε κάθετο στην ΑΓ, που τέμνει το ημικύκλιο στο Δ. Σχηματίζουμε το τρί-

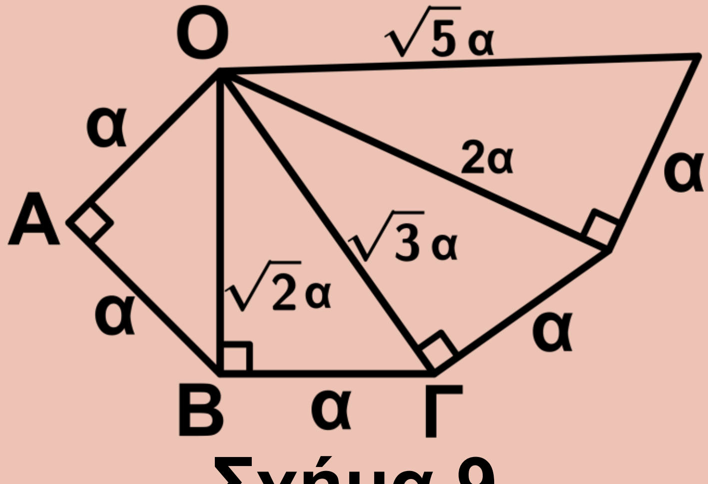
γωνο ΔΑΓ το οποίο είναι ορθογώνιο ($\hat{\Delta}$ =1 └). Επομένως έχουμε $\Delta B^2 = AB \cdot B\Gamma = \alpha\beta$ και κατά συνέπεια το τμήμα ΔΒ είναι το ζητούμενο. Είναι φανερό ότι το τμήμα x κατασκευάζεται για οποιαδήποτε τμήματα α, β.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 3

Αν α είναι γνωστό τμήμα, να κατασκευασθεί τμήμα ίσο με $\sqrt{2}\,\alpha$, $\sqrt{3}\,\alpha$, $\sqrt{5}\,\alpha, \cdots$, $\sqrt{\nu}\,\alpha$ με ν φυσικό μεγαλύτερο ή ίσο του δύο.

Λύση

Αν $x = \sqrt{2}\,\alpha$, τότε $x^2 = 2\alpha^2 = \alpha^2 + \alpha^2$, η οποία σημαίνει ότι το x μπορεί να κατασκευασθεί (σχ.9) ως υποτείνουσα



Σχήμα 9

ορθογώνιου και ισοσκελούς τριγώνου με κάθετες πλευρές ίσες με α. Έτσι το ΟΒ είναι το ζητούμενο τμήμα. Αν $y=\sqrt{3}\,\alpha$, τότε $y=3\alpha^2=\alpha^2+2\alpha^2=\alpha^2+x^2$ που σημαίνει ότι το y είναι υποτείνουσα ορθογώνιου τριγώνου με κάθετες πλευρές α και x . Αν λοιπόν φέρουμε κάθετο στην ΟΒ στο Β και πάνω σε αυτή πάρουμε σημείο Γ, ώστε ΒΓ=α, τότε $ΟΓ=\sqrt{3}\,\alpha$, δηλαδή $y=ΟΓ$. Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο κατασκευάζουμε διαδοχικά τα τμήματα $\sqrt{2}\,\alpha$, $\sqrt{3}\,\alpha$, $\sqrt{5}\,\alpha$, $\cdots$, $\sqrt{\nu}\,\alpha$.

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Η ανακάλυψη της ασυμμετρίας

Αρχικά οι Πυθαγόρειοι πίστευαν ότι ο λόγος οιωνδήποτε (φυσικών ή γεωμετρικών) μεγεθών μπορεί να εκφραστεί ως λόγος φυσικών

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

αριθμών. Ειδικότερα, θεωρούσαν ότι όλα τα τμήματα είναι σύμμετρα, δηλαδή για οποιαδήποτε δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ υπάρχει τμήμα ΕΖ που περιέχεται ακέραιο αριθμό φορών τόσο στο ΑΒ, όσο και το ΓΔ. Όμως σύντομα έκαναν μια ανακάλυψη που έμελλε να κλονίσει την πεποίθησή τους αυτή. Βρήκαν ότι υπάρχουν μεγέθη που δεν είναι σύμμετρα. Δεν γνωρίζουμε με βεβαιότητα ποιο ακριβώς πρόβλημα οδήγησε τους αρχαίους Έλληνες στην ανακάλυψη αυτή. Οι ιστορικοί έχουν προτείνει κατά καιρούς πολλές εκδοχές. Η ανακάλυψη αυτή μπορεί να είχε γίνει π.χ. στη γεωμετρία, στο πρόβλημα της εύρεσης του κοινού μέτρου της διαγωνίου προς την πλευρά του τετραγώνου,

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

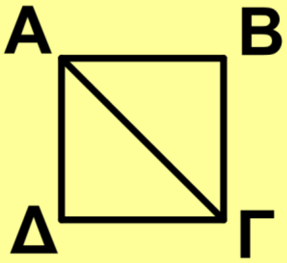
ή κατά τη μελέτη του κανονικού δωδεκαέδρου, ή στη θεωρία της μουσικής, στο πρόβλημα της διαίρεσης της οκτάβας, που ανάγεται στην εύρεση του γεωμετρικού μέσου των αριθμών 1 και 2, ή στην αριθμητική, στο πρόβλημα του ορισμού του λόγου, που το τετράγωνό του είναι ίσο με 2.

Η πρώτη μαρτυρία για την απόδειξη της ασυμμετρίας (αλλά όχι κατ. ανάγκη και ιστορικά πρώτη απόδειξη) απαντάται στα «Αναλυτικά Ύστερα» του Αριστοτέλη, ο οποίος αναφέρει ότι η απόδειξη της ασυμμετρίας της διαγωνίου με την πλευρά του τετραγώνου γίνεται με την εις άτοπο απαγωγή, γιατί «αν υποτεθεί ότι η διάμετρος είναι σύμμετρη με την πλευρά, τότε ο άρτιος θα

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

ισούται με τον περιττό».

Η πρόταση αυτή του Αριστοτέλη ερμηνεύεται ως εξής:



Αν υποθέσουμε ότι η πλευρά ΑΒ είναι σύμμετρη προς τη διαγώνιο ΑΓ, τότε ο λόγος τους είναι λόγος ακεραίων αριθμών, δηλαδή, $\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{α}{β}$, όπου οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι. Τότε, από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε $ΑΓ^2 = 2ΑΒ^2$. Επομένως,

$\frac{ΑΒ^2}{ΑΓ^2} = \frac{α^2}{β^2} = \frac{1}{2}$ ή $β^2 = 2α^2$. Αυτό σημαίνει ότι ο $β^2$ είναι άρτιος και επομένως και ο β είναι άρτιος (δηλαδή

της μορφής β=2λ).
Τότε ο α πρέπει να είναι περιττός (αφού οι α, β δεν είναι και οι δύο άρτιοι). Όμως τότε $(2\lambda)^2 = 2\alpha^2$, ή
$4\lambda^2 = 2\alpha^2$ ή
$2\lambda^2 = \alpha^2$ κι επομένως ο α^2 είναι άρτιος, οπότε και ο α είναι άρτιος, που είναι άτοπο.
Πρέπει να σημειώσουμε ότι η απόδειξη αυτή έχει καθαρά αριθμητικό χαρακτήρα και στηρίζεται στη θεωρία του άρτιου και του περιττού (δηλαδή τη θεωρία διαιρετότητας δια 2) που είχαν αναπτύξει οι Πυθαγόρειοι.
Γρήγορα βρέθηκαν και άλλα ασύμμετρα τμήματα. Ειδικότερα, ο Θεόδωρος ο Κυρηναίος (τέλη του 5ου αι. π.Χ.) ανακάλυψε ότι οι πλευρές των τετραγώνων με εμβαδόν 3, 5, 6,

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 15 είναι ασύμμετρες με τη διαγώνιο του τετραγώνου με πλευρές τη μονάδα. Επίσης, ο Θεαίτητος απέδειξε ότι αν το εμβαδόν ενός τετραγώνου εκφράζεται με έναν αριθμό Ν που δεν είναι τετράγωνος, τότε η πλευρά του είναι ασύμμετρη με τη μονάδα. Με σύγχρονη ορολογία, αν $N \neq \alpha^2$, τότε ο $\sqrt{N}$ δεν είναι ρητός αριθμός. Ο Θεαίτητος προχώρησε παραπέρα τις έρευνές του και απέδειξε ότι και όλοι οι αριθμοί της μορφής $\sqrt[3]{N}$, όπου Ν φυσικός αριθμός δεν είναι τέλειοι κύβοι. Επίσης εξέτασε άρρητους της μορφής $\sqrt{M+N}$, $\sqrt{M}+\sqrt{N}$, $\sqrt{\sqrt{M}+\sqrt{N}}$.

9.4 Γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος

Το Πυθαγόρειο θεώρημα εκφράζει το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από ορθή γωνία, ως προς τις δύο άλλες πλευρές. Προκύπτει, λοιπόν, το ερώτημα: το τετράγωνο μίας πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι σε οξεία ή αμβλεία γωνία μπορεί να εκφρασθεί ως συνάρτηση των άλλων πλευρών; Απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνουν τα ακόλουθα δύο θεωρήματα.

Θεώρημα I

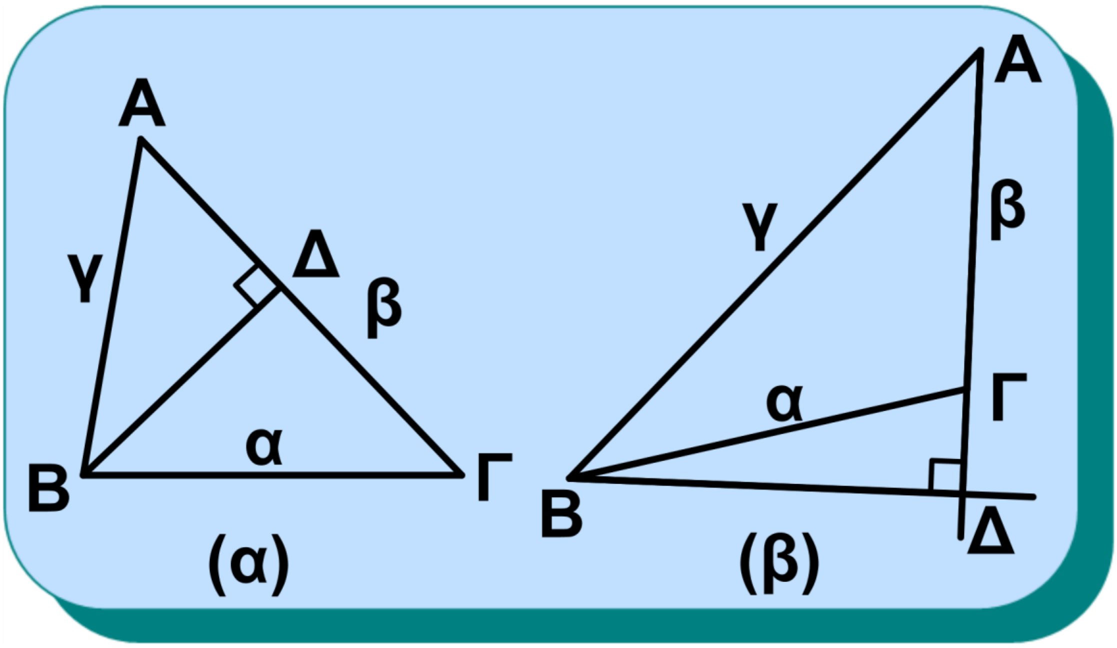
Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από

αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.10) είναι π.χ. $\hat{A} < 1$∟ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει ότι

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot ΑΔ$$

Απόδειξη



Σχήμα 10

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ, ΔΒΑ έχουμε, με εφαρμογές του Πυθαγόρειου θεωρήματος αντίστοιχα: $\alpha^2 = ΔΒ^2 + ΔΓ^2$ και $ΔΒ^2 = \gamma^2 - ΑΔ^2$.

Επειδή είναι $\hat{A} < 1$ ∟ τα Δ, Γ βρίσκονται προς το ίδιο μέρος του Α και ειδικότερα:

▪ αν $\hat{\Gamma} < 1$ ∟ το Δ είναι μεταξύ των Α, Γ (σχ.10α), οπότε ΔΓ = β - ΑΔ.

▪ αν $\hat{\Gamma} > 1$ ∟ το Γ είναι μεταξύ των Α, Δ (σχ.10β), οπότε ΔΓ = ΑΔ - β.

Από τις δύο τελευταίες ισότητες προκύπτει ότι

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta - A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta.$$

Με αντικατάσταση αυτής της σχέσης και της $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ στην $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\alpha^2 &= \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 - 2\beta \cdot A\Delta \\ &= \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta\end{aligned}$$

δηλαδή η ζητούμενη ισότητα.

▪ αν τέλος $\hat{\Gamma} = 1$ ∟, το Δ συμπίπτει με το Γ και το ορθογώνιο τρίγωνο ΓΑΒ δίνει $\alpha^2 = \gamma^2 - \beta^2$ που γράφεται $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot A\Delta$, αφού ΑΔ = β.

Θεώρημα ΙΙ

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.

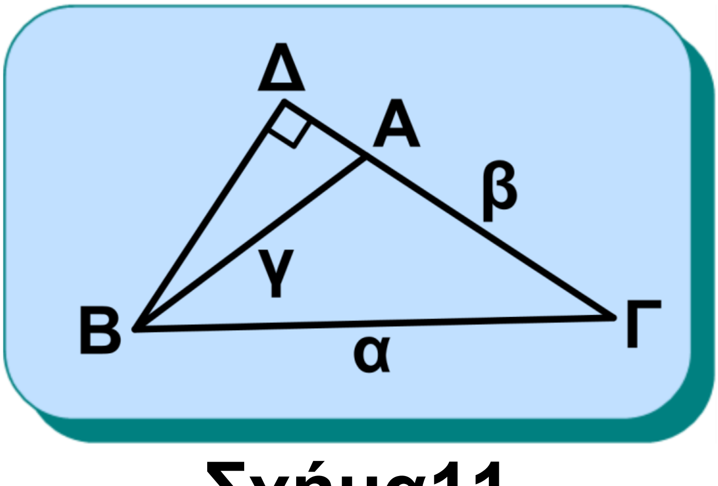
Αν δηλαδή σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ (σχ.11) είναι π.χ. $\hat{A} > 1^{\llcorner}$ και ΑΔ η προβολή της πλευράς γ πάνω στη β, τότε ισχύει

$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Απόδειξη

Από τα ορθογώνια τρίγωνα ΔΒΓ και ΔΒΑ, παίρνουμε αντίστοιχα:

$\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$



Σχήμα11

και $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$.

Επειδή $\hat{A} > 1$ ∟, το Δ βρίσκεται στην προέκταση της ΓΑ προς το Α και επομένως $\Delta\Gamma = \beta + A\Delta$ οπότε

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Με αντικατάσταση των σχέσεων $\Delta B^2 = \gamma^2 - A\Delta^2$ και

$$\Delta\Gamma^2 = (\beta + A\Delta)^2 = \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

στη σχέση $\alpha^2 = \Delta B^2 + \Delta\Gamma^2$, προκύπτει η ζητούμενη ισότητα

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= \gamma^2 - A\Delta^2 + \beta^2 + A\Delta^2 + 2\beta \cdot A\Delta \\ &= \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta \end{aligned}$$

Από το Πυθαγόρειο θεώρημα και τα προηγούμενα θεωρήματα Ι και ΙΙ προκύπτει άμεσα ότι σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε :

(i) Αν $\hat{A} < 1$ ∟, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,

(ii) Αν $\hat{A} = 1$ ∟, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,

(iii) Αν $\hat{A} > 1$ ∟, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Αποδεικνύεται όμως, με απαγωγή σε άτοπο ότι ισχύει και το αντίστροφο των (i), (ii), (iii). Πράγματι, αν π.χ. ισχύει $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$ δεν μπορεί να ισχύει $\hat{A}$ =1 └ ή $\hat{A}$ >1 └, γιατί τότε από τις (ii) και (iii) θα είχαμε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$ ή $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$ αντίστοιχα, που είναι άτοπο, αφού $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$.

Άρα $\hat{A}$ <1 └.

Όμοια αποδεικνύονται και οι άλλες περιπτώσεις.

ΣΧΟΛΙΟ

Είναι φανερό ότι τα παραπάνω θεωρήματα I και II αποτελούν γενίκευση του Πυθαγόρειου θεωρήματος, αφού στην περίπτωση που είναι $\hat{A}$= 1 └, τα θεωρήματα αυτά δίνουν ως ειδική περίπτωση το Πυθαγόρειο θεώρημα.

Έτσι έχουμε το ακόλουθο πόρισμα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

(i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1\llcorner$,

(ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1\llcorner$,

(iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1\llcorner$.

Σύμφωνα με το πόρισμα αυτό και επειδή σε κάθε τρίγωνο η μεγαλύτερη πλευρά βρίσκεται απέναντι στη μεγαλύτερη γωνία, συγκρίνοντας το τετράγωνο της **μεγαλύτερης** πλευράς ενός τριγώνου με το άθροισμα των τετραγώνων των άλλων πλευρών του, διαπιστώνουμε αν το τρίγωνο είναι οξυγώνιο, ορθογώνιο ή αμβλυγώνιο.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Αν σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α=8, β=10 και γ=7, θα έχουμε $\beta^2 = 100$, $\alpha^2 + \gamma^2 = 64 + 49 = 113$

$\beta^2 < \alpha^2 + \gamma^2$, οπότε $\hat{B}$ <1 ∟ και επειδή δηλαδή η $\hat{B}$ είναι η μεγαλύτερη γωνία του τριγώνου, το τρίγωνο θα είναι οξυγώνιο.

Τέλος από τα θεωρήματα Ι και ΙΙ εκφράζοντας την προβολή ΑΔ ως προς το συνΑ προκύπτει το επόμενο πόρισμα:

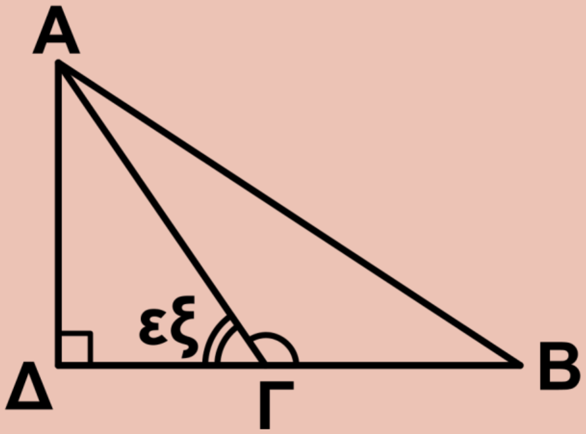
ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta\gamma \cdot \text{συν}A$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν μεταξύ των πλευρών α, β, γ ενός τριγώνου ΑΒΓ ισχύει $\gamma = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta}$, τότε :

(i) να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι αμβλυγώνιο,
(ii) να υπολογίσετε τη γωνία $\hat{\Gamma}$.



Σχήμα12

Λύση

(i) Από τη δοσμένη ισότητα προκύπτει ότι η γ είναι η μεγαλύτερη πλευρά και επιπλέον ότι
$\gamma^2 > \alpha^2 + \beta^2$, οπότε η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία.

(ii) Επειδή η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι αμβλεία, σύμφωνα με το θεώρημα αμβλείας γωνίας έχουμε:
$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + 2\alpha \cdot \Gamma\Delta$ (1).
Από την υπόθεση όμως έχουμε
$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \sqrt{3}\alpha\beta$ (2).
Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι

$\Gamma\Delta = \frac{\sqrt{3}}{2}\beta$. Εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΑΔΓ έχουμε $A\Delta^2 = \beta^2 - \Gamma\Delta^2 = \frac{\beta^2}{4}$, οπότε $A\Delta = \frac{\beta}{2} = \frac{A\Gamma}{2}$ που σημαίνει ότι $\hat{\Gamma}_{\varepsilon\xi} = 30°$ και επομένως $\hat{\Gamma} = 150°$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το ύψος $υ_α$ ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται από τον τύπο

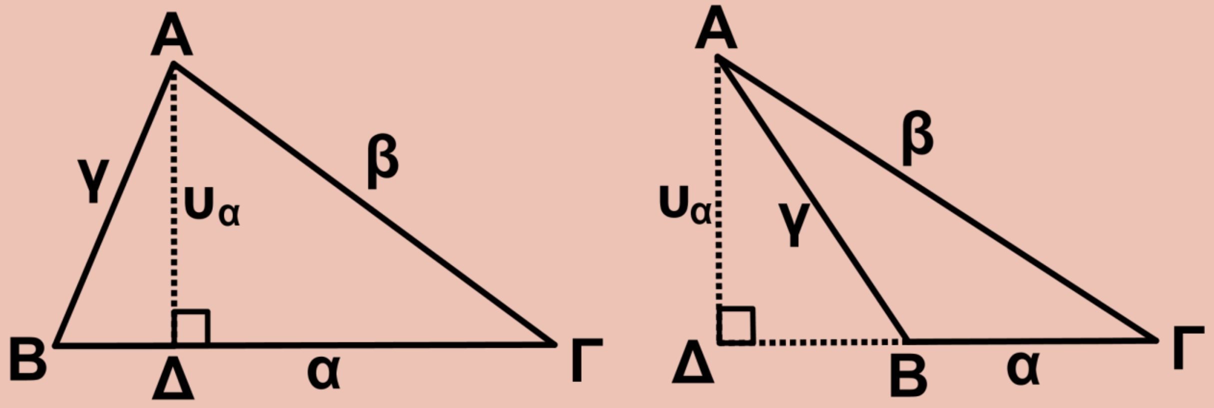
$$υ_α = \frac{2}{α}\sqrt{τ(τ-α)(τ-β)(τ-γ)},$$

όπου $τ = \frac{1}{2}(α+β+γ)$ η ημιπερίμετρος του τριγώνου. Ανάλογες εκφράσεις ισχύουν και για τα άλλα ύψη $υ_β$ και $υ_γ$.

Απόδειξη

Έστω ένα τρίγωνο ΑΒΓ και ΑΔ το

ύψος του $υ_α$. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΒ έχουμε $υ_α^2 = γ^2 - ΒΔ^2$ (1).



Σχήμα 13

Πρέπει επομένως να υπολογίσουμε την προβολή ΒΔ της γ πάνω στην α.

