ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Αδαμόπουλος Λεωνίδας
Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

Δαμιανού Χαράλαμπος
Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Σβέρκος Ανδρέας
Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής
Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Μακρής Κωνσταντίνος
Σχολικός Σύμβουλος

Τσικαλουδάκης Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

Γλωσσική Επιμέλεια:
Μπουσούνη Λία
Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

Δακτυλογράφηση:
Μπολιώτη Πόπη

Σχήματα:
Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».

Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο

ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης
ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

ΕΣΠΑ 2007-2013
πρόγραμμα για την ανάπτυξη
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση
των προσαρμογών και
η επιστημονική επιμέλεια
του προσαρμοσμένου βιβλίου
πραγματοποιείται από τη Μονάδα
Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου
Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου
για μαθητές με μειωμένη όραση
από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ
πραγματοποιείται με βάση
τις προδιαγραφές που έχουν
αναπτυχθεί από ειδικούς
εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ

ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ

ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ

Η συγγραφή και η επιστημονική
επιμέλεια του βιβλίου
πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα
του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 1ος

Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

ΠΡΟΛΟΓΟΣ

Το βιβλίο Μαθηματικά και στοιχεία Στατιστικής περιλαμβάνει την ύλη των Μαθηματικών που προβλέπεται από το πρόγραμμα σπουδών της Γενικής Παιδείας της Γ΄ τάξης του Ενιαίου Λυκείου, του οποίου η εφαρμογή αρχίζει από το σχολικό έτος 1999-2000. Απευθύνεται σε όλους τους μαθητές ανεξάρτητα από την κατεύθυνση που ακολουθούν. Γι'αυτό περιορίσαμε σημαντικά στο βιβλίο τους αυστηρούς ορισμούς και τις αποδείξεις και το εμπλουτίσαμε με πολλές εφαρμογές και παραδείγματα, που ανταποκρίνονται στις δυνατότητες και στα

ενδιαφέροντα όλων των μαθητών. Επίσης καταβλήθηκε ιδιαίτερη προσπάθεια, ώστε, να είναι δυνατή η ολοκλήρωση της διδασκαλίας του στο χρόνο που προβλέπεται από το εγκεκριμένο ωρολόγιο πρόγραμμα. Το βιβλίο αποτελείται από τρία κεφάλαια.

• Στο πρώτο κεφάλαιο εισάγεται η έννοια της παραγώγου. Για τον ορισμό της λαμβάνεται υπόψη η ιστορική πορεία της εξέλιξης της έννοιας. Έτσι, προηγείται το πρόβλημα του καθορισμού της εφαπτομένης μιας καμπύλης σε ένα σημείο της και του προσδιορισμού της στιγμιαίας ταχύτητας ενός σώματος. Οι βασικές ιδιότητες της παραγώγου σχετικά με τη μονοτονία και τα ακρότατα μιας συνάρτησης παρουσιάζονται εποπτικά με τη βοήθεια κατάλληλων παραδειγμάτων.

• Στο δεύτερο κεφάλαιο παρουσιάζονται συστηματικότερα τα στοιχεία Περιγραφικής Στατιστικής που γνώρισαν οι μαθητές στο Γυμνάσιο, τα οποία συμπληρώνονται με μερικές χρήσιμες ιδιότητες της μέσης τιμής και της διασποράς καθώς και με την παλινδρόμηση και τη γραμμική συσχέτιση δύο μεταβλητών. Η παρουσίαση των εννοιών και της μεθοδολογίας της Στατιστικής, όπως άλλωστε επιβάλλεται από τη φύση της, είναι πιο αναλυτική από ό,τι στην Άλγεβρα και στη Γεωμετρία.

• Στο τρίτο κεφάλαιο γίνεται μια εισαγωγή στη Θεωρία των Πιθανοτήτων και στις σχετιζόμενες με αυτήν

μεθόδους απαρίθμησης. Η από-
δειξη των ιδιοτήτων της πιθανότη-
τας ενός ενδεχομένου γίνεται μόνο
στην περίπτωση που τα απλά εν-
δεχόμενα είναι ισοπίθανα. Η Θεω-
ρία των Πιθανοτήτων ασχολείται με
καταστάσεις όπου υπάρχει αβεβαι-
ότητα, και αυτό την κάνει ιδιαίτερα
σημαντική στις εφαρμογές της κα-
θημερινής ζωής.