. Αν $\hat{Β} \leq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $β^2 = α^2 + γ^2 - 2α \cdot ΒΔ$ ή

$$ΒΔ = \frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \quad (2)$$

. Αν $\hat{Β} \geq 1∟$, από το τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε $β^2 = α^2 + γ^2 + 2α \cdot ΒΔ$ ή

$$ΒΔ = -\frac{1}{2α}\left(α^2 + γ^2 - β^2\right) \quad (3).$$

Από τις (2) και (3) προκύπτει ότι $B\Delta^2 = \frac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)^2$ με αντικατάσταση της οποίας στην (1) παίρνουμε:

$$\upsilon_\alpha^2 = \gamma^2 - \frac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[4\alpha^2\gamma^2 - \left(\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left(2\alpha\gamma+\alpha^2+\gamma^2-\beta^2\right)\left(2\alpha\gamma-\alpha^2-\gamma^2+\beta^2\right) =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left[\left(\alpha+\gamma\right)^2-\beta^2\right]\left[\beta^2-\left(\alpha-\gamma\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{4\alpha^2}\left(\alpha+\beta+\gamma\right)\left(\alpha+\gamma-\beta\right)\left(\beta+\alpha-\gamma\right)$$

$$\cdot\left(\beta+\gamma-\alpha\right) \quad (4).$$

Επειδή $\alpha+\beta+\gamma = 2\tau$, θα είναι $\alpha+\gamma-\beta = 2\tau-\beta-\beta = 2\left(\tau-\beta\right)$,

$\alpha+\beta-\gamma = 2\left(\tau-\gamma\right)$ και

$\beta+\gamma-\alpha = 2\left(\tau-\alpha\right)$, οπότε η (4) γίνεται:

$$\upsilon_\alpha^2 = \frac{1}{4\alpha^2}2\tau 2(\tau-\beta)2(\tau-\gamma)2(\tau-\alpha) =$$

$= \frac{4}{\alpha^2}\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)$ από την οποία προκύπτει το ζητούμενο.

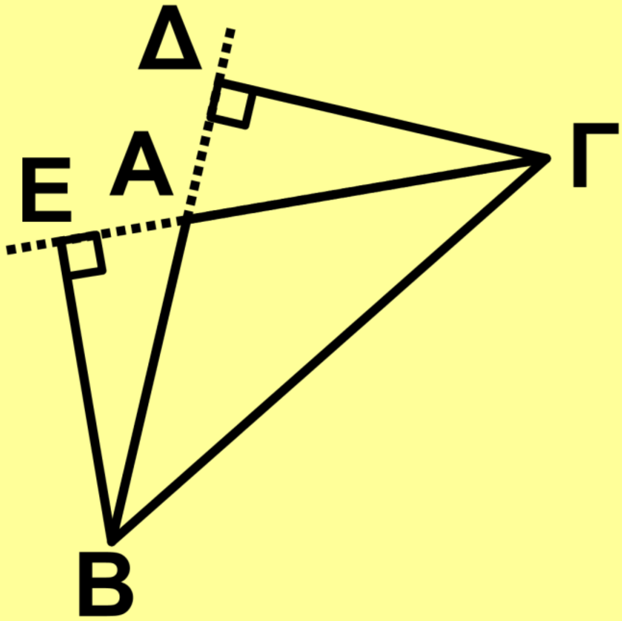
ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώστε τα κενά:

i) $\text{ΒΓ}^2 = \ldots + \ldots + 2\text{ΑΒ}\ldots$

ii) $\text{ΒΓ}^2 = \ldots + \ldots + 2\text{ΑΓ}\ldots$



2. Να βρεθεί το είδος των γωνιών τριγώνου ΑΒΓ όταν:

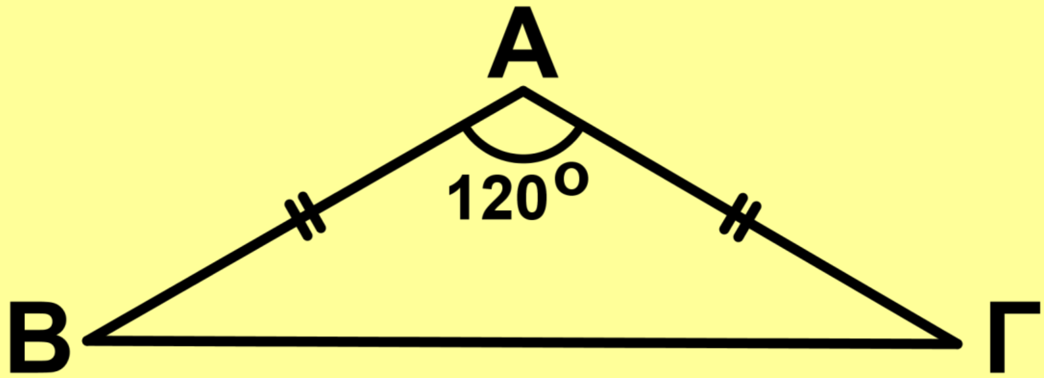
i) $\beta^2 = 3\gamma^2 + \alpha^2$

ii) $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

iii) $\alpha^2 - \beta^2 = 2\gamma^2$

3. **Αν β η .... πλευρά αμβλυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ τότε .... > α^2 + ... (Να συμπληρώσετε τα κενά).**

4. **Αν στο παρακάτω σχήμα είναι ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 120°$, να δικαιολογήσετε γιατί $\alpha^2 = 3\beta^2$.**



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Να εξετάσετε αν υπάρχει τρίγωνο ΑΒΓ, με α=6μ, β=5μ, γ=4μ, όπου μ θετική παράμετρος. Να εξετασθεί το είδος του τριγώνου ως προς τις γωνίες του.**

2. **Υπάρχει τρίγωνο με μήκη πλευρών α=6, β=5, γ=4;**
Αν ναι, να υπολογισθούν τα ύψη του τριγώνου.

3. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = 1 + \sqrt{3}$, $\gamma = 2$.**
Να υπολογισθεί η γωνία $\hat{A}$.

4. **Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4cm, ΑΓ = 5cm και $A\hat{B}\Delta = 30°$, όπου ΒΔ το ύψος του. Να υπολογισθεί η πλευρά του ΒΓ.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Οι πλευρές ενός τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκη ΑΒ=9cm, ΒΓ=7cm και ΑΓ=12cm. Να υπολογισθεί το μήκος της προβολής της ΒΓ πάνω στην ΑΒ.**

2. **Να αποδείξετε ότι σε κάθε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΑΒ, ΓΔ ισχύει ότι $A\Gamma^2 + B\Delta^2 = A\Delta^2 + B\Gamma^2 + 2AB \cdot \Gamma\Delta$.**

3. Αν ΒΒ΄, ΓΓ΄είναι ύψη ενός οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι $α^2 = β \cdot ΓΒ΄ + γ \cdot ΒΓ΄$.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ = 1 └). Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΓ κατά ΓΔ = ΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ^2 = 2ΒΓ \cdot ΑΔ$.

5. Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε παράλληλο της ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $ΒΕ^2 = ΕΓ^2 + ΒΓ \cdot ΔΕ$

6. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{Α}$ = 1 └) με πλευρές α, β, γ. Υπάρχει τρίγωνο με πλευρές 5α, 4β, 3γ;

Σύνθετα Θέματα

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{Α}$ = 30°. Να αποδείξετε ότι $α = β\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

2. Δίνεται κύκλος διαμέτρου ΑΒ και μία χορδή του ΓΔ//ΑΒ. Αν Μ είναι τυχαίο σημείο της ΑΒ, να αποδείξετε ότι $\text{ΜΓ}^2 + \text{ΜΔ}^2 = \text{ΜΑ}^2 + \text{ΜΒ}^2$.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\alpha^3 = \beta^3 + \gamma^3$. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο είναι οξυγώνιο.

9.5 Θεωρήματα διαμέσων

Οι επόμενες μετρικές σχέσεις που θα μελετήσουμε αφορούν τον υπολογισμό των διαμέσων ενός τριγώνου και των προβολών τους στις πλευρές, ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου.

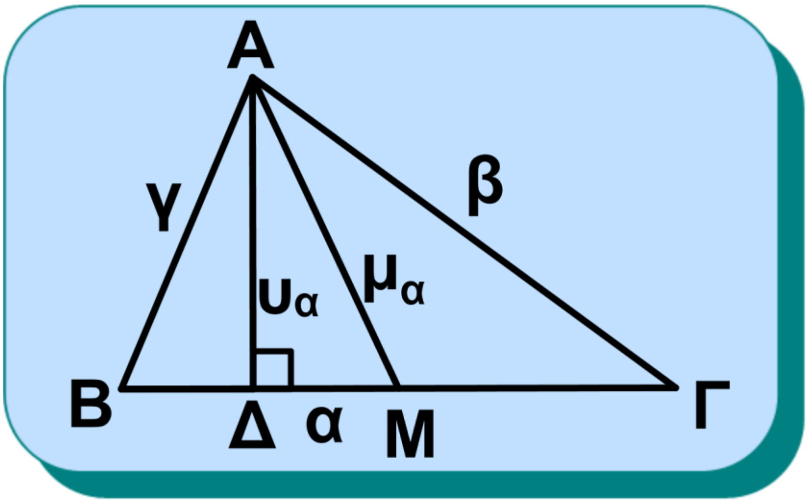
Θεώρημα Ι
($1^{\text{ο}}$ Θεώρημα Διαμέσων)

Το άθροισμα των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο του τετραγώνου της διαμέσου που περιέχεται μεταξύ των πλευρών αυτών, αυξημένο κατά το μισό του τετραγώνου της τρίτης πλευράς.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ, η διάμεσος και το ύψος ΑΔ. Αν ΑΓ > ΑΒ, τότε το ίχνος Δ του βρίσκεται μεταξύ των Β, Μ (σχ.14) και $A\hat{M}\Gamma > 1$ └, ενώ $A\hat{M}B<1$ └.

Σχήμα 14



Εφαρμόζουμε το θεώρημα αμβλείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΓ και το θεώρημα οξείας γωνίας στο τρίγωνο ΑΜΒ. Τότε θα έχουμε ότι:

(i) $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$

(ii) $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$

Προσθέτοντας κατά μέλη αυτές τις σχέσεις και λαμβάνοντας υπόψη ότι ΜΒ = ΜΓ έχουμε:

$$A\Gamma^2 + AB^2 = 2AM^2 + 2MB^2 =$$

$$= 2AM^2 + 2\left(\frac{B\Gamma}{2}\right)^2 = 2AM^2 + \frac{B\Gamma^2}{2} \text{ ή}$$

$$\boxed{\beta^2 + \gamma^2 = 2\mu_\alpha^2 + \frac{\alpha^2}{2}}$$

Ανάλογα έχουμε και τους ακόλουθους τύπους: $\boxed{\alpha^2 + \beta^2 = 2\mu_\gamma^2 + \frac{\gamma^2}{2}}$,

$$\boxed{\alpha^2 + \gamma^2 = 2\mu_\beta^2 + \frac{\beta^2}{2}}.$$

Από τους τύπους αυτούς μπορούμε να υπολογίσουμε τα τετράγωνα των διαμέσων ως συνάρτηση των πλευρών του τριγώνου:

$$\boxed{\mu_\alpha^2 = \frac{2\beta^2 + 2\gamma^2 - \alpha^2}{4}},$$

$$\boxed{\mu_\beta^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\gamma^2 - \beta^2}{4}},$$

$$\mu_\gamma^2 = \frac{2\alpha^2 + 2\beta^2 - \gamma^2}{4}$$

Για τον υπολογισμό των προβολών των διαμέσων στις πλευρές του τριγώνου έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ
(2ο Θεώρημα Διαμέσων)

Η διαφορά των τετραγώνων δύο πλευρών ενός τριγώνου ισούται με το διπλάσιο γινόμενο της τρίτης πλευράς επί την προβολή της αντίστοιχης διαμέσου πάνω στην πλευρά αυτή.

Απόδειξη

Έστω ότι ΑΓ > ΑΒ. Αφαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (βλ. Απόδειξη θεωρήματος Ι):

(i) $A\Gamma^2 = AM^2 + M\Gamma^2 + 2M\Gamma \cdot M\Delta$

(ii) $AB^2 = AM^2 + MB^2 - 2MB \cdot M\Delta$

βρίσκουμε ότι

$$A\Gamma^2 - AB^2 = 4MB \cdot M\Delta = 4\frac{B\Gamma}{2} \cdot M\Delta$$

ή $\beta^2 - \gamma^2 = 2\alpha \cdot M\Delta$.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Αν το τρίγωνο ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΓ = ΑΒ) ή ισόπλευρο τότε, το Μ ταυτίζεται με το Δ και το 2ο θεώρημα διαμέσων ισχύει ταυτοτικά.

9.6 Βασικοί γεωμετρικοί τόποι

Χρησιμοποιώντας τις προηγούμενες μετρικές σχέσεις θα μελετήσουμε τα παρακάτω προβλήματα γεωμετρικών τόπων.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

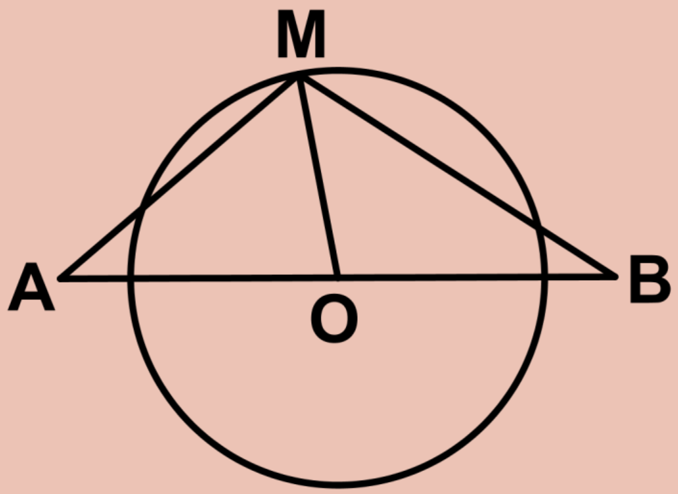
Έστω Α, Β δύο σταθερά σημεία και k ένα δοσμένο τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, των οποίων το άθροισμα

των τετραγώνων των αποστάσεων από τα Α, Β ισούται με k^2.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα θα είναι: $AM^2 + BM^2 = k^2$ (1).

Αν Ο είναι το μέσο του ΑΒ, τότε από το 1ο θεώρημα των διαμέσων θα έχουμε



Σχήμα 15

$$AM^2 + BM^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$k^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} \Leftrightarrow$$

$$MO = \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2} \quad (2).$$

Από την ισότητα αυτή βλέπουμε ότι το τμήμα ΜΟ έχει σταθερό μήκος.

Έτσι το Μ απέχει από το σταθερό σημείο Ο σταθερή απόσταση ίση με $\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$, άρα βρίσκεται στον κύκλο $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$.

Αντίστροφα. Θα αποδείξουμε ότι κάθε σημείο Μ του κύκλου $\left(O, \frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right)$ είναι και σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου, δηλαδή ότι ισχύει $AM^2 + BM^2 = k^2$. Πράγματι, από το 1ο θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$MA^2 + MB^2 = 2MO^2 + \frac{AB^2}{2} =$$

$$= 2\left(\frac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}\right) + \frac{AB^2}{2} = k^2.$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι ο κύκλος που έχει κέντρο O το μέσο του τμήματος AB και ακτίνα ίση με $\dfrac{\sqrt{2k^2 - AB^2}}{2}$.

Διερεύνηση. Απαραίτητη προϋπόθεση για να υπάρχει γεωμετρικός τόπος είναι $2k^2 - AB^2 \geq 0 \Leftrightarrow k \geq \dfrac{AB}{\sqrt{2}}$

Όταν έχουμε ισότητα ο γεωμετρικός τόπος αποτελείται μόνο από το σημείο O.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

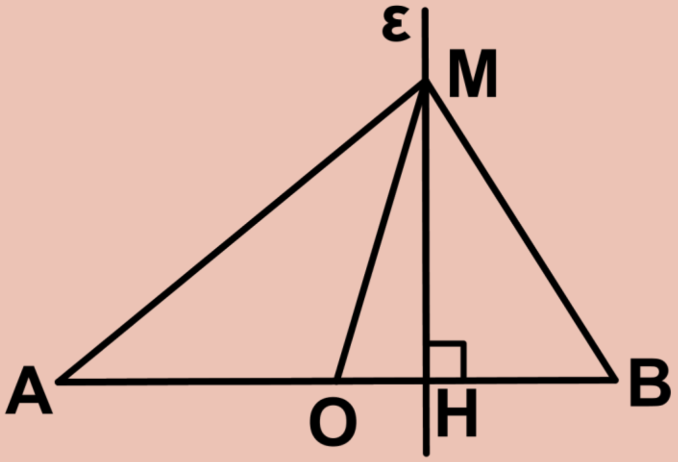
Έστω A, B δύο σταθερά σημεία και k ένα σταθερό τμήμα. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των σημείων, για τα οποία η διαφορά των τετραγώνων των αποστάσεών τους από τα A, B ισούται με k^2.

Λύση

Έστω Μ ένα σημείο του γεωμετρικού τόπου. Σύμφωνα με το πρόβλημα (για ΑΜ > ΒΜ) είναι

$$AM^2 - BM^2 = k^2 \text{ (1)}.$$

Έστω Ο το μέσο του ΑΒ και ε η ευθεία ΜΗ $\perp$ ΑΒ όπου Η η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ.



Σχήμα 16

Από το 2ο θεώρημα των διαμέσων έχουμε ότι

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow$$

$$k^2 = 2AB \cdot OH \Leftrightarrow OH = \frac{k^2}{2AB} \text{ (2)}.$$

Η ισότητα αυτή δείχνει ότι το τμήμα ΟΗ είναι σταθερό. Παρατηρούμε ότι η προβολή του Μ πάνω στο ΑΒ είναι σταθερή, άρα το Μ βρίσκεται στην ευθεία ε $\perp$ Β στο σημείο Η, όπου $OH = \frac{k^2}{2AB}$ και βρίσκεται μεταξύ των σημείων Ο, Β.

Αντίστροφα. Έστω σημείο Η μεταξύ των Ο, Β τέτοιο, ώστε $OH = \frac{k^2}{2AB}$.

Από το Η φέρουμε την κάθετη ευθεία ε στην ΑΒ και έστω Μ τυχαίο σημείο της ε. Θα αποδείξουμε ότι το Μ είναι σημείο του ζητούμενου γεωμετρικού τόπου. Πράγματι από το 2ο Θεώρημα διαμέσων έχουμε

$$AM^2 - BM^2 = 2AB \cdot OH =$$

$$= 2AB \cdot \frac{k^2}{2AB} = k^2$$

Επομένως ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος είναι η ε.

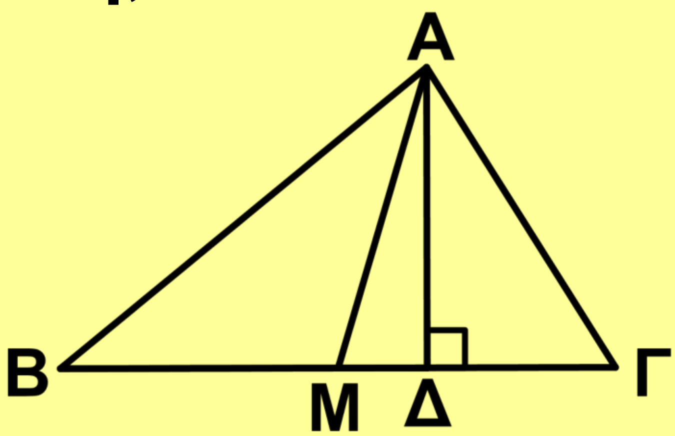
Διερεύνηση. Αν k = 0 είναι $MA^2 - MB^2 = 0$ ή ΜΑ = ΜΒ, οπότε το Μ ισαπέχει από τα σημεία Α,Β. Τότε ο ζητούμενος γεωμετρικός τόπος

είναι η μεσοκάθετος του τμήματος ΑΒ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Στο παρακάτω σχήμα η ΑΜ είναι διάμεσος και ΑΔ ύψος. Ποια σχέση είναι σωστή;



i) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

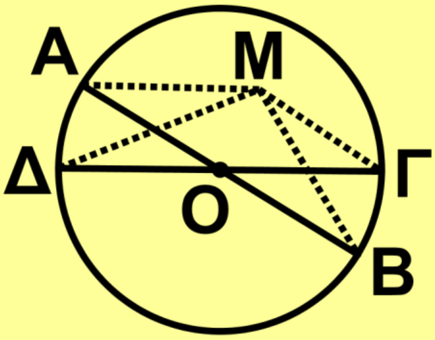
ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2A\Delta^2$

iii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2B\Gamma \cdot M\Delta$

iv) $AB^2 - A\Gamma^2 = 2AM^2 + 2BM^2$

Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Στο παρακάτω σχήμα να συμπληρώσετε τα κενά



i) $ΜΑ^2 + ΜΒ^2 =$ .... + ...

ii) $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 =$ .... + ...

Να εξηγήσετε γιατί

$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 = ΜΓ^2 + ΜΔ^2$.

3. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι

$β^2 + γ^2 = 5α^2$ τότε:

α. $μ_α = \frac{α}{2}$, β. $μ_α = \frac{3α}{4}$, γ. $μ_α = \frac{3α}{2}$,

δ. $μ_α = \frac{2α}{3}$

Κυκλώστε το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση και αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Σε τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε β=7, γ=6 και $μ_α$=7/2. Να υπολογισθούν: i) η

πλευρά α, ii) η προβολή της διαμέσου μ_α στη ΒΓ.

2. Να αποδείξετε ότι σε κάθε τρίγωνο ισχύει $\mu_\alpha^2 + \beta\gamma > \frac{\alpha^2}{4}$.

3. Δίνεται κύκλος (O,R), μια διάμετρός του ΑΒ και έστω Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ και ΟΒ αντίστοιχα.
Αν $ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 5$, όπου Μ τυχαίο σημείο του κύκλου, να υπολογισθεί η ακτίνα R.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και έστω Θ το βαρύκεντρό του.
Να αποδείξετε ότι:

i) $\mu_\alpha^2 + \mu_\beta^2 + \mu_\gamma^2 = \frac{3}{4}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$,

ii) $ΘΑ^2 + ΘΒ^2 + ΘΓ^2 = \frac{1}{3}\left(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2\right)$.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 60°$,

β = 5, γ = 3. Να υπολογισθεί η διάμεσός του μ_α.

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) και τυχαίο σημείο Δ της ΑΒ. Να αποδείξετε ότι

$$\Delta\Gamma^2 - \Delta B^2 = \frac{B\Gamma^2 \cdot A\Delta}{AB}.$$

3. i) Αν ΑΒΓΔ ορθογώνιο και Μ τυχαίο σημείο να αποδείξετε ότι
$MA^2 + M\Gamma^2 = MB^2 + M\Delta^2$.

ii) Αν ΑΒΓΔ τετράγωνο και σημείο Μ στο εσωτερικό του, ώστε ΜΑ = 1, $MB = \sqrt{2}$ και $M\Gamma = \sqrt{3}$, να βρεθεί η πλευρά του τετραγώνου.

4. Αν Μ, Ν είναι μέσα των διαγωνίων ΑΓ, ΒΔ ενός τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι
$AB^2+B\Gamma^2+\Gamma\Delta^2+\Delta A^2 = A\Gamma^2+B\Delta^2+4MN^2$
(Θεώρημα Euler).

5. Στην υποτείνουσα ΒΓ ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ θεωρούμε τα ση-

μεία Δ και Ε τέτοια, ώστε ΒΔ = ΔΕ = ΕΓ.

Να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 + ΑΕ^2 = \frac{5}{9}ΒΓ^2$

6. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει $β^2 + γ^2 = 2αμ_α$ να υπολογισθεί η γωνία $\hat{Α}$.

Σύνθετα Θέματα

1. Δύο αδέλφια κληρονόμησαν αγροτεμάχιο σχήματος τραπεζίου και αποφάσισαν να το μοιράσουν ανοίγοντας δρόμο που θα ενώνει τα μέσα των παράλληλων πλευρών του. Αν οι βάσεις είναι 8km και 6km, ενώ οι μη παράλληλες πλευρές 5km και 7km, πόσο θα στοιχίσει η διάνοιξη του δρόμου, αν 1 χιλιόμετρο δρόμου κοστίζει 50.000 δρχ;

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, με ΑΓ > ΑΒ και Μ, Ν τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Αν Ο το μέσο

του ΜΝ, να αποδείξετε ότι:

$$ΟΓ^2 - ΟΒ^2 = \frac{ΑΓ^2 - ΑΒ^2}{2}$$

3. Σε ημικύκλιο διαμέτρου ΑΒ = 2α θεωρούμε τυχαίο σημείο Μ. Χωρίζουμε τη διάμετρο ΑΒ σε τρία ίσα τμήματα ΑΓ=ΓΔ=ΔΒ. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα

$$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2$$

είναι σταθερό.

4. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, Ο το κέντρο του και κύκλος (Ο,λα), λ > 0. Αν για τυχαίο σημείο Μ του κύκλου ισχύει

$$ΜΑ^2 + ΜΒ^2 + ΜΓ^2 + ΜΔ^2 = 18α^2,$$

να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός λ.

5. Δίνεται ρόμβος ΑΒΓΔ πλευράς α, με διαγώνιο ΒΔ = α. Έστω τυχαίο σημείο Ρ. Να αποδείξετε ότι

$$α^2 = \left(ΡΑ^2 - ΡΒ^2\right) + \left(ΡΓ^2 - ΡΔ^2\right)$$

9.7 Τέμνουσες κύκλου

Ας θεωρήσουμε έναν κύκλο (O,R) και ένα εξωτερικό ή εσωτερικό σημείο του P. Από το P φέρουμε δύο τυχαίες ευθείες που τέμνουν τον κύκλο στα σημεία A, B και Γ, Δ αντίστοιχα. Το ακόλουθο θεώρημα εκφράζει ότι $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$.

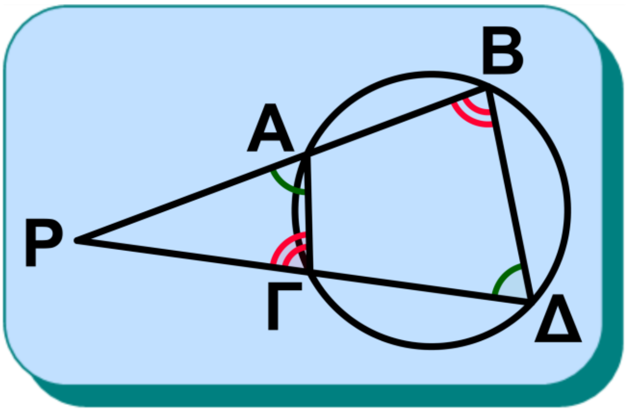
Θεώρημα I

Αν δύο χορδές AB, ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο P, τότε ισχύει

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$

Απόδειξη

Τα τρίγωνα PAΓ και PBΔ είναι όμοια, αφού $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ και $P\hat{\Gamma}A = P\hat{B}\Delta$ (Στο σχ.17α έχουμε

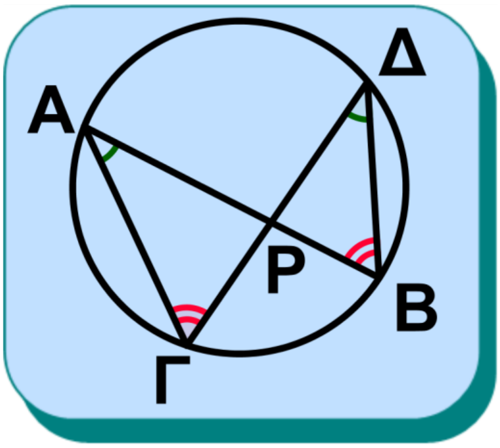


Σχήμα 17α

ότι $P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ γιατί το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο και η $P\hat{A}\Gamma$ είναι εξωτερική του γωνία.

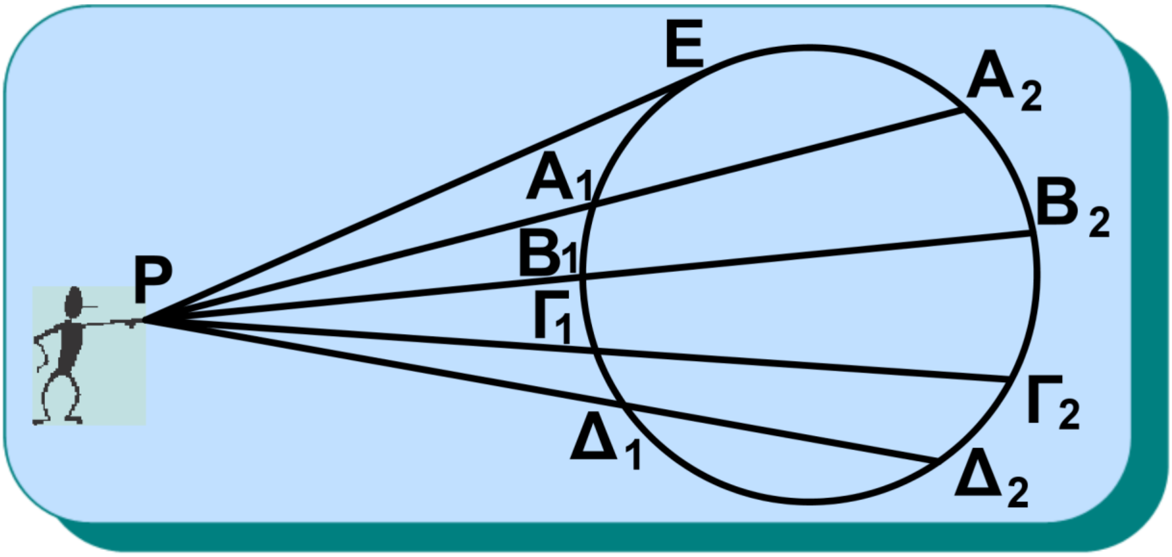
Στο σχ. 17β

$P\hat{A}\Gamma = P\hat{\Delta}B$ ως εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο). Επομένως, ισχύει ότι



Σχήμα 17β

$$\frac{PA}{P\Delta} = \frac{P\Gamma}{PB} \text{ ή . } PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$$



Σχήμα 18

Παρατηρούμε λοιπόν ότι τα γινόμενα των τμημάτων που ορίζουν οι

τέμνουσες ενός κύκλου $PA_1 \cdot PA_2$, $PB_1 \cdot PB_2$, $P\Gamma_1 \cdot P\Gamma_2$, ... παραμένουν σταθερά. Το γεγονός αυτό μας οδηγεί στο συμπέρασμα ότι τα γινόμενα αυτά εξαρτώνται μόνο από τις θέσεις του σημείου P και του κύκλου (O,R).

Στην ειδική περίπτωση της εφαπτομένης, όπου τα δύο σημεία τομής ταυτίζονται, το θεώρημα ισχύει.

Θεώρημα II

Αν από ένα εξωτερικό σημείο P κύκλου (O,R) φέρουμε το εφαπτόμενο τμήμα PE και μία ευθεία που τέμνει τον κύκλο στα σημεία A, B, τότε ισχύει ότι

$$PE^2 = PA \cdot PB$$

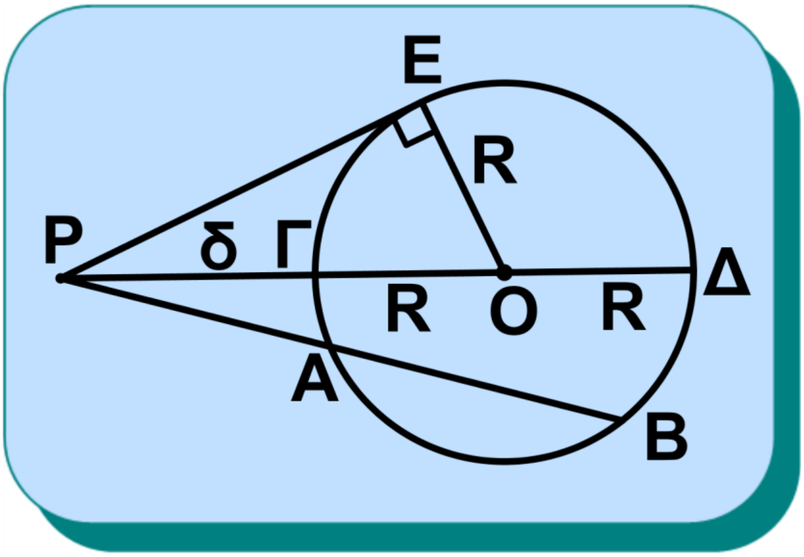
Απόδειξη

Φέρουμε την ευθεία PO η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Γ και Δ.

Θέτουμε ΟΡ = δ, οπότε από το θεώρημα Ι έχουμε ότι:

$$PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta =$$
$$= (\delta - R) \cdot (\delta + R) = \delta^2 - R^2.$$

Σχήμα 19



Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στο τρίγωνο ΡΟΕ προκύπτει ότι

$$PE^2 = PO^2 - OE^2 = \delta^2 - R^2$$

Άρα $PE^2 = PA \cdot PB$.

Στην προηγούμενη απόδειξη είδαμε ότι αν μια ευθεία διέρχεται από ένα εξωτερικό σημείο Ρ κύκλου (O,R) και τέμνει τον κύκλο σε σημεία Α, Β τότε $PA \cdot PB = \delta^2 - R^2$ **Όμοια αποδεικνύεται ότι** $PA \cdot PB = R^2 - \delta^2$ **αν το**

P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου.

Η διαφορά $\delta^2 - R^2$ λέγεται δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) και συμβολίζεται

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = \delta^2 - R^2 = OP^2 - R^2.$$

Ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου ή όταν ανήκει σε αυτόν. Τότε η δύναμη του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R) είναι αρνητική ή ίση με το μηδέν αντίστοιχα.

Από τον ορισμό της δύναμης σημείου ως προς κύκλο καταλαβαίνουμε ότι ουσιαστικά εκφράζει τη σχετική θέση του σημείου P ως προς τον κύκλο (O,R), καθώς εξαρτάται μόνο από το δ, δηλαδή την απόσταση του P από το κέντρο του κύκλου. Επομένως, έχουμε ότι:

- το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν

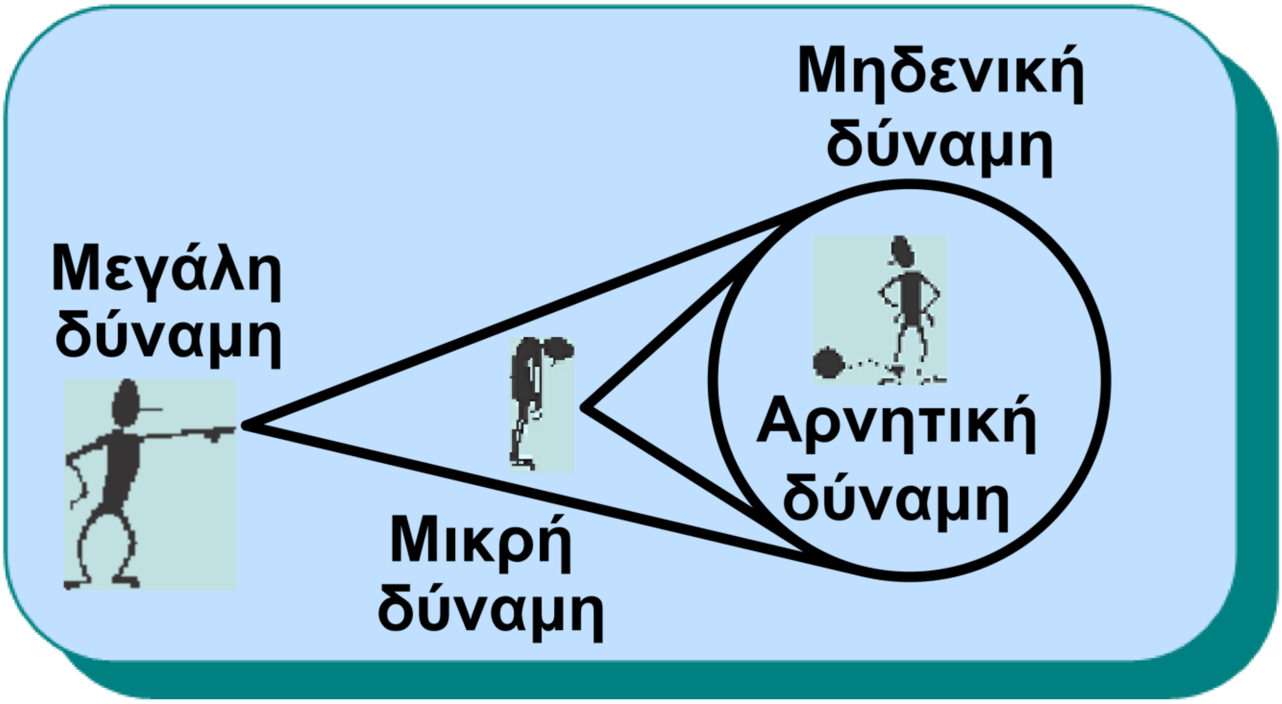
$$\Delta^{P}_{(O,R)} > 0$$

- το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν

$$\Delta^{P}_{(O,R)} < 0$$

- το P είναι σημείο του κύκλου (O,R) αν και μόνο αν

$$\Delta^{P}_{(O,R)} = 0$$



Σχήμα 20

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Αν δύο τμήματα ΑΒ και ΓΔ ή οι προεκτάσεις τους τέμνονται σε ένα σημείο Ρ έτσι ώστε $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$, τότε το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Β, Γ, Δ είναι εγγράψιμο.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε το σημείο τομής Ρ των τμημάτων ΑΒ, ΓΔ ή των προεκτάσεών τους (σχ.17). Η δοσμένη σχέση $ΡΑ \cdot ΡΒ = ΡΓ \cdot ΡΔ$ γράφεται $\frac{ΡΑ}{ΡΓ} = \frac{ΡΔ}{ΡΒ}$ και αφού $Α\hat{Ρ}Γ = Β\hat{Ρ}Δ$, τα τρίγωνα ΑΡΓκαι ΒΡΔ θα είναι όμοια.

Επομένως $Ρ\hat{Β}Δ = Ρ\hat{Γ}Α$, οπότε το τετράπλευρο είναι εγγράψιμο.

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Η εφαρμογή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος Ι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Ας θεωρήσουμε ευθεία ε και τρία σημεία της P, A, B, με το A μεταξύ των P και B. Έστω σημείο Ε εκτός της ευθείας ε τέτοιο, ώστε $PE^2 = PA \cdot PB$. Τότε το τμήμα PE είναι εφαπτόμενο στον κύκλο, που ορίζουν τα σημεία A, B, E.

Απόδειξη

Έστω (O,R) ο κύκλος που διέρχεται από τα σημεία A, B, E (σχ.19). Τότε $PE^2 = PA \cdot PB = OP^2 - R^2 = OP^2 - OE^2$ ή $PE^2 + OE^2 = OP^2$, οπότε το τρίγωνο OEP είναι ορθογώνιο και η PE εφάπτεται στον κύκλο (O,R).

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

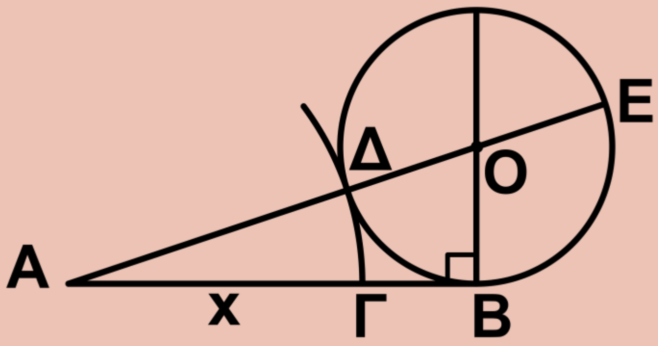
Η εφαρμογή αυτή εκφράζει το αντίστροφο του θεωρήματος ΙΙ.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η Διαίρεση τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο (Χρυσή Τομή)

Να διαιρεθεί ένα τμήμα ΑΒ, σε δύο άνισα τμήματα ΑΓ, ΓΒ ώστε το μεγαλύτερο από αυτά να είναι μέσο ανάλογο του μικρότερου και του αρχικού ευθύγραμμου τμήματος.

Απόδειξη

Έστω ΑΒ = α και ΑΓ = x το μεγαλύτερο από τα τμήματα στα οποία



Σχήμα 21

χωρίζεται το ΑΒ από το Γ (σχ.21). Τότε ΓΒ = α . x και θα πρέπει να ισχύει η σχέση: $ΑΓ^2 = ΑΓ \cdot ΓΒ$ ή $x^2 = α(α - x)$ (1).

Η σχέση (1) γράφεται $x^2 + αx - α^2 = 0$ ή $x(x+α) = α^2$ (2).

Έτσι, για να κατασκευάσουμε το x γράφουμε κύκλο $\left(Ο, \frac{α}{2}\right)$ που εφάπτεται στο ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ στο σημείο Β και φέρουμε την ΑΟ, η οποία τέμνει τον κύκλο στα σημεία Δ, Ε. Τότε ισχύει ότι

$$AB^2 = A\Delta \cdot AE = A\Delta(A\Delta + AE) =$$

$$= A\Delta(A\Delta + AB) \text{ ή } \alpha^2 = A\Delta(A\Delta + \alpha)$$

οπότε το ΑΔ έχει το ζητούμενο μήκος και το Γ είναι η τομή του κύκλου (Α, ΑΔ) και του τμήματος ΑΒ.

ΣΧΟΛΙΟ

Το πρόβλημα της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο είναι γνωστό σήμερα και ως πρόβλημα της **Χρυσής Τομής**. Με το πρόβλημα αυτό επιλύεται γεωμετρικά η εξίσωση $x^2 = \alpha(\alpha - x)$ ή $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$.

Η θετική ρίζα της εξίσωσης $x^2 + \alpha x - \alpha^2 = 0$ είναι $x = \dfrac{\alpha(\sqrt{5} - 1)}{2}$,

από όπου προκύπτει ότι $\frac{\alpha}{x} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\alpha}{\alpha - x}$ που είναι η αναλογία της «χρυσής τομής».

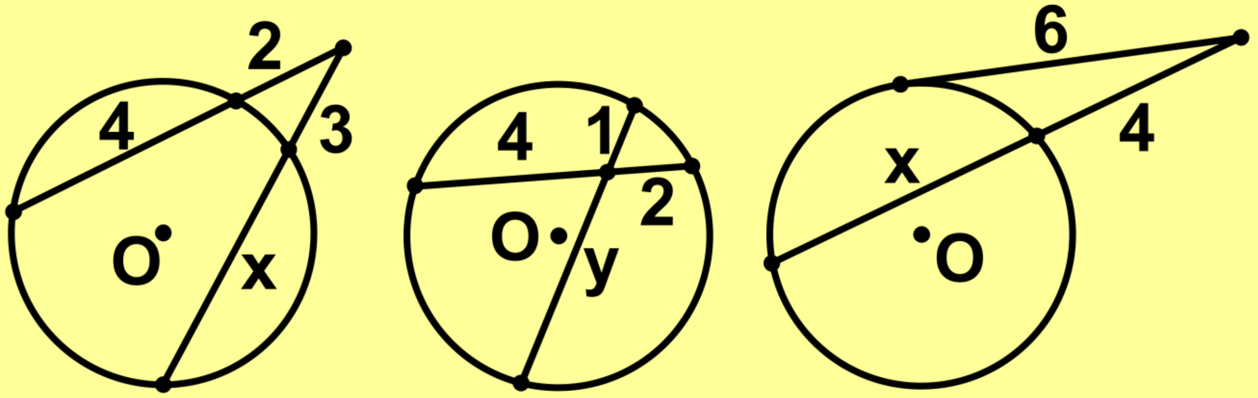
Ο παραπάνω λόγος συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα φ, δηλαδή $\varphi = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

Ο συμβολισμός προέρχεται από το όνομα του γλύπτη της κλασικής αρχαιότητας Φειδία ο οποίος κατασκεύασε τον Παρθενώνα. Οι αρχαίοι Έλληνες φιλόσοφοι διαπίστωσαν ότι όπου εμφανίζεται ο λόγος φ (αρχιτεκτονική, γλυπτική κτλ.), δημιουργεί την αίσθηση της αρμονίας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

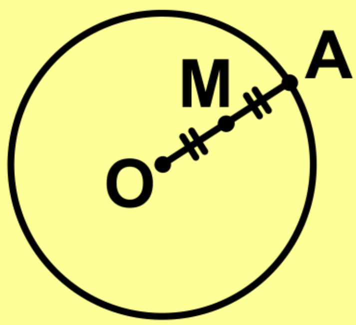
Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να προσδιορισθούν οι τιμές των x, y, στα παρακάτω σχήματα:



2. Ποια η δύναμη σημείου P ως προς κύκλο (O,R) όταν $P \equiv O$;

3. Αν στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta^{M}_{(O,R)} = -3$, να υπολογίσετε την ακτίνα R του κύκλου.



Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δίνεται κύκλος (K,6) και σημείο A, ώστε AK=14cm. Αν από το σημείο A φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ που τέμνει τον κύκλο κατά χορδή ΒΓ=6cm, να υπολογίσετε το AB.

2. **Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ο κύκλος, που διέρχεται από το Α και τα μέσα Μ, Ν των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, εφάπτεται της ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$.**

3. **Θεωρούμε κύκλο (Ο,R) και τις χορδές του ΑΒ, ΓΔ που τέμνονται στο Ρ. Αν ισχύει ότι $\frac{ΡΑ}{ΡΒ} = \frac{ΡΔ}{ΡΓ}$ να αποδείξετε ότι οι χορδές ΑΒ, ΓΔ είναι ίσες.**

4. **Να αποδείξετε ότι η προέκταση της κοινής χορδής δύο τεμνόμενων κύκλων διχοτομεί κάθε κοινό εξωτερικό εφαπτόμενο τμήμα τους.**

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. **Τετράγωνο ΑΒΓΔ πλευράς α είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (Ο,R). Αν Ε είναι το μέσο της ΑΔ και η ΒΕ προεκτεινόμενη τέμνει τον κύκλο στο Ζ, να αποδείξετε ότι:**

i) $BE = \frac{\alpha\sqrt{5}}{2}$, ii) $BE = 5EZ$

2. Από σημείο Α εκτός κύκλου (Ο,R) φέρουμε τέμνουσα ΑΒΓ και εφαπτόμενο τμήμα ΑΔ. Αν η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ τέμνει τις ΒΔ, ΓΔ στα Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $EB \cdot Z\Gamma = E\Delta \cdot Z\Delta$.

3. Αν η διάμεσος ΑΜ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγγεγραμμένο κύκλο στο Ε ,να αποδείξετε ότι:

i) $AM \cdot ME = \frac{B\Gamma^2}{4}$,

ii) $AB^2 + A\Gamma^2 = 2AM \cdot AE$

4. Δίνεται κύκλος (Ο,R) και ευθεία ε που δεν τέμνει τον κύκλο. Από σημείο Μ της ε φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα ΜΑ, ΜΒ και $O\Gamma \perp \varepsilon$. Αν η ΑΒ τέμνει την ΟΓ στο Ν, να αποδείξετε ότι $ON \cdot O\Gamma = R^2$.

5. **Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A} = 1 \llcorner$), εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,R) και το ύψος του ΑΔ. Αν μεταβλητή ευθεία που διέρχεται από το Γ τέμνει το ύψος στο Μ και τον κύκλο στο Η, να αποδείξετε ότι $ΓΜ \cdot ΓΗ = ΓΑ^2$**

Σύνθετα Θέματα

1. **Αν η διχοτόμος ΑΔ τριγώνου ΑΒΓ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Ε και είναι $ΑΔ^2 = ΔΒ \cdot ΔΓ$, να αποδείξετε ότι $ΑΕ^2 = 2ΕΓ^2$.**

2. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $β^2 + γ^2 = 2α^2$. Αν η διάμεσος ΑΜ τέμνει τον περιγεγραμμένο κύκλο στο Δ να αποδείξετε ότι $ΜΔ = \frac{α\sqrt{3}}{6}$.**

3. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ είναι $μ_γ = \frac{\sqrt{3}}{2}β$. Αν Μ το βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι ο περιγε-**

γραμμένος κύκλος του τριγώνου ΑΒΜ εφάπτεται της ΒΓ στο Β.

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ, η διχοτόμος του ΑΔ, η διάμεσός του ΑΜ και ο περιγεγραμμένος κύκλος (Κ) του τριγώνου ΑΔΜ. Αν Ε, Ζ είναι τα σημεία τομής των ΑΒ και ΑΓ με τον κύκλο (Κ) αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι ΒΕ = ΓΖ.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Έστω ΑΒ, ΓΔ δύο ευθύγραμμα τμήματα. Ικανή και αναγκαία συνθήκη, ώστε ΑΒ⊥ΓΔ είναι να ισχύει ότι $ΑΓ^2 - ΑΔ^2 = ΒΓ^2 - ΒΔ^2$

2. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Αν ΑΔ είναι η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$, να αποδείξετε ότι $ΑΒ \cdot ΑΓ = ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ$

3. Αν Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ οξυγώνιου τριγώνου ΑΒΓ και ΒΔ το ύψος του, να αποδείξετε ότι $ΑΜ^2 = ΒΜ^2 + ΑΔ \cdot ΑΓ$

4. Θεώρημα Stewart
i) Έστω Δ σημείο της πλευράς ΒΓ, τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι $ΒΔ \cdot ΑΓ^2 + ΔΓ \cdot ΑΒ^2 = ΒΓ\left(ΑΔ^2 + ΒΔ \cdot ΔΓ\right)$
ii) Να διατυπώσετε το θεώρημα Stewart όταν το ΑΒΓ είναι ισοσκελές (ΑΒ = ΑΓ).
5. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $μ_β \perp μ_γ$. Να αποδείξετε ότι:
i) $β^2 + γ^2 = 5α^2$,
ii) αν ΑΔ ύψος και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ, τότε $ΑΗ \cdot ΑΔ = 2α^2$.
6. Σε οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τη διάμεσο ΑΜ. Αν Δ η προβολή του Μ πάνω στην ΑΒ να αποδείξετε ότι $ΒΓ^2 = 3ΑΒ^2 + ΑΓ^2 - 4ΑΒ \cdot ΑΔ$
7. Δίνεται κύκλος (Ο,R) μια ακτίνα ΟΑ και χορδή ΒΓ παράλληλη προς

την ΟΑ. Να αποδείξετε ότι το ά-θροισμα $AB^2 + AΓ^2$ είναι σταθερό.

8. Δίνεται κύκλος (Ο,R), μία διάμετρος ΑΒ και Γ, Δ τα μέσα των ΟΑ, ΟΒ αντίστοιχα. Αν μία χορδή ΕΗ που διέρχεται από το Γ είναι $EH = \frac{\sqrt{13}}{2}R$, να αποδείξετε ότι $E\hat{Δ}H = 1^∟$.

Δραστηριότητες

1. Δίνεται ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1∟) με ίσες πλευρές α. Στο ημιεπίπεδο ακμής ΒΓ που δεν περιέχει το Α θεωρούμε το ορθογώνιο ΒΓΔΕ με ΒΕ = α. Έ-στω Ζ, Η οι προβολές των Β, Δ α-ντίστοιχα στην ΕΓ. Προσπαθήστε να ανακαλύψετε εποπτικά τη σχέση των τμημάτων ΓΗ, ΗΖ και ΖΕ και στη συνέχεια να αποδείξετε τον ι-σχυρισμό σας.

2. Με κατάλληλη γεωμετρική κατασκευή προσδιορίστε την .ακριβή. θέση των αριθμών $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{5}$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών.

Εργασία (Ριζικός άξονας δύο κύκλων)

Να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που έχουν την ίδια δύναμη ως προς δύο κύκλους (Κ, R) και (Λ, ρ) όταν:

i) Οι κύκλοι τέμνονται (Υπόδειξη: φέρτε την κοινή χορδή τους),

ii) Οι κύκλοι εφάπτονται (Υπόδειξη: φέρτε την κοινή εφαπτομένη),

iii) Οι κύκλοι είναι ο ένας εξωτερικός του άλλου (Υπόδειξη: χρησιμοποιήστε το πρόβλημα 2 της §9.6).

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο

Η προέλευση του προβλήματος της διαίρεσης ενός ευθύγραμμου τμήματος σε δύο μέρη, έτσι, ώστε το μεγαλύτερο τμήμα του να είναι μέση ανάλογος ανάμεσα σε ολόκληρο το τμήμα και το μικρότερο τμήμα του, δηλαδή $\alpha : x = x : (\alpha - x)$, δεν είναι ιστορικά εξακριβωμένη. Ορισμένοι ιστορικοί ανάγουν την προέλευσή του στην Πυθαγόρεια σχολή, συνδέοντάς το με την μελέτη της τετραγωνικής εξίσωσης $x^2+\alpha x=\alpha^2$, όπως εμφανίζεται σε γεωμετρική γλώσσα στο Βιβλίο ΙΙ των «Στοιχείων» του Ευκλείδη ή με την ανακάλυψη της ασυμμετρίας στην αρχαία Ελλάδα, και άλλοι με την κατασκευή του πενταγώνου από το Θεαίτητο περί το

386 π.Χ.

Στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη το πρόβλημα αυτό εμφανίζεται στα εξής Βιβλία:

1. στο Βιβλίο II (Προτάσεις 5, 6 και 11), που συνδέεται με την «παραβολή χωρίων» και κατά συνέπεια με την εξίσωση $x^2 + \alpha x = \alpha^2$,

2. στο Βιβλίο IV (Προτάσεις 10-11), κατά την κατασκευή του κανονικού πενταγώνου,

3. στο Βιβλίο VI (Ορισμός 3 και Προτάσεις 29-30), όπου ο Ευκλείδης χρησιμοποιεί έννοιες από τη γενική θεωρία των αναλογιών του Ευδόξου που εκτίθεται στο Βιβλίο V (βλ. Μέτρηση).

4. στο Βιβλίο XIII (Προτάσεις 16 και 17), κατά την κατασκευή του κανονικού εικοσαέδρου και δωδεκαέ -

δρου, στην οποία ενέχεται το πεντάγωνο.

Μετά τον Ευκλείδη το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο εμφανίζεται στο αποκαλούμενο «Συμπλήρωμα» ή Βιβλίο XIV των «Στοιχείων», που αποδίδεται στον Υψικλή (2ος αι. π.Χ.). Στο έργο του Ήρωνα εμφανίζεται σε σχέση με τον προσδιορισμό της επιφάνειας του πενταγώνου και του δεκαγώνου, και στη «Συναγωγή» του Πάππου στην κατασκευή του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου, καθώς και στα θεωρήματα σύγκρισης των όγκων τους.

Στην Αραβική παράδοση δεν υπάρχουν ενδείξεις εισαγωγής της έννοιας της διαίρεσης ενός τμήματος σε μέσο και άκρο λόγο, αν και στο έργο του αλ-Χουαρίζμι

(περίπου 780-850), του Αμπού Καμίλ (περίπου 850-930), του Αμπούλ-Ουάφα (940-997/8) κ.ά. εξετάζονται συναφή προβλήματα.
Στην Ευρωπαϊκή παράδοση οι απαρχές της μελέτης των ιδιοτήτων της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο ανάγονται στον Λεονάρδο της Πίζας ή Φιμπονάτσι (περίπου 1180-1250), που εξετάζει μετρικά προβλήματα του πενταγώνου και του δεκαγώνου, καθώς και προβλήματα προσδιορισμού του όγκου του εικοσαέδρου και του δωδεκαέδρου. Ο Φιμπονάτσι είναι περισσότερο γνωστός από το «πρόβλημα των κουνελιών», που εκτίθεται στο «Βιβλίο του άβακα» (Liber abaci): «Πόσα ζεύγη κουνελιών μπορούν να γεννηθούν μέσα σε ένα χρόνο από ένα ζευγάρι κουνέλια; ... όταν η

φύση των κουνελιών είναι τέτοια που κάθε μήνα γεννούν ένα άλλο ζευγάρι και αρχίζουν την αναπαραγωγή το δεύτερο μήνα μετά τη γέννησή τους.»

Ο Φιμπονάτσι δείχνει ότι το πρόβλημα αυτό οδηγεί στη γένεση της ακολουθίας 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, . που ονομάστηκε ακολουθία (αριθμοί) του Φιμπονάτσι από τον Φ.Ε.Α. Λούκας (Frannois Edouard Anatole Lucas, 1848-1891) και σχηματίζεται σύμφωνα με τον κανόνα: .$u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ u_v = u_{v-1} + u_{v-2}$

Η σχέση της ακολουθίας αυτής με το πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο είναι ότι το όριο του λόγου του επόμενου προς τον προηγούμενο όρο της ακολουθίας ισούται με την τιμή του μέσου και άκρου λόγου, δηλαδή με τη ρίζα της εξίσωσης $x^2 + αx = α^2$, και είναι άρρητος αριθμός. Δεν υπάρχουν ενδείξεις ότι ο Φιμπονάτσι γνώριζε τη σχέση αυτή, η οποία απαντάται αργότερα σε μαθηματικούς του 16ου-17ου αι. (Κέπλερ, Ζιράρ, Σίμπσον). Η γενική μορφή του ν-οστού όρου της ακολουθίας Φιμπονάτσι

$$u_ν = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{ν+1}\right]$$

δημοσιεύτηκε το 1843 από τον Ζ. Μπινέ. Το 13ο αι. ο μεταφραστής και σχολιαστής του Ευκλείδη Καμπανός της Νοβάρα προσθέτει στο Βιβλίο XIII των «Στοιχείων» (1482) μία πρόταση που περιέχει μια αριθμητική απόδειξη της ασυμμετρίας ενός ευθύγραμμου τμήματος και των δύο μερών του που λαμβάνο-

νται από τη διαίρεσή του σε μέσο και άκρο λόγο.
Το 15ο-16ο αι. αναζωογονείται το ενδιαφέρον προς τη διαίρεση σε μέσο και άκρο λόγο σε σχέση με τις εφαρμογές της στην Γεωμετρία και την αρχιτεκτονική. Στο πλαίσιο αυτό εισάγεται ο όρος «χρυσή τομή» από τον Λεονάρντο ντα Βίντσι. Το 1509 εκδίδεται «Η θεϊκή αναλογία» (Divina proportione) του Λουκά Πατσόλι (L. Pacioli, 1445-περ. 1514), που αν και είναι ειδικά αφιερωμένη στο πρόβλημα της διαίρεσης σε μέσο και άκρο λόγο, η μαθηματική διαπραγμάτευση του θέματος είναι μάλλον αδύνατη.

207

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Μετρικές σχέσεις στο τρίγωνο

Πυθαγόρειο θεώρημα

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \hat{A}=1^{\llcorner}$

Γενίκευση Πυθαγορείου

$\hat{A}<1^{\llcorner} \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\cdot A\Delta$

$\hat{A}>1^{\llcorner} \Leftrightarrow \alpha^2=\beta^2+\gamma^2+2\beta\cdot A\Delta$

Προσδιορισμός του είδους τριγώνου ως προς τις γωνίες

Νόμος συνημιτόνων

$\alpha^2=\beta^2+\gamma^2-2\beta\gamma\cdot \sigma\upsilon\nu A$

Υπολογισμός των υψών

$$\upsilon_\alpha=\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

Θεώρημα διαμέσων

1^o $\beta^2+\gamma^2=2\mu_\alpha^2+\frac{\alpha^2}{2}$

2^o $\beta^2-\gamma^2=2\alpha\cdot M\Delta$

Υπολογισμός των διαμέσων τριγώνων

Μετρικές σχέσεις σε κύκλο

► Θεώρημα τεμνουσών: $PA \cdot PB = P\Gamma \cdot P\Delta$

► Ειδική περίπτωση εφαπτομένης: $PE^2 = PA \cdot PB$

► Δύναμη σημείου ως προς κύκλο: $\Delta^{P}_{(O,P)} = OP^2 - R^2$

● Το P είναι εξωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,P)} > 0$.

● Το P είναι εσωτερικό σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,P)} < 0$.

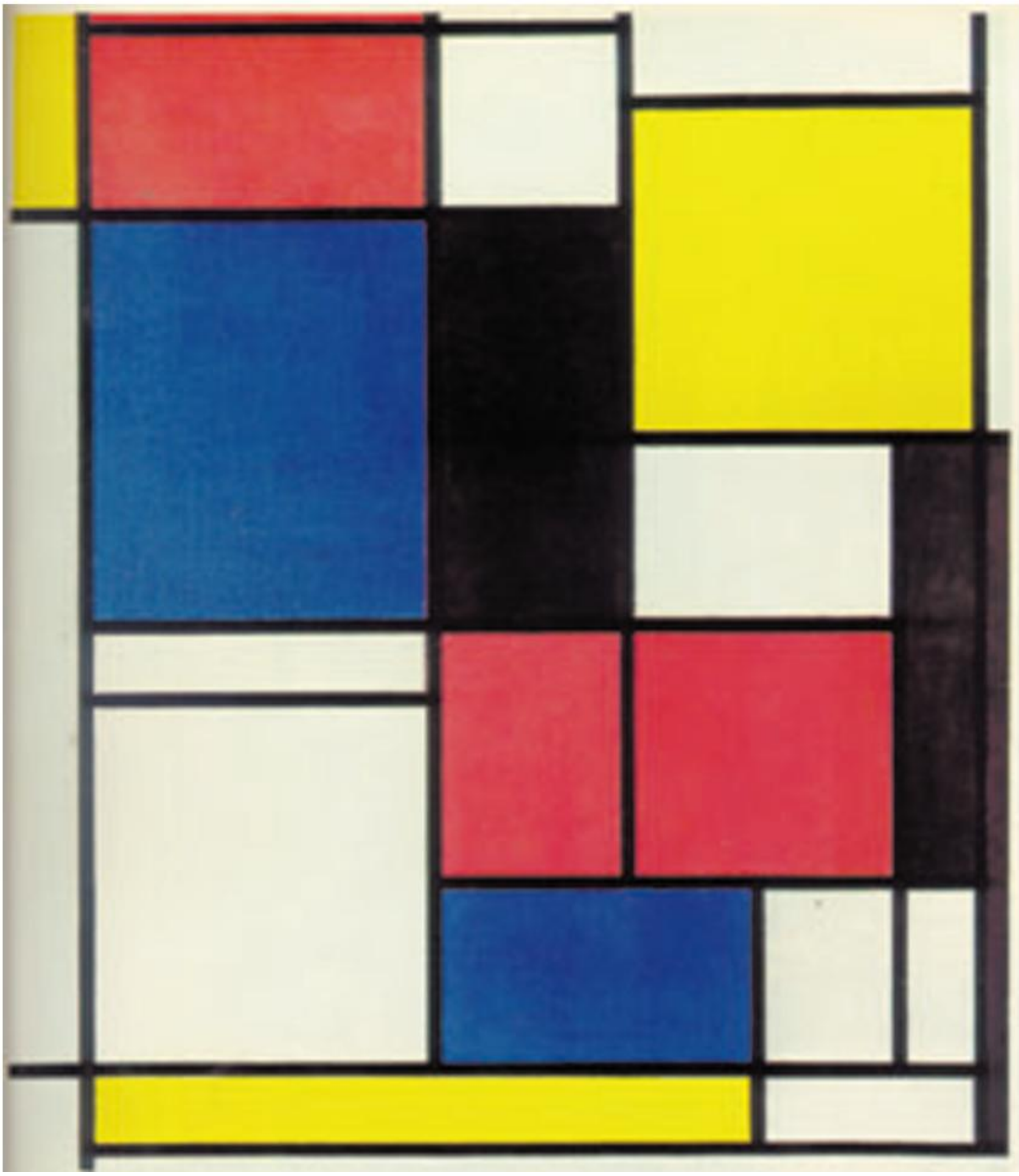
● Το P είναι σημείο του κύκλου (O,R), αν και μόνο αν $\Delta^{P}_{(O,P)} = 0$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Εμβαδά

Είναι αποδεκτό ότι η έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος προέκυψε από την ανάγκη αντιμετώπισης προβλημάτων της καθημερινής ζωής, αρκετά χρόνια πριν. Πράγματι είναι ιστορικά επιβεβαιωμένο ότι η Γεωμετρία εμφανίστηκε, τουλάχιστον τρεις χιλιετίες π.Χ., ως τέχνη υπολογισμού μηκών, εμβαδών και όγκων στους λαούς που κατοικούσαν κοντά στους ποταμούς Νείλο, Τίγρη και Ευφράτη. Στην Αίγυπτο μάλιστα ήταν τέχνη για μέτρηση γης. Αργότερα η έννοια του εμβαδού θεμελιώθηκε αυστηρά και γενικεύθηκε σε σύνολα πιο πο-

λύπλοκα από τα ευθύγραμμα σχήματα.
Στο κεφάλαιο αυτό ασχολούμαστε με την έννοια του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος. Αρχικά εισάγουμε την έννοια του εμβαδού ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας. Κατόπιν, δίνουμε τύπους υπολογισμού του εμβαδού του τετραγώνου, του ορθογωνίου, του παραλληλογράμμου, του τριγώνου και του τραπεζίου. Στη συνέχεια, δίνουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων ευθύγραμμων σχημάτων και τέλος αντιμετωπίζουμε το πρόβλημα του τετραγωνισμού ενός πολυγώνου.

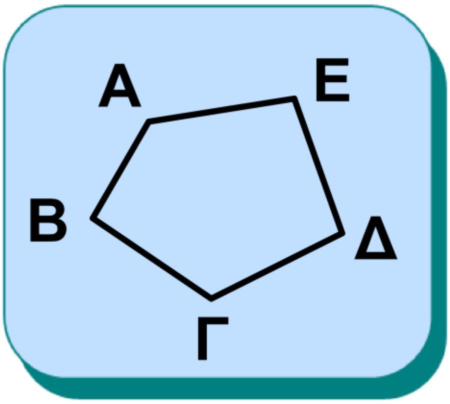


Piet Mondrian (Ολλανδός, 1872 - 1944), Πίνακας ΙΙ, λάδι σε καμβά, 1921 - 1925
Συλλογή Max Bill, Ζυρίχη.