Τα οποιαδήποτε σχόλια, παρατη-
ρήσεις ή κρίσεις για το βιβλίο από
συναδέλφους, από μαθητές και
από κάθε πολίτη που ενδιαφέρεται
για τα ζητήματα της παιδείας θα εί-
ναι ιδιαίτερα ευπρόσδεκτα από τη
συγγραφική ομάδα. Παρακαλούμε
να αποσταλούν στο Παιδαγωγικό
Ινστιτούτο, Μεσογείων 396, 15310
Αγία Παρασκευή.

Μάρτιος 1999

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Εισαγωγή

Στο χώρο της επιστήμης το 17ο αιώνα κυριαρχούσε η μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων, καθώς και η μελέτη της κίνησης ενός σώματος πάνω ή κοντά στη Γη. Στη μελέτη αυτή προφανώς σημαντικό ρόλο έπαιζε ο προσδιορισμός του μέτρου της ταχύτητας και της διεύθυνσης της κίνησης του σώματος σε μια δεδομένη χρονική στιγμή. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, αν η θέση του σώματος μια χρονική

στιγμή t εκφράζεται με τη συνάρτηση $x = f(t)$, τότε ο προσδιορισμός του μέτρου και της διεύθυνσης της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t ανάγεται στον προσδιορισμό του ρυθμού μεταβολής **της $x = f(t)$ ως προς t ή, όπως ονομάστηκε αργότερα,** της παραγώγου της **$x = f(t)$. Έτσι, προβλήματα σχετικά με την κίνηση ενός σώματος, καθώς και άλλα που θα συναντήσουμε αργότερα, οδήγησαν στη γένεση του Διαφορικού Λογισμού. Θεμελιωτές του είναι οι Newton (1642-1727) και Leibniz (1646-1716), οι οποίοι εισήγαγαν τη γενική έννοια της "παραγώγου" και του "διαφορικού", βελτίωσαν τις μεθόδους του Διαφορικού Λογισμού και τις χρησιμοποίησαν στην επίλυση προβλημάτων**

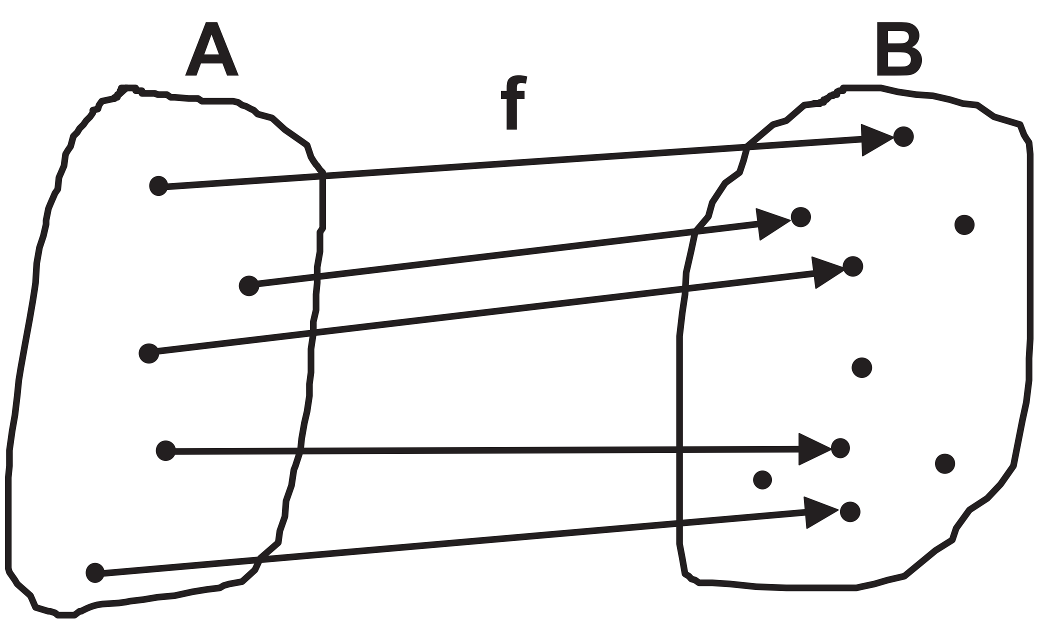
της Γεωμετρίας και της Μηχανικής. Η ανάπτυξη του Διαφορικού Λογισμού δε σταμάτησε το 17ο αιώνα, αλλά συνεχίστηκε το 18ο αιώνα με τη σημαντική συμβολή των αδελφών Jacob Bernoulli (1654-1705) και Johann Bernoulli (1667-1748), του Euler (1707-1783), κορυφαίου μαθηματικού της εποχής, του Lagrange (1736-1813) και πολλών άλλων. Τέλος, η αυστηρή θεμελίωση του Διαφορικού Λογισμού έγινε από τους μαθηματικούς του 19ου αιώνα όπως του Bolzano (1781-1848), του Cauchy (1789-1857) και του Weierstrass (1815-1897).