Πολυγωνικά χωρία . Πολυγωνικές επιφάνειες

10.1 Πολυγωνικά χωρία

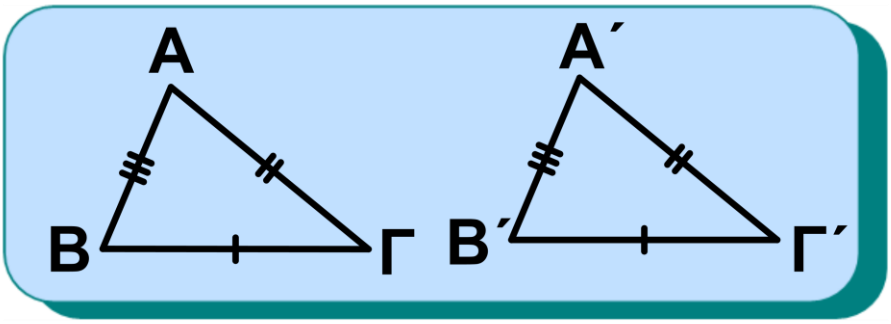
Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, για παράδειγμα ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 1). Το πολύγωνο μαζί με τα εσωτερικά του σημεία αποτελούν ένα χωρίο, που λέγεται **πολυγωνικό χωρίο** που ορίζεται από το ΑΒΓΔΕ.



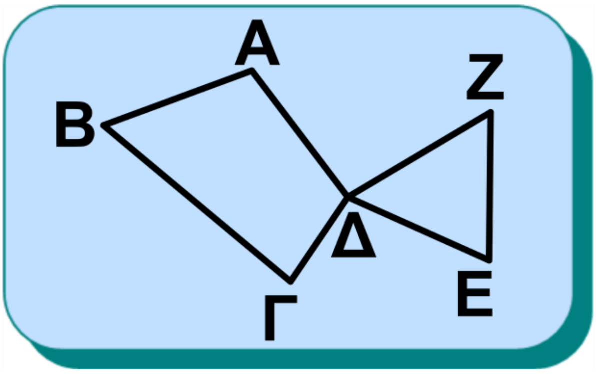
Σχήμα 1

Ένα πολυγωνικό χωρίο που ορίζεται από τρίγωνο, τετράπλευρο, ... , ν-γωνο λέγεται αντίστοιχα **τριγωνικό**, **τετραπλευρικό**, ... , **ν-γωνικό**.

Σχήμα 2



Επίσης, δύο πολυγωνικά χωρία λέγονται ίσα όταν τα αντίστοιχα πολύγωνα είναι ίσα (σχ.2).
Τέλος ένα σχήμα που αποτελείται από πεπερασμένο πλήθος πολυγωνικών χωρίων, που ανά δύο δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, λέγεται **πολυγωνική επιφάνεια**.
Για παράδειγμα, το σχήμα ΑΒΓΔΕΖ (σχ.3) είναι μια πολυγωνική επιφάνεια.

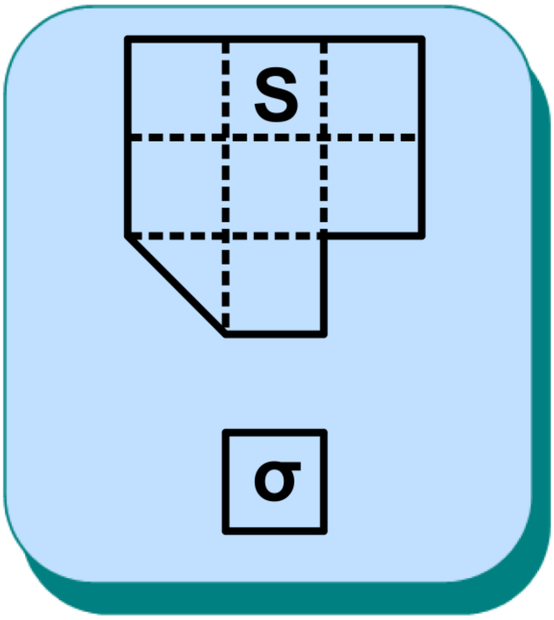


Σχήμα 3

10.2 Εμβαδόν ευθύγραμμου σχήματος Ισοδύναμα ευθύγραμμα σχήματα

Στο 7ο κεφάλαιο αναφερθήκαμε στη μέτρηση των ευθύγραμμων τμημάτων. Εδώ θα ασχοληθούμε με τη μέτρηση πολυγωνικών χωρίων και επιφανειών.

Έστω, λοιπόν ένα πολυγωνικό χωρίο S (σχ.4). Όπως και στα ευθύγραμμα τμήματα, μέτρηση του χωρίου S λέμε τη σύγκρισή του με ένα άλλο επίπεδο χωρίο σ, το οποίο



Σχήμα 4

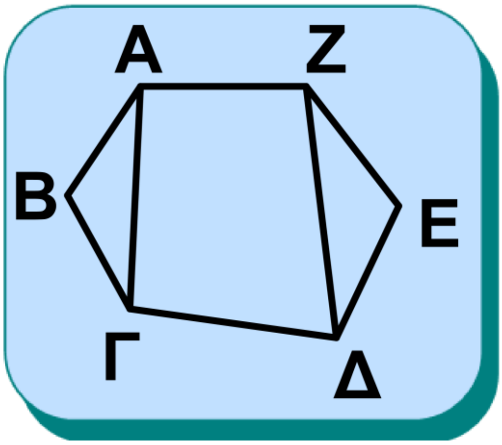
επιλέγουμε ως μονάδα. Η σύγκριση αυτή οδηγεί σε μια σχέση της μορφής: $S = \lambda \cdot \sigma$, όπου λ θετικός αριθμός. (Στην περίπτωση του σχ. 4 είναι λ = 7,5). Ο θετικός αριθμός λ λέγεται εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου S και συμβολίζεται με (S). Πολλές φορές το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου ή μιας πολυγωνικής επιφάνειας θα το συμβολίζουμε απλά με το γράμμα Ε. Επίσης, στα επόμενα, θα λέμε εμβαδόν τριγώνου, τετραπλεύρου και γενικά

πολυγώνου και θα εννοούμε το εμβαδόν του αντίστοιχου πολυγωνικού χωρίου.

Για το εμβαδόν δεχόμαστε ότι ισχύουν οι επόμενες ιδιότητες (αξιώματα):

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**

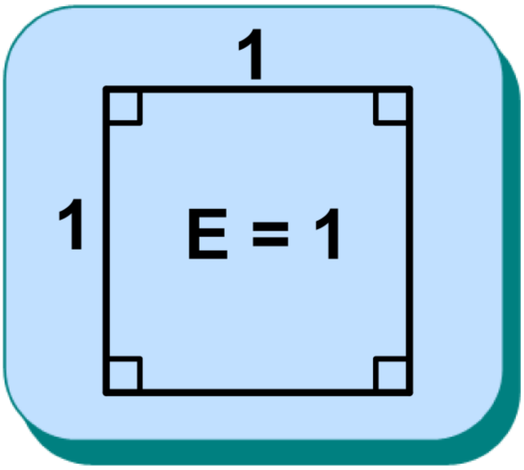
- **Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά**



Σχήμα 5

χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων. Για παράδειγμα, για το εμβαδόν του πολυγωνικού χωρίου ΑΒΓΔΕΖ του (σχ. 5) έχουμε:

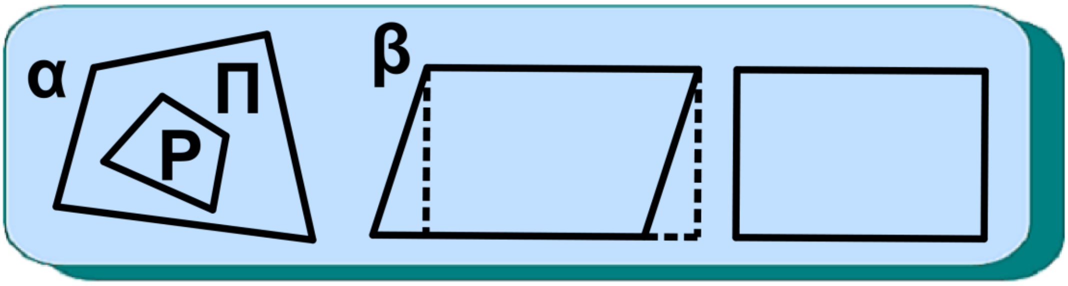
(ΑΒΓΔΕΖ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΖ) + (ΖΔΕ)
Επίσης δεχόμαστε ότι:



● Το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 1 είναι 1.

Από τα παραπάνω αξιώματα προκύπτει ότι:

• Αν ένα πολύγωνο Ρ περιέχεται στο εσωτερικό ενός άλλου πολυγώνου Π (σχ.6α), τότε το εμβαδόν του Ρ είναι μικρότερο του εμβαδού του Π.



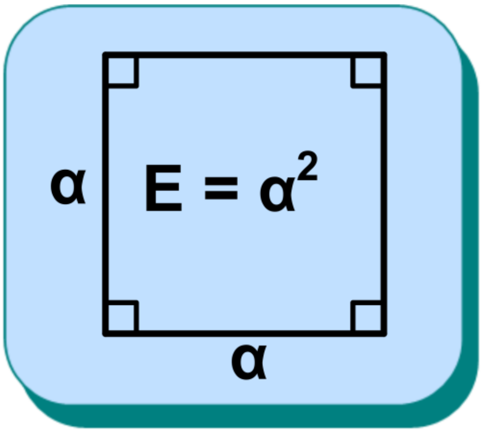
Σχήμα 6

Είδαμε παραπάνω ότι αν δύο πολυγωνικά χωρία είναι ίσα, τότε έ-

χουν ίσα εμβαδά. Το αντίστροφο είναι φανερό (σχ. 6β) ότι δεν ισχύει.
Δύο σχήματα που έχουν το ίδιο εμβαδόν λέγονται **ισοδύναμα** ή **ισεμβαδικά**.
Έτσι σχήματα που δεν είναι ίσα μπορούν να συγκρίνονται ως προς το εμβαδόν τους.
Με τη βοήθεια των παραπάνω ιδιοτήτων του εμβαδού μπορεί να αποδειχθεί το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα

Το εμβαδόν Ε ενός τετραγώνου πλευράς α είναι α^2, δηλαδή: $E = \alpha^2$.



10.3 Εμβαδόν βασικών ευθύγραμμων σχημάτων

Με βάση το εμβαδόν του τετραγώνου θα αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Ι

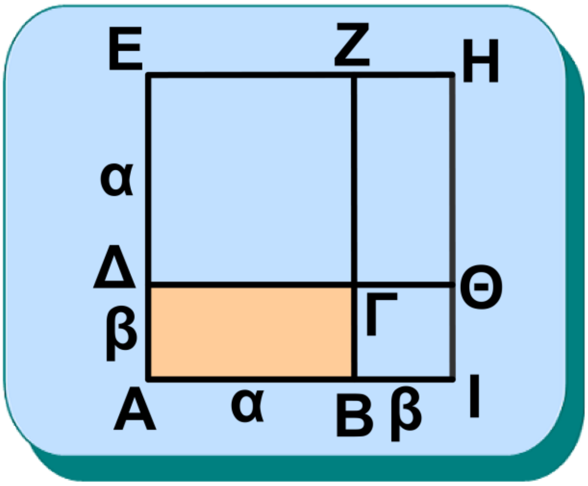
Το εμβαδόν ενός ορθογωνίου ισούται με το γινόμενο των πλευρών του.

Δηλαδή αν α, β, οι πλευρές και Ε το εμβαδόν είναι: $\mathbf{E = \alpha \cdot \beta}$

Απόδειξη

Έστω ένα ορθογώνιο ΑΒΓΔ, με ΑΒ = α και ΑΔ = β (σχ.7).

Προεκτείνουμε την πλευρά ΑΔ κατά τμήμα ΔΕ = α, την ΑΒ κατά ΒΙ = β και σχηματίζουμε το τετράγωνο ΑΙΗΕ,



Σχήμα 7

το οποίο είναι φανερό ότι έχει πλευρά α+β και επομένως είναι:

$$(\text{ΑΙΗΕ}) = (\alpha + \beta)^2 \ (1).$$

Προεκτείνοντας τις ΔΓ και ΒΓ σχηματίζονται τα τετράγωνα ΔΓΖΕ, ΒΙΘΓ με πλευρές α, β αντίστοιχα και το ορθογώνιο ΓΘΗΖ που είναι ίσο με το ΑΒΓΔ. Έτσι έχουμε (ΔΓΖΕ)=$α^2$, (ΒΙΘΓ) = $β^2$ και (ΓΘΗΖ) = (ΑΒΓΔ) (2)

Είναι φανερό όμως ότι (ΑΙΗΕ) = (ΑΒΓΔ) + (ΓΘΗΖ) + (ΒΙΘΓ) + (ΔΓΖΕ),

από την οποία με τη βοήθεια των (1) και (2) προκύπτει ότι:

$$(α + β)^2 = 2(ΑΒΓΔ) + α^2 + β^2.$$

Από αυτή μετά τις πράξεις καταλήγουμε στησχέση (ΑΒΓΔ) = $α \cdot β$.

Θεώρημα ΙΙ

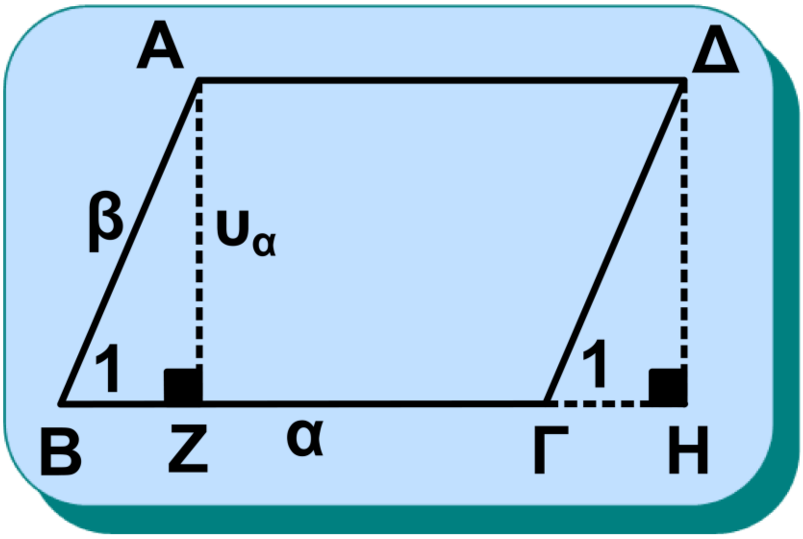
Το εμβαδόν Ε ενός παραλληλογράμμου ισούται με το γινόμενο μιας πλευράς του επί το ύψος που αντιστοιχεί σε αυτή.

Δηλαδή , $E = αυ_α = βυ_β$

όπου α, β οι πλευρές και $υ_α$, $υ_β$ τα αντίστοιχα ύψη.

Απόδειξη

Σχήμα 8



Ας θεωρήσουμε ένα παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (σχ.8) και ας φέρουμε το ύψος ΑΖ που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Θα αποδείξουμε ότι (ΑΒΓΔ)=ΒΓ · ΑΖ.

Από το Δ φέρουμε ΔΗ κάθετη στην προέκταση της ΒΓ. Τότε τα τρίγωνα ΖΒΑ και ΗΓΔ είναι ίσα ($\hat{Z} = \hat{H} = 90^o$, ΑΒ = ΔΓ και $\hat{B}_1 = \hat{Γ}_1$), οπότε:

$$(ΖΒΑ) = (ΗΓΔ) \ (1).$$

Από το σχήμα όμως έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΖ) + (ΑΖΓΔ),

οπότε σύμφωνα με την (1) προκύπτει ότι
(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΓΔ) + (ΔΓΗ) = (ΑΖΗΔ).
Επομένως σύμφωνα με το θεώρημα Ι έχουμε
$(ΑΒΓΔ) = (ΑΖΗΔ) = ΑΔ \cdot ΑΖ = ΒΓ \cdot ΑΖ$
που είναι το ζητούμενο.
Με τη βοήθεια του εμβαδού του παραλληλογράμμου θα υπολογίσουμε τον τύπο του εμβαδού τριγώνου.

Θεώρημα ΙΙΙ

Το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου είναι ίσο με το ημιγινόμενο μιας πλευράς επί το αντίστοιχο ύψος.

Δηλαδή .

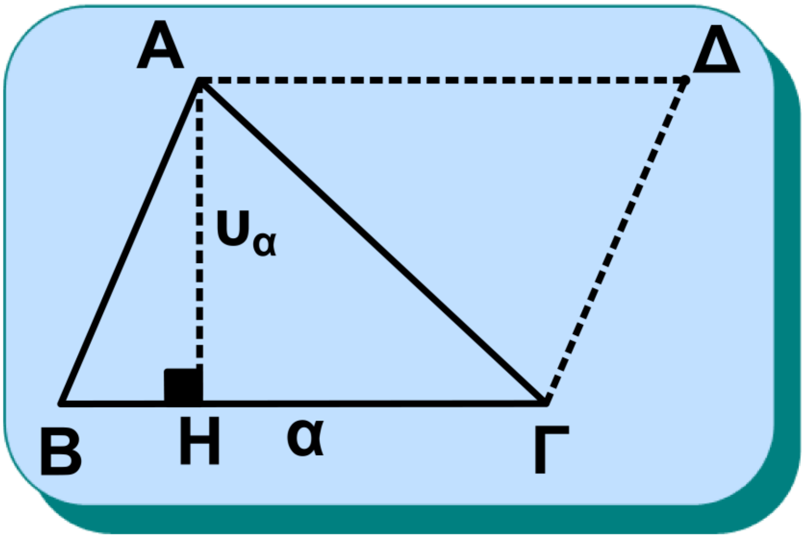
$$E = \frac{1}{2}\alpha \cdot \upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta \cdot \upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma \cdot \upsilon_\gamma$$

Απόδειξη

Με πλευρές ΑΒ και ΒΓ (σχ.9) σχηματίζουμε το παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ, το εμβαδόν του οποίου είναι

$$(ΑΒΓΔ) = α \cdot υ_α \ (1).$$

Σχήμα 9



Όμως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΔΑΓ είναι ίσα, οπότε: (ΑΒΓ) = (ΑΔΓ) (2).

Από το σχήμα έχουμε ότι (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ)+ (ΑΓΔ) η οποία, σύμφωνα με τις (1) και (2), μετατρέπεται στην

$$α \cdot υ_α = 2(ΑΒΓ) \text{ ή } (ΑΒΓ) = \frac{1}{2} α \cdot υ_{α^1}$$

Τέλος, τον τύπο του εμβαδού τριγώνου θα τον αξιοποιήσουμε για να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου.

Θεώρημα IV

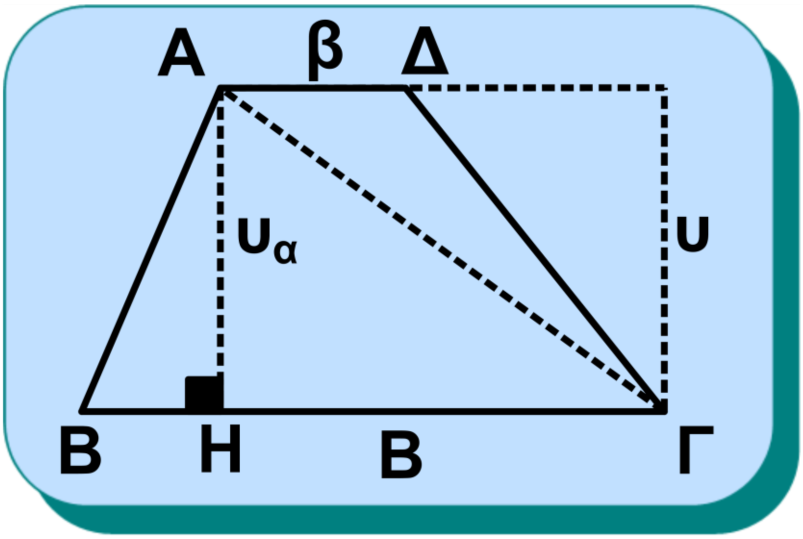
Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο του ημιαθροίσματος των βάσεών του επί το ύψος του.

Δηλαδή $E = \frac{(B+\beta)}{2} \cdot \upsilon$,

όπου Β, β οι βάσεις του τραπεζίου και υ το ύψος του.

Απόδειξη

Σχήμα 10



Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ) (σχ.10), με βάσεις ΒΓ = Β, ΑΔ = β και ύψος υ. Φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ. Τότε έχουμε

Ε = (ΑΒΓΔ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔ) (1).

Αλλά τα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΓΔ έχουν το ίδιο ύψος υ και βάσεις Β, β αντίστοιχα και επομένως:

$$(\text{ΑΒΓ}) = \frac{1}{2}\text{Β}\cdot\upsilon \text{ και } (\text{ΑΓΔ}) = \frac{1}{2}\beta\cdot\upsilon \ (2)$$

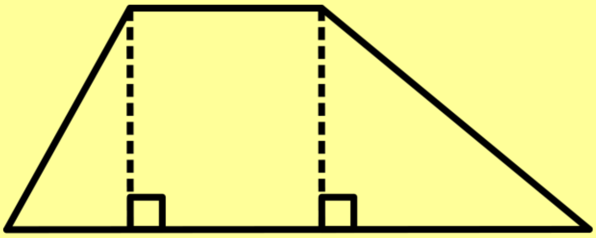
Με αντικατάσταση των σχέσεων (2) στην (1) προκύπτει ότι $\text{Ε} = \frac{\text{Β}+\beta}{2}\cdot\upsilon$, **δηλαδή το ζητούμενο.**

ΠΟΡΙΣΜΑ

Το εμβαδόν τραπεζίου ισούται με το γινόμενο της διαμέσου επί το ύψος του.

Δραστηριότητα

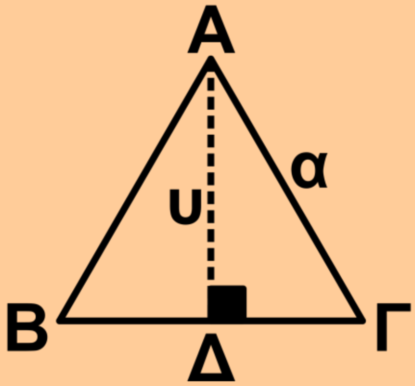
Χωρίζοντας το τραπέζιο σε δύο ορθογώνια τρίγωνα και ένα ορθογώνιο (βλ. το παρακάτω σχήμα), να αποδείξετε τον τύπο του εμβαδού του τραπεζίου.



ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Το εμβαδόν Ε ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α είναι ίσο με

$$E=\frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$



Σχήμα 11

Απόδειξη

Φέρουμε το ύψος ΑΔ (σχ. 11) το οποίο είναι και διάμεσος.

Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΑΓ, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, έχουμε

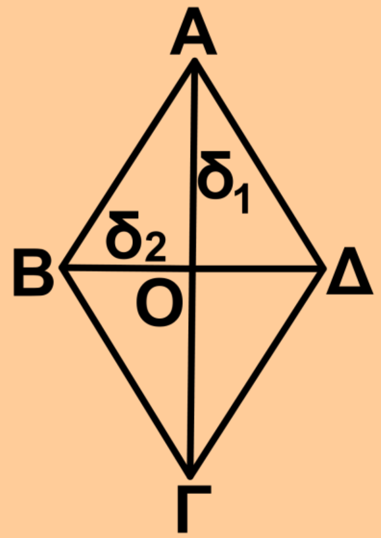
$$\upsilon^2=A\Delta^2=\alpha^2-\Delta\Gamma^2=\alpha^2-\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2=\frac{3\alpha^2}{4}$$

δηλαδή $\upsilon=\dfrac{\alpha\sqrt{3}}{2}$**, οπότε**

$$E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon = \frac{1}{2}\alpha\frac{\alpha\sqrt{3}}{2} = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Το εμβαδόν ρόμβου ισούται με το ημιγινόμενο των διαγωνίων του.



Σχήμα 12

Απόδειξη

Είναι φανερό (σχ.12) ότι

(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) (1).

Επειδή οι διαγώνιοι του ρόμβου είναι κάθετες και διχοτομούνται έχουμε:

$$(ΑΒΔ) = \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΟ = \frac{1}{2}\delta_2 \cdot \frac{\delta_1}{2} = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$$

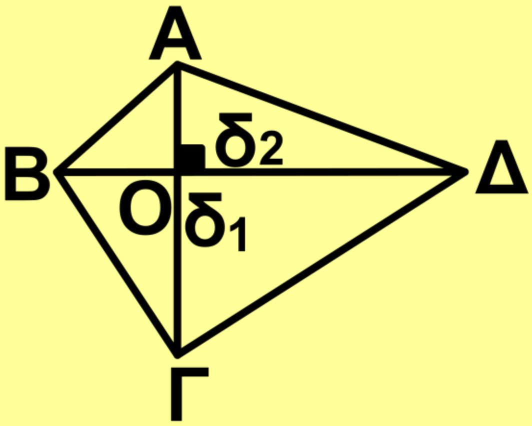
και $(ΒΓΔ) = \frac{1}{4}\delta_1 \cdot \delta_2$ (2).

Με αντικατάσταση των (2) στην (1) προκύπτει ότι $E = \frac{1}{2}\delta_1 \cdot \delta_2$ (3).

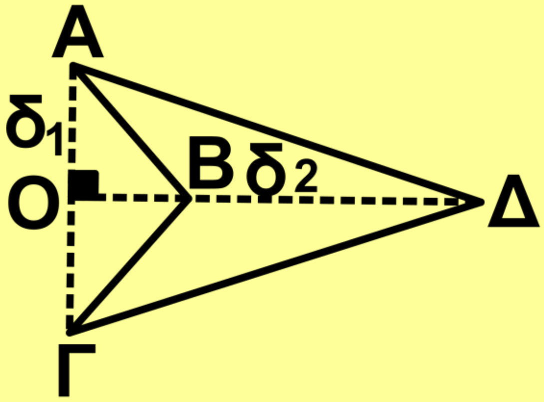
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Ο προηγούμενος τύπος (3) ισχύει και στην περίπτωση οποιουδήποτε κυρτού ή μη κυρτού, τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους.

Πράγματι (σχ. 13, 14)



Σχήμα 13



Σχήμα 14

(ΑΒΓΔ) = (ΑΒΔ) + (ΒΓΔ) =

$$= \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΟ + \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΟΓ =$$

$$= \frac{1}{2}ΒΔ \cdot \left(ΑΟ + ΟΓ\right) = \frac{1}{2}ΒΔ \cdot ΑΓ$$

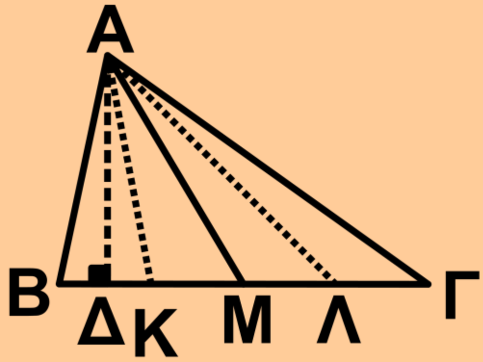
Μια γενίκευση του τύπου (3), για την περίπτωση του τετραπλεύρου αποτελεί η άσκηση 7 των αποδεικτικών ασκήσεων.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 3η

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ.

i) Αν ΑΜ διάμεσος του τριγώνου να αποδείξετε ότι (ΑΒΜ) = (ΑΜΓ).

ii) Από την κορυφή Α να φέρετε τρεις ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τέσσερα ισοδύναμα τρίγωνα.



Σχήμα 15

Λύση

i) Φέρουμε το ύψος ΑΔ του τριγώνου ΑΒΓ (σχ. 15). Το ΑΔ είναι και ύψος στα τρίγωνα ΑΒΜ και ΑΜΓ, οπότε έχουμε

$$(\text{ΑΒΜ}) = \frac{1}{2}\text{ΒΜ}\cdot\text{ΑΔ} = \frac{1}{2}\text{ΜΓ}\cdot\text{ΑΔ} = (\text{ΑΜΓ})$$

αφού το Μ είναι μέσο του ΒΓ.

ii) Από το προηγούμενο ερώτημα προκύπτει ότι οι ζητούμενες ευθείες είναι οι φορείς των διαμέσων ΑΜ,

ΑΚ και ΑΛ των τριγώνων ΑΒΓ, ΑΒΜ και ΑΜΓ αντίστοιχα.

Δραστηριότητα

Να χωρίσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ σε τρία ισοδύναμα τρίγωνα με ευθείες από την κορυφή Α.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Να γράψετε τους τύπους υπολογισμού του εμβαδού:
i) τετραγώνου
ii) ορθογωνίου
iii) παραλληλογράμμου
iv) τριγώνου
v) τραπεζίου

2. Ένα τετράγωνο έχει περίμετρο 16. Πόσο είναι το εμβαδόν του;

3. Ένα ορθογώνιο έχει διαστάσεις α=9, β=4 και είναι ισοδύναμο με τετράγωνο πλευράς x. Να βρεθεί το x.

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι α < β.

Με ποια ανισοτική σχέση συνδέονται τα $υ_α$ και $υ_β$;

5. Αν ένας ρόμβος έχει μήκη διαγωνίων 4 και 5 αντίστοιχα, με τι ισούται το γινόμενο μιας πλευράς του επί το αντίστοιχο ύψος;

6. Ένας χωρικός αντάλλαξε έναν αγρό, που είχε σχήμα τετραγώνου πλευράς 60 m, με έναν άλλο αγρό (με την ίδια ποιότητα χώματος) που είχε σχήμα ορθογωνίου με πλάτος 40 m και περίμετρο ίση με την περίμετρο του πρώτου. Έχασε ή κέρδισε ο χωρικός από την ανταλλαγή αυτή; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Στο εσωτερικό τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α = 4 κατασκευάζουμε το ισόπλευρο τρίγωνο ΑΔΖ. Να υπολογισθεί το εμβαδόν των ΑΒΓΔ, ΑΔΖ, ΑΒΖ και ΒΖΓ.

2. **Αν Μ τυχαίο σημείο της πλευράς ΑΔ = 10 τετραγώνου ΑΒΓΔ, τότε το άθροισμα (ΑΜΒ) + (ΔΜΓ) είναι :**
Α:25 Β:40 Γ:50 Δ:75 Ε:100
Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

3. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 6, ΑΓ = 8 και $\hat{A}$ =60°.**
Να βρεθούν: i) το ύψος $υ_β$,
ii) το εμβαδόν (ΑΒΓ), iii) το ύψος $υ_α$.

4. **Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο 14 και διαγώνιο 5.**
Να βρείτε το εμβαδόν του.

5. **Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με ΒΓ = 10 και αντίστοιχο προς αυτήν ύψος υ = 5. Πάνω στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παίρνουμε τα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, ώστε ΑΕ = ΖΓ.**
i) Να βρείτε το εμβαδόν του ΑΒΓΔ.

ii) Αφού πρώτα συγκρίνετε τα εμβαδά των τραπεζίων ΑΕΖΒ και ΕΖΓΔ να βρείτε το εμβαδόν καθενός από αυτά.

6. Ένα οικόπεδο έχει σχήμα τραπεζίου ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με $\hat{A} = \hat{B} = 1\llcorner$, ΑΔ = 15m, ΒΓ = 20m και ΑΒ = 12m. Ένας καινούργιος δρόμος περνάει παράλληλα προς τη ΔΓ και αποκόπτει μια λωρίδα πλάτους 3m. Πόσα τετραγωνικά μέτρα είναι το οικόπεδο που απομένει;

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Αν Σ είναι σημείο μιας πλευράς παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι (ΣΑΓ) + (ΣΒΔ) = (ΑΒΓ).

2. Αν οι διάμεσοι ΑΔ και ΒΕ τριγώνου ΑΒΓ τέμνονται στο Θ να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΕ) = (ΒΕΓ), ii) (ΑΘΒ) = (ΔΓΕΘ) και iii) (ΒΘΔ) = (ΑΘΕ).

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και το βαρύκεντρό του Θ. Από σημείο Σ της διαμέσου ΑΔ φέρουμε τις κάθετες ΣΕ, ΣΖ στις ΑΓ, ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι

i) (ΑΒΣ) = (ΑΓΣ),

ii) ΑΒ·ΣΖ=ΑΓ·ΣΕ και

iii) (ΑΒΘ) = (ΒΘΓ) = $\frac{1}{3}$(ΑΒΓ).

4. Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΒΓ//ΑΔ). Αν Μ το μέσο της πλευράς του ΑΒ, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) = 2(ΜΓΔ).

5. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν ενός τραπεζίου είναι ίσο με το γινόμενο της μίας από τις μη παράλληλες πλευρές του επί την απόσταση του μέσου της άλλης από αυτή.

6. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 1, ΑΓ = 2 και $\hat{A}$ =120°. Με πλευρές τις ΑΒ και ΑΓ κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου ΑΒΓ τα τετρά-

γωνα ΑΒΔΓ και ΑΓΖΘ αντίστοιχα. Τότε:

i) να υπολογίσετε το τμήμα ΕΘ,

ii) να αποδείξετε ότι τα Δ, Ε, Θ είναι συνευθειακά και

iii) να αποδείξετε ότι το εμβαδόν της πολυγωνικής επιφάνειας ΒΓΖΘΕΔ είναι $5+\sqrt{3}$.

7. Αν ω είναι η γωνία των διαγωνίων ΑΓ και ΒΔ κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ, να αποδείξετε ότι

$$(\text{ΑΒΓΔ}) = \frac{1}{2}\text{ΑΓ}\cdot\text{ΒΔ}\cdot\text{ημω}$$

8. Ο ιδιοκτήτης ενός οικοπέδου σχήματος ορθογωνίου, του οποίου το μήκος είναι κατά 18 m μεγαλύτερο του πλάτους, θέλει να σχηματίσει γύρω από το οικόπεδο και εξωτερικά αυτού μια δενδροστοιχία πλάτους 2,5 m. Έτσι αναγκάζεται να αγοράσει από τους γείτονές του

695 m^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του οικοπέδου.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των ημιευθειών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ και ΔΑ παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ζ, Η, Θ και Ι, ώστε ΒΖ = ΑΒ, ΓΗ = ΒΓ, ΔΘ = ΓΔ και ΑΙ = ΑΔ. Να αποδείξετε ότι
i) (ΙΘΑ) = (ΑΘΔ) = (ΑΓΔ),
ii) (ΙΘΔ) + (ΖΗΒ) = 2(ΑΒΓΔ) και
iii) (ΙΖΗΘ) = 5(ΑΒΓΔ).

2. Σε τρίγωνο ΑΒΓ παίρνουμε το μέσο Μ της διαμέσου ΑΔ, το μέσο Ν του ΓΜ και το μέσο Ρ του ΒΝ. Να αποδείξετε ότι (ΜΝΡ) = $\frac{1}{8}$(ΑΒΓ).

3. Στις πλευρές ΒΓ και ΓΔ τετραγώνου ΑΒΓΔ πλευράς α παίρνουμε τα σημεία Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε

ΖΓ = ΗΔ = $\frac{α}{4}$

i) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα ΑΖ και ΒΗ τέμνονται κάθετα σε σημείο Κ.

ii) Να υπολογισθούν τα μήκη των τμημάτων: ΑΚ, ΑΗ και ΚΗ.

iii) Να υπολογισθεί το εμβαδόν του τετραπλεύρου ΑΚΗΔ.

4. Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και σημείο Ο στο εσωτερικό του τριγώνου ΑΒΓ. Να αποδείξετε ότι

i) (ΟΑΒ) + (ΟΓΔ) = (ΑΒΓ) και ii) (ΟΑΓ) + (ΟΒΓ) = (ΟΓΔ).

5. Αν ΑΒΓΔ και ΚΛΜΝ είναι ρόμβος πλευράς α και τετράγωνο πλευράς α αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι (ΑΒΓΔ) ≤ (ΚΛΜΝ).

10.4 Άλλοι τύποι για το εμβαδόν τριγώνου

Με τη βοήθεια του βασικού τύπου για το εμβαδόν ενός τριγώνου ΑΒΓ, με μήκη πλευρών α, β, γ, προκύπτουν και οι επόμενοι τύποι:

(i) $E=\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$ (τύπος του Ήρωνα), όπου τ η ημιπερίμετρος του τριγώνου.

(ii) $E=\tau\rho$, όπου ρ η ακτίνα του εγγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

(iii) $E=\dfrac{\alpha\beta\gamma}{4R}$, όπου R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου.

Απόδειξη

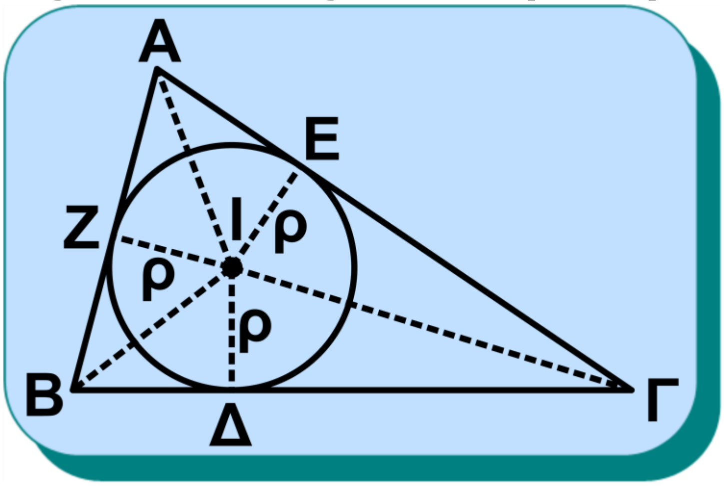
(i) Στην § 9.4 (Εφαρμογή 2) αποδείξαμε ότι $u_\alpha=\dfrac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$,

οπότε έχουμε: $E=\dfrac{1}{2}\alpha u_\alpha=$

$$= \frac{1}{2}\alpha\frac{2}{\alpha}\sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)} =$$
$$= \sqrt{\tau(\tau-\alpha)(\tau-\beta)(\tau-\gamma)}$$

(ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ (σχ. 16) και ο εγγεγραμμένος κύκλος του (Ι, ρ).

Σχήμα 16



Φέρουμε τα τμήματα ΙΑ, ΙΒ και ΙΓ και έτσι το τρίγωνο χωρίζεται στα τρίγωνα ΙΒΓ, ΙΓΑ και ΙΑΒ που έχουν το ίδιο ύψος ρ και δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, οπότε έχουμε:

Ε=(ΑΒΓ) = (ΙΒΓ) + (ΙΓΑ) + (ΙΑΒ) =

$$= \frac{1}{2}\alpha\rho + \frac{1}{2}\beta\rho + \frac{1}{2}\gamma\rho =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha+\beta+\gamma)\rho = \frac{1}{2}2\tau\rho = \tau\rho.$$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:
Όμοια αποδεικνύεται ότι ο τύπος (2) ισχύει για οποιοδήποτε περιγεγραμμένο σε κύκλο πολύγωνο με ημιπερίμετρο τ.

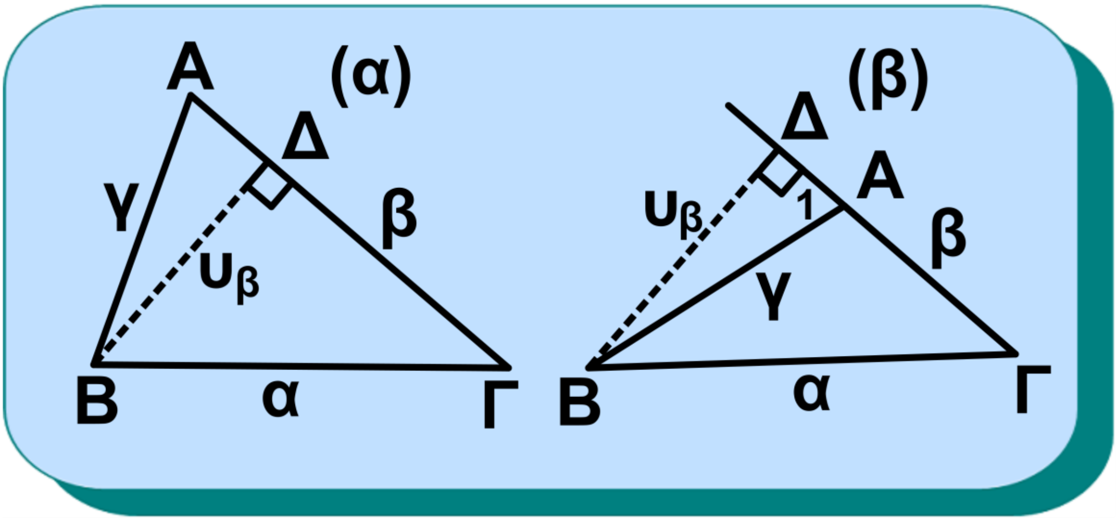
(iii) Είναι γνωστό ότι βγ = $2R\upsilon_\alpha$ (Εφαρμογή 5 §8.2), οπότε έχουμε ότι $\upsilon_\alpha = \dfrac{\beta\gamma}{2R}$ και με αντικατάσταση στον τύπο $E = \dfrac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ προκύπτει το ζητούμενο.

Τέλος, το εμβαδόν Ε ενός τριγώνου ΑΒΓ δίνεται και από τον (τριγωνομετρικό) τύπο:

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Απόδειξη

Αν $\hat{A}$ <1∟, από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ (σχ.17α) προκύπτει ότι $\upsilon_\beta = \gamma \cdot \eta\mu A$.



Σχήμα 17

Αν $\hat{A}$ >1 ∟, πάλι από το ορθογώνιο τρίγωνο ΔΒΑ(σχ. 17β) προκύπτει ότι:

$$υ_β = γ \cdot ημA_{εξ} = γ \cdot ημ(180^o - A) =$$
$$= γ \cdot ημA$$

Έτσι και στις δύο περιπτώσεις έ-χουμε $υ_β = γ \cdot ημA$ οπότε

$$E = \frac{1}{2}βυ_β = \frac{1}{2}βγ \cdot ημA.$$

Όταν $\hat{A}$ = 1 ∟, τότε $υ_β$ = γ, επομένως πάλι ο τύπος ισχύει.

Όμοια αποδεικνύονται και οι υπό-λοιποι τύποι.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η
Νόμος των ημιτόνων

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδειχθεί ότι: $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=\frac{\beta}{\eta\mu B}=\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=2R$

Απόδειξη

Από τις ισότητες $E=\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ **και** $E=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ **προκύπτει ότι** $\frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A=\frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$ **ή** $\eta\mu A=\frac{\alpha}{2R}$ **ή** $\frac{\alpha}{\eta\mu A}=2R$. **Όμοια προκύπτει** $\frac{\beta}{\eta\mu B}=2R$, $\frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma}=2R$, **από τις οποίες συμπεραίνουμε το ζητούμενο.**

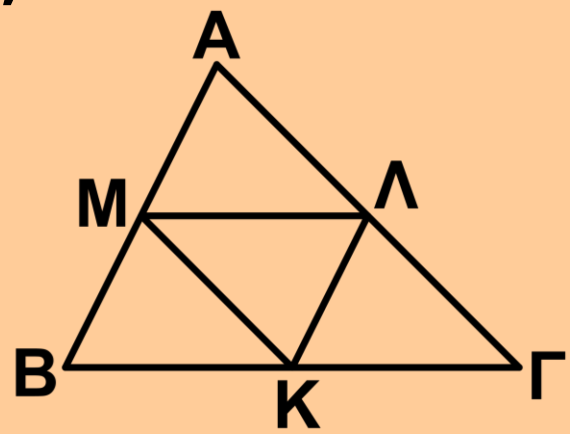
ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με α = 13, β = 14 και γ = 15 (σχ.18).
Να υπολογίσετε:

(i) το εμβαδόν του,

(ii) τα ύψη του,

(iii) τις ακτίνες του εγγεγραμμένου και του περιγεγραμμένου κύκλου,



Σχήμα 18

(iv) το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές τα μέσα των πλευρών του ΑΒΓ.

Λύση

(i) Έχουμε $\tau = \frac{1}{2}(\alpha + \beta + \gamma) = 21$ οπότε με αντικατάσταση των δεδομένων στον τύπο του Ήρωνα παίρνουμε:

$$E = \sqrt{\tau(\tau - \alpha)(\tau - \beta)(\tau - \gamma)} =$$

$$\sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = 84$$

(ii) Έχουμε $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha$ ή $84 = \frac{1}{2}13\upsilon_\alpha$

ή $υ_α = \frac{168}{13}$. Όμοια βρίσκουμε ότι $υ_β = 12$ και $υ_γ = \frac{56}{5}$.

(iii) Από τους τύπους $E = τ \cdot ρ$ και $E = \frac{αβγ}{4R}$ προκύπτουν αντίστοιχα ότι $ρ = 4$ και $R = \frac{65}{8}$

(iv) Έχουμε $ΜΛ = \frac{13}{2}$, $ΜΚ = 7$ και $ΚΛ = \frac{15}{2}$, οπότε από τον τύπο του Ήρωνα προκύπτει πάλι ότι (ΚΛΜ) = 21.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. **Με τη βοήθεια του τύπου $E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A$ να αποδείξετε ότι $E \leq \frac{1}{2}\beta\gamma$. Πότε ισχύει η ισότητα;**

2. **Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι (ΑΒΓ)=9 και ρ = 1,5.**
Ποια είναι η περίμετρός του;

3. **Ποιοι είναι οι τύποι υπολογισμού του εμβαδού ενός τριγώνου;**

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. **Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι ΑΒ = 18, ΒΓ = 20 και ΑΓ = 34. Να βρείτε το εμβαδόν του.**

2. **Δίνεται τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ//ΒΓ) με ΒΓ = 25, ΑΔ = 11, ΑΒ = 13 και ΔΓ = 15. Να βρείτε το εμβαδόν του και το ύψος του.**

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = 4, ΑΓ = 7 και $\hat{A}$ = 60°. Να βρείτε το εμβαδόν του.

4. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 └) με ΑΒ = 6 και ΑΓ = 8. Να βρείτε:

i) το εμβαδόν,

ii) το ύψος $υ_α$,

iii) την ακτίνα ρ του εγγεγραμμένου κύκλου.

Ασκήσεις Αποδεικτικές

1. Αν σε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει βγ = $αυ_α$ να αποδείξετε ότι $\hat{A}$ = 1 └.

2. Αν Ε το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ με πλευρές α, β, γ, να αποδείξετε ότι:

i) Ε<τ(τ . α) ⇔ $\hat{A}$ < 1 └,

ii) Ε = τ(τ . α) ⇔ $\hat{A}$ = 1 └,

iii) Ε>τ(τ . α) ⇔ $\hat{A}$ > 1 └.

3. **Αν δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι εγγεγραμμένα στον ίδιο κύκλο να αποδείξετε ότι** $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')}=\frac{αβγ}{α'β'γ'}$.

4. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ με** $\hat{Α} \neq 1^{\llcorner}$ **φέρουμε τα ύψη ΒΖ και ΓΗ. Να αποδείξετε ότι** $(ΑΖΗ)=(ΑΒΓ)συν^2Α$.

5. **Σε τρίγωνο ΑΒΓ να αποδείξετε ότι:** $\frac{1}{υ_α}+\frac{1}{υ_β}+\frac{1}{υ_γ}=\frac{1}{ρ}$.

Σύνθετα θέματα

1. **i) Δίνεται γωνία** $x\hat{O}y$ **και σταθερό σημείο Κ στο εσωτερικό αυτής. Από το Κ φέρουμε μεταβλητή ευθεία ε που τέμνει τις πλευρές Ox, Oy στα σημεία Μ, Ν αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το άθροισμα** $\frac{1}{(ΟΚΜ)}+\frac{1}{(ΟΚΝ)}$ **είναι σταθερό.**

ii) Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ, σημείο Κ στο εσωτερικό του και τα τμήματα ΑΑ΄, ΒΒ΄ και ΓΓ΄ που διέρχονται από το Κ. Αν $Ε_1, Ε_2, ..., Ε_6$ είναι αντίστοιχα τα εμβαδά των τριγώνων ΑΚΓ΄, ΒΚΓ΄, ΒΑ΄Κ, ΓΚΑ΄, ΓΚΒ΄ και ΑΚΒ΄, να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{Ε_1}+\frac{1}{Ε_3}+\frac{1}{Ε_5}=\frac{1}{Ε_2}+\frac{1}{Ε_4}+\frac{1}{Ε_6}.$$

2. Αν $ρ_α$, $ρ_β$, $ρ_γ$ είναι οι ακτίνες των παρεγγεγραμμένων κύκλων τριγώνου ΑΒΓ, να αποδείξετε ότι

$$(ΑΒΓ)=(τ-α)ρ_α=(τ-β)ρ_β=(τ-γ)ρ_γ.$$

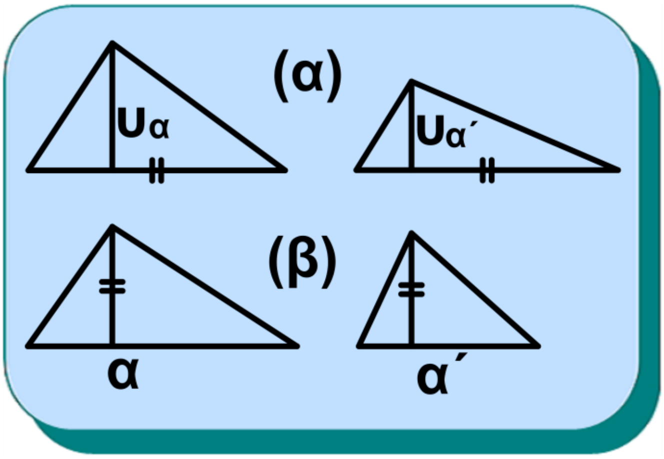
3. Έστω τετράπλευρο ΑΒΓΔ εγγράψιμο σε κύκλο. Αν θέσουμε ΑΒ = α, ΒΓ = β, ΓΔ = γ και ΔΑ = δ να αποδείξετε ότι $\frac{ΑΓ}{ΒΔ}=\frac{αδ+βγ}{αβ+γδ}$

(2ο Θεώρημα Πτολεμαίου).

Εμβαδόν και ομοιότητα

10.5 Λόγος εμβαδών όμοιων τριγώνων πολυγώνων

Ας θεωρήσουμε δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με εμβαδά Ε και Ε΄ αντίστοιχα. Τότε είναι



Σχήμα 19

$E=\frac{1}{2}αυ_α$ και $E=\frac{1}{2}α΄υ_{α΄}$, οπότε $\frac{E}{E΄}=\frac{αυ_α}{α΄υ_{α΄}}$. Από την ισότητα αυτή προκύπτει άμεσα ότι:

- Αν $α = α΄$, τότε $\frac{E}{E΄}=\frac{υ_α}{υ_{α΄}}$ (σχ.19α).
- Αν $υ_α = υ_{α΄}$, τότε $\frac{E}{E΄}=\frac{α}{α΄}$ (σχ.19β).

Δηλαδή: αν δύο τρίγωνα έχουν ίσες βάσεις, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο

των αντίστοιχων υψών, ενώ αν έχουν ίσα ύψη, τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το λόγο των αντίστοιχων βάσεων.

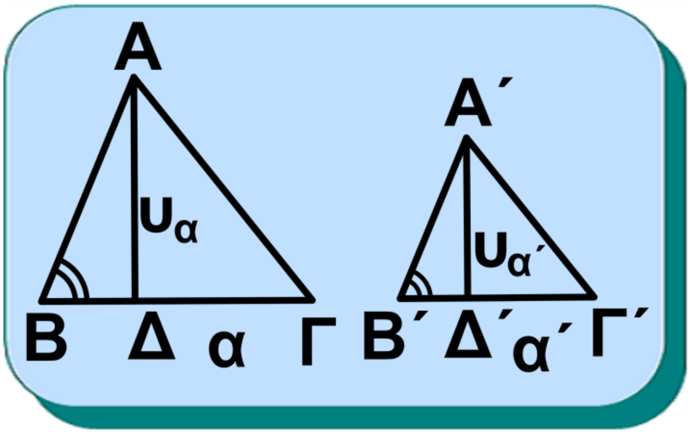
Στην περίπτωση που τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ είναι όμοια, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ

Αν δυο τρίγωνα είναι όμοια τότε ο λόγος των εμβαδών τους ισούται με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητας.

Απόδειξη

Έστω δύο όμοια τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ (σχ. 20) με $\hat{A} = \hat{A}'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$.



Σχήμα 20

Τότε $\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}} = \lambda$ (1), όπου λ ο λόγος ομοιότητας. Αλλά, όπως και παραπάνω, είναι $\frac{E}{E'} = \frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}$ (2).

Από τις (1) και (2) προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \lambda^2$

Το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει γενικότερα και για όμοια πολύγωνα, όπως μας βεβαιώνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙ

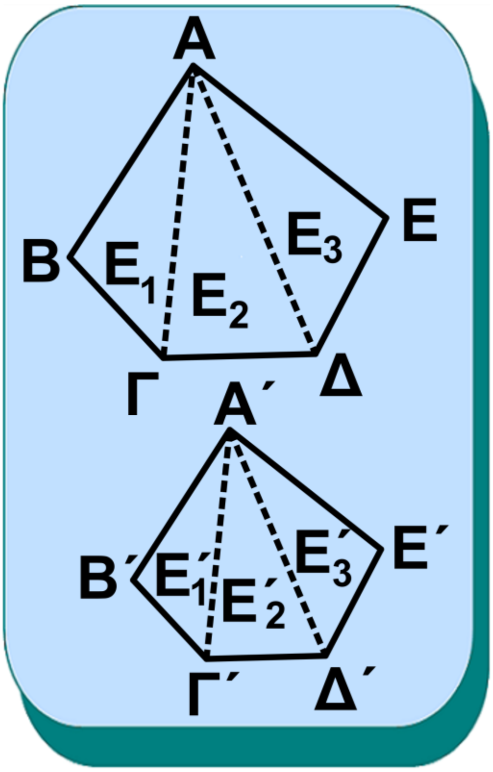
Ο λόγος των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων είναι ίσος με το τετράγωνο του λόγου ομοιότητάς τους.

Απόδειξη

Ας θεωρήσουμε δυο όμοια πολύγωνα π.χ. τα πεντάγωνα ΑΒΓΔΕ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄Ε΄ (σχ. 21) με λόγο ομοιότητας:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{B\Gamma}{B'\Gamma'} = \frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'} = \frac{\Delta E}{\Delta'E'} = \lambda \ (1).$$

Φέρουμε τις διαγωνίους των πολυγώνων από τις κορυφές Α και Α΄, οπότε αυτά χωρίζονται σε ισάριθμα τρίγωνα όμοια μεταξύ τους.



Σχήμα 21

Αν E_1, E_2, E_3 και E'_1, E'_2, E'_3 είναι τα εμβαδά των αντίστοιχων τριγώνων, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα και τη σχέση (1), θα έχουμε:

$$\frac{E_1}{E'_1} = \left(\frac{AB}{A'B'}\right)^2 = \lambda^2,$$

$$\frac{E_2}{E'_2} = \left(\frac{\Gamma\Delta}{\Gamma'\Delta'}\right)^2 = \lambda^2 \text{ και}$$

$$\frac{E_3}{E'_3}=\left(\frac{\Delta E}{\Delta' E'}\right)^2=\lambda^2$$, οπότε:

$$\lambda^2=\frac{E_1}{E'_1}=\frac{E_2}{E'_2}=\frac{E_3}{E'_3}=$$

$$=\frac{E_1+E_2+E_3}{E'_1+E'_2+E'_3}=\frac{(\mathrm{AB\Gamma\Delta E})}{(\mathrm{A'B'\Gamma'\Delta'E'})},$$ δηλαδή το ζητούμενο.

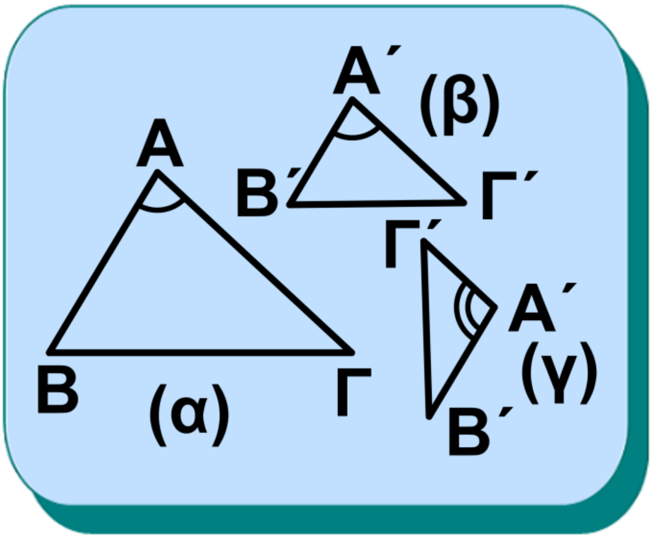
Για το λόγο των εμβαδών τριγώνων με δύο γωνίες ίσες ή παραπληρωματικές ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα ΙΙΙ

Αν μία γωνία ενός τριγώνου είναι ίση ή παραπληρωματική με μια γωνία ενός άλλου τριγώνου, τότε ο λόγος των εμβαδών των δύο τριγώνων είναι ίσος με το λόγο των γινομένων των πλευρών που περιέχουν τις γωνίες αυτές.

Απόδειξη

Θεωρούμε τα τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με $\hat{A} = \hat{A}'$ (σχ.22 α,β) ή $\hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ$ (σχ.22 α,γ).

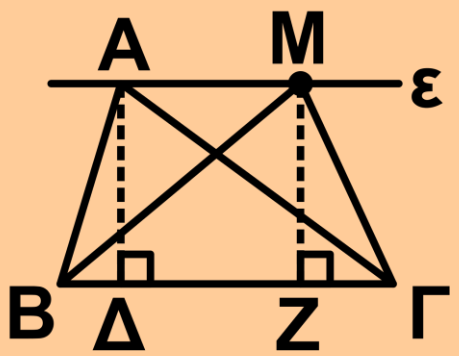


Σχήμα 22

Τότε και στις δύο περιπτώσεις θα ισχύει ημΑ = ημΑ΄, οπότε από τις ισότητες $E = \frac{1}{2}\beta \cdot \gamma ημA$ και $E = \frac{1}{2}\beta' \cdot \gamma' ημA'$ με διαίρεση κατά μέλη προκύπτει ότι $\frac{E}{E'} = \frac{\beta \cdot \gamma}{\beta' \cdot \gamma'}$, που είναι το ζητούμενο.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 1η

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε που διέρχεται από το Α και είναι παράλληλη προς την πλευρά ΒΓ.



Σχήμα 23

Αν Μ σημείο της ε, να αποδείξετε ότι (ΜΒΓ) = (ΑΒΓ).

Απόδειξη

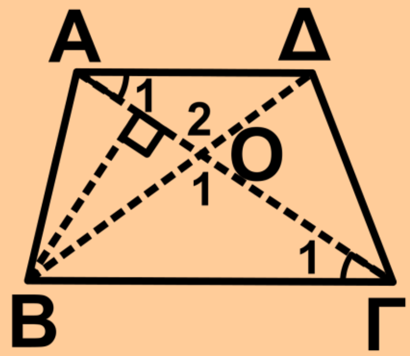
Φέρουμε τα ύψη ΑΔ και ΜΖ των τριγώνων ΑΒΓ και ΜΒΓ αντίστοιχα. Επειδή η ε είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, προκύπτει ότι ΑΔ = ΜΖ και επομένως τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΜΒΓ είναι ισεμβαδικά, επειδή έχουν κοινή βάση ΒΓ και ίσα ύψη.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ 2η

Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ με βάσεις ΒΓ και ΑΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Να αποδείξετε ότι: (i) (ΟΑΒ) = (ΟΓΔ),

(ii) $\dfrac{(\text{ΑΟΔ})}{(\text{ΟΒΓ})} = \dfrac{\text{ΑΔ}^2}{\text{ΒΓ}^2}$ και

(iii) $\dfrac{(\text{ΟΑΒ})}{(\text{ΟΒΓ})} = \dfrac{\text{ΑΔ}}{\text{ΒΓ}}$



Σχήμα 24

Απόδειξη

(i) Είναι (ΟΑΒ) = (ΒΑΔ) - (ΟΑΔ) =
=(ΑΓΔ) - (ΟΑΔ) = (ΟΓΔ).

(ii) Τα τρίγωνα ΟΑΔ και ΟΒΓ είναι όμοια ($\hat{O}_1 = \hat{O}_2$, $\hat{\Gamma}_1 = \hat{A}_1$) με λόγο ομοιότητας $\frac{A\Delta}{B\Gamma}$ και επομένως

$$\frac{(OA\Delta)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta^2}{B\Gamma^2}$$

(iii) Τα τρίγωνα ΟΑΒ και ΟΒΓ έχουν κοινή κορυφή Β και κοινό το ύψος από αυτήν, επομένως $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{OA}{O\Gamma}$.

Από την ομοιότητα όμως των τριγώνων ΟΑΔ και ΟΒΓ έχουμε ότι $\frac{OA}{O\Gamma} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$ οπότε $\frac{(OAB)}{(OB\Gamma)} = \frac{A\Delta}{B\Gamma}$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έ-

χουν $υ_β = υ_{β'}$ και $\frac{(ΑΒΓ)}{(Α'Β'Γ')} = \frac{3}{2}$. Τότε ο λόγος $\frac{β}{β'}$ είναι

Α: $\frac{2}{5}$ Β: $\frac{3}{4}$ Γ: $\frac{3}{2}$ Δ: $\frac{9}{4}$ Ε: $\frac{4}{9}$

Κυκλώστε το γράμμα της σωστής απάντησης και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

2. Δυο ρόμβοι ΑΒΓΔ και Α΄Β΄Γ΄Δ΄ έχουν $\hat{Α} = \hat{Α}'$ και $\frac{ΑΒ}{Α'Β'} = \frac{4}{5}$. Να υπολογισθεί ο λόγος $\frac{(ΑΒΓΔ)}{(Α'Β'Γ'Δ')}$.

3. Ένα ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) είναι ισοδύναμο με ένα τρίγωνο Α΄Β΄Γ΄ που έχει $Α'Β' \cdot Α'Γ' = 36$. Αν είναι $\hat{Α} + \hat{Α}' = 2^{\llcorner}$, ποιο είναι το μήκος των ίσων πλευρών του ισοσκελούς;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Δυο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $α = α΄$ και $υ_α = \frac{3}{2}υ_{α΄}$. Αν το εμβαδόν του ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του Α΄Β΄Γ΄.

2. Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με εμβαδόν $20m^2$. Αν Μ σημείο στην προέκταση της ΑΒ τέτοιο ώστε $ΑΒ = 2ΒΜ$, να βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου ΜΒΓ.

3. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τα σημεία Δ και Ζ των προεκτάσεων των ΒΑ και ΓΑ αντίστοιχα, προς το Α, ώστε $ΑΔ = \frac{2}{3}ΑΒ$ και $ΑΖ = \frac{1}{2}ΑΓ$. Αν το εμβαδόν του τριγώνου ΑΒΓ είναι $30m^2$, να βρείτε το εμβαδόν του ΑΔΖ.

4. Ένα τρίγωνο ΑΒΓ έχει εμβαδόν $75m^2$. Έστω Δ σημείο της πλευράς

ΒΓ και Μ σημείο του ΑΔ τέτοιο, ώστε $\frac{ΑΜ}{ΜΔ}=\frac{3}{2}$. Από το Μ φέρουμε παράλληλο προς την πλευρά ΒΓ, που τέμνει τις ΑΒ και ΑΓ στα Ε και Ζ αντίστοιχα. Να βρείτε το εμβαδόν του τραπεζίου ΒΕΖΓ.

5. Δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ έχουν $\hat{Α}=\hat{Α}΄$ και $\hat{Β}+\hat{Β}΄=2^{L}$. Να αποδείξετε ότι αβ΄ = α΄β.

Αποδεικτικές Ασκήσεις

1. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Ρ. Αν οι ΑΡ, ΒΡ και ΓΡ τέμνουν τις ΒΓ, ΑΓ και ΑΒ στα Δ, Ε, Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

i) $\frac{ΡΔ}{ΑΔ}=\frac{(ΒΡΓ)}{(ΑΒΓ)}$, **ii)** $\frac{ΡΔ}{ΑΔ}+\frac{ΡΕ}{ΒΕ}+\frac{ΡΖ}{ΓΖ}=1$

και iii) $\frac{ΡΑ}{ΑΔ}+\frac{ΡΒ}{ΒΕ}+\frac{ΡΓ}{ΓΖ}=2.$

2. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{B}, \hat{\Gamma} < 1^{L}$ και το ύψος του ΑΔ. Στο ημιεπίπεδο (ΒΓ, Α) φέρουμε Βx $\perp$ ΒΓ και Γy $\perp$ ΒΓ. Πάνω στις Βx, Γy παίρνουμε αντίστοιχα τα σημεία Ε και Ζ, ώστε να είναι ΒΕ = ΓΖ = 2ΑΔ. Αν Μ, Ν είναι τα μέσα των ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι**

(ΕΒΜ)+(ΖΓΝ)=2(ΑΒΓ).

3. **Δίνεται κύκλος κέντρου Ο και δυο κάθετες χορδές ΑΒ και ΓΔ. Να αποδείξετε ότι (ΒΟΔ) = (ΑΟΓ).**

4. **Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. Ευθεία παράλληλη προς τη ΒΓ, τέμνει την ΑΒ στο Δ και την ΑΓ στο Ε. Να αποδείξετε ότι $(ΑΒΔ)^2$ = (ΑΔΕ)(ΑΒΓ).**

5. **Πάνω στις πλευρές κυρτού τετραπλεύρου ΑΒΓΔ κατασκευάζουμε εξωτερικά αυτού τα τετράγωνα ΑΒΕΖ, ΒΓΗΘ, ΓΔΙΚ και ΑΔΛΜ. Να αποδείξετε ότι**

(ΑΜΖ) +(ΓΗΚ) = (ΒΘΕ) + (ΔΙΛ).

6. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ ($\hat{A}$ = 1 └) και τρία πολύγωνα P_1, P_2 και P_3 όμοια μεταξύ τους, που έχουν ως ομόλογες πλευρές τις ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι $(P_2)+(P_3)=(P_1)$, όπου (P_1), (P_2) και (P_3) τα εμβαδά τους.

Σύνθετα θέματα

1. Θεωρούμε τετράπλευρο ΑΒΓΔ και έστω Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Αν E_1, E_2, E_3 και E_4 είναι τα εμβαδά των τριγώνων ΑΟΒ, ΒΟΓ, ΓΟΔ και ΔΟΑ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_4$. Αν υποθέσουμε ότι η ΑΔ είναι παράλληλη προς τη ΒΓ, τότε να αποδείξετε ότι

i) $E_1 = E_3$, (ii) $E_1^2 = E_2 \cdot E_3$,

iii) $E_1 \leq \frac{1}{4}E$, όπου Ε = (ΑΒΓΔ).

2. Από εσωτερικό σημείο Σ τριγώνου ΑΒΓ φέρουμε παράλληλες προς τις πλευρές του. Αν E_1, E_2, E_3 είναι τα εμβαδά των τριών τριγώνων που σχηματίζονται να αποδείξετε ότι

i) καθένα από τα τρίγωνα εμβαδών E_1, E_2, E_3 είναι όμοιο με το ΑΒΓ,

ii) $\sqrt{E_1}+\sqrt{E_2}+\sqrt{E_3}=\sqrt{E}$, όπου $E = (AB\Gamma)$.

3. Σε τρίγωνο ΑΒΓ φέρουμε τις διχοτόμους ΑΔ, ΒΕ και ΓΖ. Να αποδείξετε ότι

i) $(\Delta EZ)=\dfrac{2\alpha\beta\gamma}{(\alpha+\beta)(\beta+\gamma)(\gamma+\alpha)}(AB\Gamma)$

ii) $(\Delta EZ)\leq\dfrac{1}{4}(AB\Gamma)$.

4. Δίνεται το τρίγωνο ΑΒΓ και σημεία Κ,Λ των πλευρών ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα. Από τα Κ, Λ να φέρετε δύο

ευθείες που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία ισοδύναμα μέρη.

Το πρόβλημα του τετραγωνισμού κυρτού πολυγώνου

10.6 Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμό του

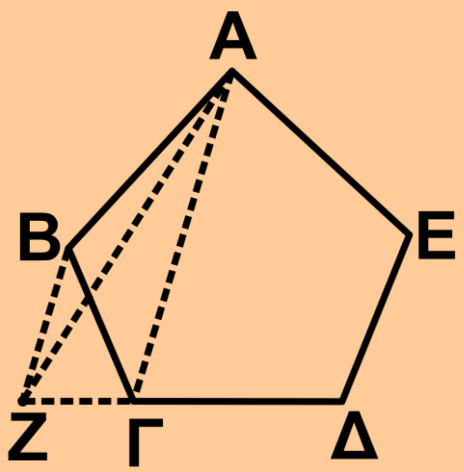
Σε πολλές περιπτώσεις, για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός ευθύγραμμου σχήματος επιδιώκουμε τον μετασχηματισμό σε ένα ισοδύναμο τετράγωνο. Η κατασκευή ενός τετραγώνου ισοδύναμου με ένα πολύγωνο λέγεται τετραγωνισμός αυτού.

Η λύση των επόμενων δύο προβλημάτων αποτελεί τη μέθοδο κατασκευής του ισοδύναμου τετραγώνου.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1

Να μετασχηματισθεί πολύγωνο σε άλλο ισοδύναμό του με μια πλευρά λιγότερη.

Λύση



Σχήμα 25

Ας θεωρήσουμε ένα πολύγωνο, π.χ. ένα πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ (σχ. 25) Από την κορυφή Α φέρουμε τη διαγώνιο ΑΓ, που αφήνει προς το ένα μέρος της μόνο μια κορυφή, τη Β. Από το Β φέρουμε την παράλληλο προς την ΑΓ, η οποία τέμνει την ευθεία ΔΓ στο Ζ. Τα τρίγωνα ΑΒΓ και ΑΖΓ έχουν κοινή βάση ΑΓ και τα αντίστοιχα προς αυτή ύψη ίσα, αφού ΒΖ // ΑΓ.

Επομένως, (ΑΒΓ) = (ΑΖΓ), οπότε (ΑΒΓΔΕ) = (ΑΒΓ) + (ΑΓΔΕ) =
=(ΑΖΓ) + (ΑΓΔΕ) = (ΑΖΔΕ) δηλαδή το πεντάγωνο ΑΒΓΔΕ είναι ισοδύ-

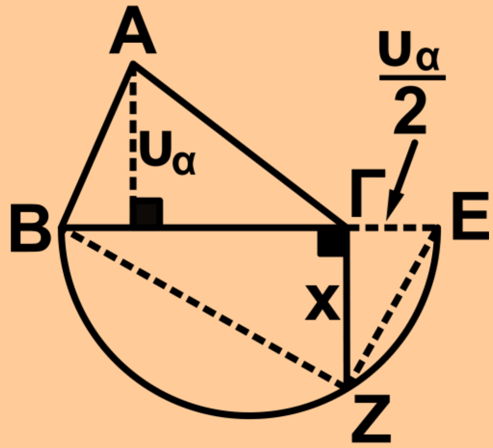
ναμο με το τετράπλευρο ΑΖΔΕ και επομένως το αρχικό μας πολύγωνο είναι ισοδύναμο με πολύγωνο που έχει μια πλευρά λιγότερη.

Αν επαναλάβουμε την παραπάνω διαδικασία στο τετράπλευρο ΑΖΔΕ, θα μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο. Έτσι, το αρχικό μας πολύγωνο μπορεί να μετασχηματισθεί σε ισοδύναμο τρίγωνο.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2

Να μετασχηματισθεί τρίγωνο σε ισοδύναμο τετράγωνο.

Λύση



Σχήμα 26

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και το ύψος που αντιστοιχεί στη ΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ προς το Γ παίρνουμε τμήμα $ΓΕ = \frac{υ_α}{2}$

και γράφουμε ημικύκλιο διαμέτρου ΒΕ. Φέρουμε την κάθετο της ΒΓ στο Γ, η οποία τέμνει το ημικύκλιο σε σημείο Ζ. Από το ορθογώνιο τρίγωνο ΖΒΕ έχουμε:

$$\Gamma Z^2 = B\Gamma \cdot \Gamma E = \alpha \cdot \frac{\upsilon_\alpha}{2} = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = (AB\Gamma),$$

οπότε συμπεραίνουμε ότι το τμήμα ΓΖ είναι η πλευρά x του ζητούμενου τετραγώνου, που είναι ισοδύναμο με το τρίγωνο ΑΒΓ.

ΣΧΟΛΙΟ

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι κάθε κυρτό πολύγωνο τετραγωνίζεται, αφού με πεπερασμένου πλήθους επαναλήψεις της διαδικασίας του προβλήματος 1 και τέλος της διαδικασίας του προβλήματος 2 κατασκευάζεται τετράγωνο ισοδύναμο προς το αρχικό πολύγωνο.

Ισχύει το ίδιο συμπέρασμα για μη ευθύγραμμα επίπεδα σχήματα;
Η απάντηση θα δοθεί στο επόμενο κεφάλαιο (§11.8).

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΓΙΑ ΛΥΣΗ

Ερωτήσεις Κατανόησης

1. Τι λέγεται τετραγωνισμός ενός πολυγώνου;

2. Πώς μετασχηματίζεται ένα ορθογώνιο σε ισοδύναμο τρίγωνο;

3. Πώς μετασχηματίζεται ένα παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο τρίγωνο;

4. Πώς μετασχηματίζεται ένα τραπέζιο σε ισοδύναμο τετράγωνο;

Ασκήσεις Εμπέδωσης

1. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με δοσμένο ορθογώνιο πλευρών α, β.

2. Να κατασκευασθεί τετράγωνο ισοδύναμο με το άθροισμα δύο τε-

τραγώνων πλευρών α,β αντίστοιχα.
3. Δοσμένο κυρτό τετράπλευρο να διαιρεθεί σε δύο ισοδύναμα μέρη με ευθεία που να διέρχεται από μια κορυφή του.
4. Δίνεται κυρτό τετράπλευρο ΑΒΓΔ και σημείο Κ της πλευράς του ΑΔ.
i) Να μετασχηματισθεί το ΑΒΓΔ σε ισοδύναμό του τρίγωνο του οποίου μια κορυφή να είναι το Κ και οι άλλες να βρίσκονται πάνω στην ευθεία ΒΓ.
ii) Να αχθεί από το Κ μια ευθεία που να διαιρεί το τετράπλευρο σε δύο ισοδύναμα μέρη.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και ευθεία ε // ΒΓ, που τέμνει τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ στα Δ και Ε αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:
i) (ΒΔΕ) = (ΓΔΕ), ii) (ΒΑΕ) = (ΓΑΔ),

iii) (ΒΑΕ) + (ΓΑΔ) = (ΑΒΓ), με την επιπλέον υπόθεση ότι τα Δ, Ε είναι μέσα των ΑΒ, ΑΓ αντίστοιχα.

2. Θεωρούμε τρίγωνο ΑΒΓ και σημείο Δ της πλευράς του ΒΓ, ώστε $B\Delta = \frac{\lambda}{\lambda^2+4}B\Gamma, \lambda > 0$. Να αποδείξετε ότι:

i) $(AB\Delta) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2+4}(AB\Gamma)$,

ii) $(AB\Delta) \leq \frac{1}{4}(AB\Gamma)$.

3. Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και η διχοτόμος του ΑΔ. Με τη θεωρία του εμβαδού να αποδείξετε ότι $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma}$ (Θεώρημα διχοτόμου).

4. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ με β = 3γ, ΑΔ μία διχοτόμος του και ΒΕ μία διάμεσός του. Να αποδείξετε ότι:

i) $(ΑΒΔ) = \frac{1}{3}(ΑΔΓ)$ (ΑΒΔ) ,

ii) (ΑΒΔ)·(ΔΕΓ) = (ΑΔΓ)·(ΒΕΔ),

iii) $(ΔΕΓ) = \frac{3}{8}(ΑΒΓ)$.

5. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ = 6cm και $\hat{Α}$ = 120°.

i) Να βρεθεί το εμβαδόν του,

ii) Αν Ε είναι σημείο της ΑΓ τέτοιο, ώστε $ΑΕ = \frac{1}{3}ΑΓ$ και ΑΔ το ύψος του τριγώνου ΑΒΓ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΔΕΓ.

iii) Αν η παράλληλη από το Α προς τη ΒΓ τέμνει την προέκταση της ΔΕ στο Ζ, να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου ΑΕΖ.

6. Θεωρούμε τραπέζιο ΑΒΓΔ (ΑΔ //ΒΓ) και τα μέσα Κ, Λ των ΑΔ, ΒΓ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

i) (ΑΒΛΚ) = (ΚΛΓΔ),

ii) (ΜΑΒ) = (ΜΓΔ), για οποιοδήποτε σημείο Μ του ΚΛ.

7. Θεωρούμε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (Â = 1 └) με ΑΒ = γ. Διαιρούμε την πλευρά ΑΒ σε ν ίσα τμήματα (ν φυσικός, ν ≥ 2) και από τα σημεία διαίρεσης φέρουμε παράλληλες προς την ΑΓ.

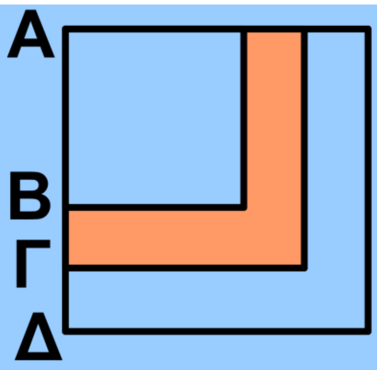
i) Να υπολογισθούν ως συνάρτηση του γ τα εμβαδά των ν σχημάτων στα οποία διαιρέθηκε το τρίγωνο ΑΒΓ.

ii) Χρησιμοποιώντας το (i) να αποδείξετε ότι

$1 + 3 + 5 + ... + (2ν - 1) = ν^2$.

8. Δύο τετράγωνα ΑΒΓΔ και ΔΕΖΗ έχουν κοινή την κορυφή Δ και εμβαδόν 36 το καθένα. Αν οι πλευρές ΒΓ και ΕΖ έχουν κοινό μέσο Μ, να βρεθεί το εμβαδόν του σχήματος ΑΒΜΖΗΔ.

9. Τρία τετράγωνα των οποίων τα μήκη των πλευρών είναι ακέραιοι αριθμοί, έχουν κοινή κορυφή Α και



είναι τοποθετημένα το ένα πάνω στο άλλο,όπως δείχνει το σχήμα. Αν ΒΓ = ΓΔ και η γραμμοσκιασμένη περιοχή έχει εμβαδόν 17, να βρεθεί το εμβαδόν του μικρότερου και του μεγαλύτερου τετραγώνου.

10. Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και τρεις θετικοί αριθμοί λ, μ, ν. Να φέρετε δύο ευθείες παράλληλες προς τη ΒΓ που να χωρίζουν το τρίγωνο σε τρία μέρη ανάλογα των αριθμών λ, μ, ν.

11. i) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείου Μ. Αν η ΑΜ τέμνει την ΒΓ στο Δ, να αποδείξετε ότι:

α) $\dfrac{ΒΔ}{ΔΓ} = \dfrac{(ΑΜΒ)}{(ΑΜΓ)}$, β) $\dfrac{ΜΔ}{ΑΔ} = \dfrac{(ΒΜΓ)}{(ΑΒΓ)}$,

ii) Έστω τρίγωνο ΑΒΓ και εσωτερικό του σημείο Μ. Αν οι ευθείες ΑΜ, ΒΜ και ΓΜ τέμνουν τις πλευρές ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ στα Δ, Ε και Ζ αντίστοιχα να αποδείξετε ότι $\dfrac{ΑΕ}{ΕΓ} + \dfrac{ΑΖ}{ΖΒ} = \dfrac{ΑΜ}{ΜΔ}$

ΙΣΤΟΡΙΚΟ ΣΗΜΕΙΩΜΑ

Το Πυθαγόρειο θεώρημα στα «Στοιχεία» του Ευκλείδη αποδεικνύεται στην προτελευταία πρόταση (Πρόταση 47) του Βιβλίου Ι.

Έστω ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{Α}$ ορθή. Το τετράγωνο που κατασκευάζεται επί της ΒΓ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των τετραγώνων που κατασκευάζονται επί της ΑΒ και ΑΓ.

Φέρουμε την ΑΖ παράλληλη στις ΒΔ, ΓΕ και τις ευθείες ΑΔ και ΘΓ.

Αφού οι γωνίες $B\hat{A}\Gamma$, $B\hat{A}I$ είναι ορθές, προκύπτει ότι τα τμήματα ΙΑ, ΑΓ βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

Το ίδιο και τα τμήματα ΒΑ, ΑΗ. Αφού οι γωνίες $\Delta\hat{B}\Gamma$, $\Theta\hat{B}A$ είναι ορθές, έχουμε ότι $\Delta\hat{B}\Gamma = \Theta\hat{B}A$, οπότε:

$\Delta\hat{B}\Gamma + A\hat{B}\Gamma = \Theta\hat{B}A + A\hat{B}\Gamma$ ή

$\Delta\hat{B}\Gamma = \Theta\hat{B}\Gamma$.

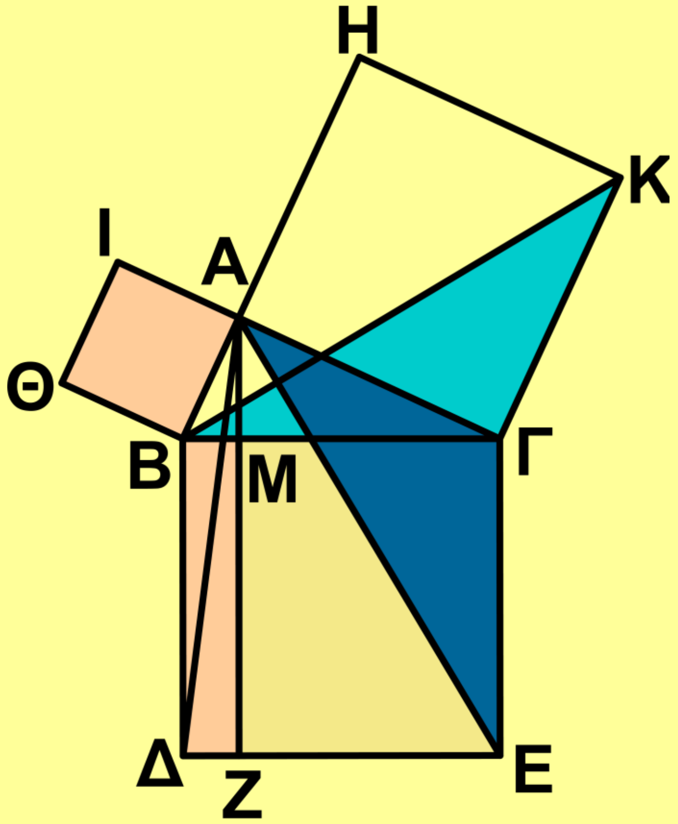
Αφού ΔΒ = ΒΓ, ΘΒ = ΒΑ και

$\Delta\hat{B}A = \Theta\hat{B}\Gamma$, η βάση ΑΔ ισούται με τη βάση ΘΓ και το ΑΒΔ ισούται με το ΘΒΓ. Τώρα το παραλληλόγραμμο ΒΜΖΔ είναι διπλάσιο από το ΑΒΔ, και το τετράγωνο ΙΑΒΘ είναι διπλάσιο από το ΘΒΓ.

Επομένως, το παραλληλόγραμμο ΒΜΖΔ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο ΙΑΒΘ.

Όμοια, αν φέρουμε την ΑΕ και τη ΒΚ μπορεί να αποδειχθεί ότι το παραλληλόγραμμο ΓΜΖΕ είναι ισοδύναμο με το τετράγωνο ΗΚΓΑ.

Επομένως, το τετράγωνο ΒΔΕΓ είναι ισοδύναμο με το άθροισμα των δύο τετραγώνων ΙΑΒΘ και ΗΚΓΑ.



Το Πυθαγόρειο θεώρημα στο Βιβλίο Ι των «Στοιχείων»

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Αντικείμενο του κεφαλαίου είναι η έννοια του εμβαδού. Το εμβαδόν ενός πολυγωνικού χωρίου είναι ένας θετικός αριθμός, που εκφράζει το πλήθος των μοναδιαίων τετραγώνων (ή μερών του) που απαιτούνται για να καλύψουν την έκτασή του. Δεχόμαστε την αλήθεια των εξής ιδιοτήτων:

- **Ίσα πολυγωνικά χωρία έχουν ίσα εμβαδά.**
- **Αν ένα πολυγωνικό χωρίο (ή μια πολυγωνική επιφάνεια) χωρίζεται σε πεπερασμένου πλήθους πολυγωνικά χωρία, που δεν έχουν κοινά εσωτερικά σημεία, τότε το εμβαδόν του ισούται με το άθροισμα των εμβαδών των επιμέρους πολυγωνικών χωρίων.**

Ευθύγραμμα σχήματα με το ίδιο εμβαδόν λέγονται ισοδύναμα.

Με σκοπό την παραγωγή των τύπων υπολογισμού του εμβαδού βασικών ευθύγραμμων σχημάτων δεχόμαστε ότι το εμβαδόν τετραγώνου πλευράς α είναι Ε = $α^2$. Στηριζόμενοι σ. αυτό αποδεικνύουμε ότι το εμβαδόν Ε ορθογωνίου με πλευρές α, β είναι Ε = αβ. Στη συνέχεια μετασχηματίζοντας το παραλληλόγραμμο σε ορθογώνιο βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού Ε ενός παραλληλογράμμου. Θεωρώντας πλέον το τρίγωνο ως το μισό κατάλληλου παραλληλογράμμου βρίσκουμε τον τύπο του εμβαδού ενός τριγώνου. Τέλος χωρίζοντας ένα τραπέζιο σε δύο τρίγωνα βρίσκουμε ότι το εμβαδόν Ε ενός τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:

$$Ε = \frac{Β + β}{2}υ.$$

Στη συνέχεια δίνουμε και άλλους τύπους για το εμβαδόν τριγώνου.
Ως πόρισμα αυτών καταλήγουμε στο Νόμο των ημιτόνων

$$\frac{\alpha}{\eta\mu A} = \frac{\beta}{\eta\mu B} = \frac{\gamma}{\eta\mu \Gamma} = 2R.$$

Στη συνέχεια εξετάζουμε τη σχέση των εμβαδών δύο όμοιων πολυγώνων.
Επίσης, αποδεικνύουμε ότι για δύο τρίγωνα ΑΒΓ και Α΄Β΄Γ΄ με

$\hat{A} = \hat{A}'$ **ή** $\hat{A} + \hat{A}' = 180^o$ **ισχύει ότι .**

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \frac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}$$

Τέλος, αποδεικνύουμε ότι κάθε κυρτό πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τετράγωνο, αποδεικνύοντας πρώτα ότι το πολύγωνο μετασχηματίζεται σε ισοδύναμό του τρίγωνο και αυτό σε ισοδύναμο τετράγωνο.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΟ ΔΙΑΓΡΑΜΜΑ

ΕΜΒΑΔΟΝ

Πολυγώνων

Τετραγώνου: $E = \alpha^2$

Ορθογωνίου: $E=\alpha\cdot\beta$

Παραλληλογράμμου:

$$E = \alpha\cdot\upsilon_\alpha = \beta\cdot\upsilon_\beta$$

Τριγώνου: $E = \frac{1}{2}\alpha\upsilon_\alpha = \frac{1}{2}\beta\upsilon_\beta = \frac{1}{2}\gamma\upsilon_\gamma$

$$E = \tau\rho$$

$$E = \frac{\alpha\beta\gamma}{4R}$$

$$E = \frac{1}{2}\beta\gamma\eta\mu A = \frac{1}{2}\gamma\alpha\eta\mu B = \frac{1}{2}\alpha\beta\eta\mu\Gamma$$

Τραπεζίου: $E = \frac{1}{2}(B+\beta)\cdot\upsilon$

Ρόμβου (και τετραπλεύρου με κάθετες διαγωνίους): $E = \frac{1}{2}\delta_1\cdot\delta_2$

Πολυγωνικών Επιφανειών

$$(\Pi.E.)=(\Pi_1)+(\Pi_2)+\ \dots\ +(\Pi_\nu)$$

Εμβαδόν και ομοιότητα

$$\frac{(AB\Gamma)}{(A'B'\Gamma')} = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha'}, \text{ αν } \upsilon_\alpha = \upsilon_{\alpha'} \\ \dfrac{\upsilon_\alpha}{\upsilon_{\alpha'}}, \text{ αν } \alpha = \alpha' \\ \dfrac{\beta\gamma}{\beta'\gamma'}, \text{ αν } \hat{A} = \hat{A}' \text{ ή } \hat{A} + \hat{A}' = 180^\circ \\ \lambda^2, \text{ αν } \overset{\Delta}{AB\Gamma} \approx \overset{\Delta}{A'B'\Gamma'} \text{ και λ ο λόγος ομοιότητας} \end{cases}$$

$$\frac{(AB\Gamma\cdots K)}{(A'B'\Gamma'\cdots K')} = \lambda^2,$$ αν $AB\Gamma\cdots K \approx A'B'\Gamma'\cdots K'$ και λ ο λόγος ομοιότητας

Τετραγωνισμός πολυγώνου

- Μετασχηματισμός πολυγώνου σε ισοδύναμο τρίγωνο
- Μετασχηματισμός τριγώνου σε ισοδύναμο τετράγωνο

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 7ου ΤΟΜΟΥ