1.1 ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Ορισμός Συνάρτησης

Είδαμε σε προηγούμενες τάξεις ότι συνάρτηση (function) είναι μια διαδικασία με την οποία κάθε στοιχείο ενός συνόλου A αντιστοιχίζεται σε ένα ακριβώς στοιχείο κάποιου άλλου συνόλου B.

1



Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με συναρτήσεις στις οποίες το σύνολο Α, που λέγεται πεδίο ορισμού της συνάρτησης, είναι υποσύνολο του συνόλου R των πραγματικών αριθμών, ενώ το Β συμπίπτει με το R. Οι συναρτήσεις αυτές λέγονται **πραγματικές συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής** και τις οποίες στο εξής θα τις λέμε απλώς **συναρτήσεις**. Η συνάρτηση συμβολίζεται συνήθως με ένα από τα μικρά γράμματα f, g, h, φ, σ κτλ. του λατινικού ή του ελληνικού αλφαβήτου.

Έστω λοιπόν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α. Αν με τη συνάρτηση αυτή το $x \in A$ αντιστοιχίζεται στο $y \in B$, τότε γράφουμε

$$y = f(x)$$

και διαβάζουμε “y ίσον f του x”. Το f(x) λέγεται **τιμή της f στο x.** Το γράμμα x, που συμβολίζει οποιοδήποτε στοιχείο του Α, ονομάζεται **ανεξάρτητη μεταβλητή**, ενώ το y, που παριστάνει την τιμή της συνάρτησης στο x και εξαρτάται από την τιμή του x, λέγεται **εξαρτημένη μεταβλητή**.
Σε μια συνάρτηση συνήθως η τιμή της εκφράζεται με έναν αλγεβρικό τύπο, για παράδειγμα $f(x)=\sqrt{1-x^2}$.
Σ’αυτή την περίπτωση λέμε: “η συνάρτηση f με $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ” ή “η συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ ” ή “η συνάρτηση $y=\sqrt{1-x^2}$ ” ή, απλούστερα, “ η συνάρτηση $\sqrt{1-x^2}$ ”.

Όταν το f(x) εκφράζεται μόνο με έναν αλγεβρικό τύπο, τότε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το "ευρύτερο" υποσύνολο του R στο οποίο το f(x) έχει νόημα πραγματικού αριθμού. Έτσι, η παραπάνω συνάρτηση $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $1-x^2 \geq 0$, δηλαδή το διάστημα $\Delta = [-1, 1]$, η συνάρτηση $g(x)=\dfrac{3}{x-2}$ έχει ως πεδίο ορισμού το σύνολο $A = R - \{2\}$, δηλαδή το R χωρίς το 2, ενώ η συνάρτηση $h(x) = 3x - 1$ έχει ως πεδίο ορισμού ολόκληρο το σύνολο R των πραγματικών αριθμών.

ΣΧΟΛΙΟ

Αν και συνήθως χρησιμοποιούμε το γράμμα f για το συμβολισμό μιας συνάρτησης και τα γράμματα x και y για το συμβολισμό της ανεξάρτητης και της εξαρτημένης μεταβλητής αντιστοίχως, ωστόσο μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και άλλα γράμματα. Έτσι, για παράδειγμα, οι τύποι $f(x)=\frac{1}{2}gx^2$ και $s(t)=\frac{1}{2}gt^2$ ορίζουν την ίδια συνάρτηση.

Πράξεις με Συναρτήσεις

Αν δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται και οι δύο σε ένα σύνολο A, τότε ορίζονται και οι συναρτήσεις:

- Το άθροισμα $S = f + g$, με $S(x) = f(x) + g(x),\ x \in A$
- Η διαφορά $D = f - g$, με $D(x) = f(x) - g(x),\ x \in A$
- Το γινόμενο $P = f \cdot g$, με $P(x) = f(x) \cdot g(x),\ x \in A$ και
- Το πηλίκο $R = \dfrac{f}{g}$, με $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$, όπου $x \in A$ και $g(x) \neq 0$.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = x^2 - 1$ και $g(x) = x + 1$, τότε

- $S(x) = x^2 - 1 + x + 1 = x(x + 1)$
- $D(x) = x^2 - 1 - x - 1 = x^2 - x - 2 =$
  $= (x - 2)(x + 1)$

- $P(x) = (x^2 - 1)(x + 1) = (x + 1)^2 (x - 1)$

- $R(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1} = x - 1$, όπου $x \neq -1$.

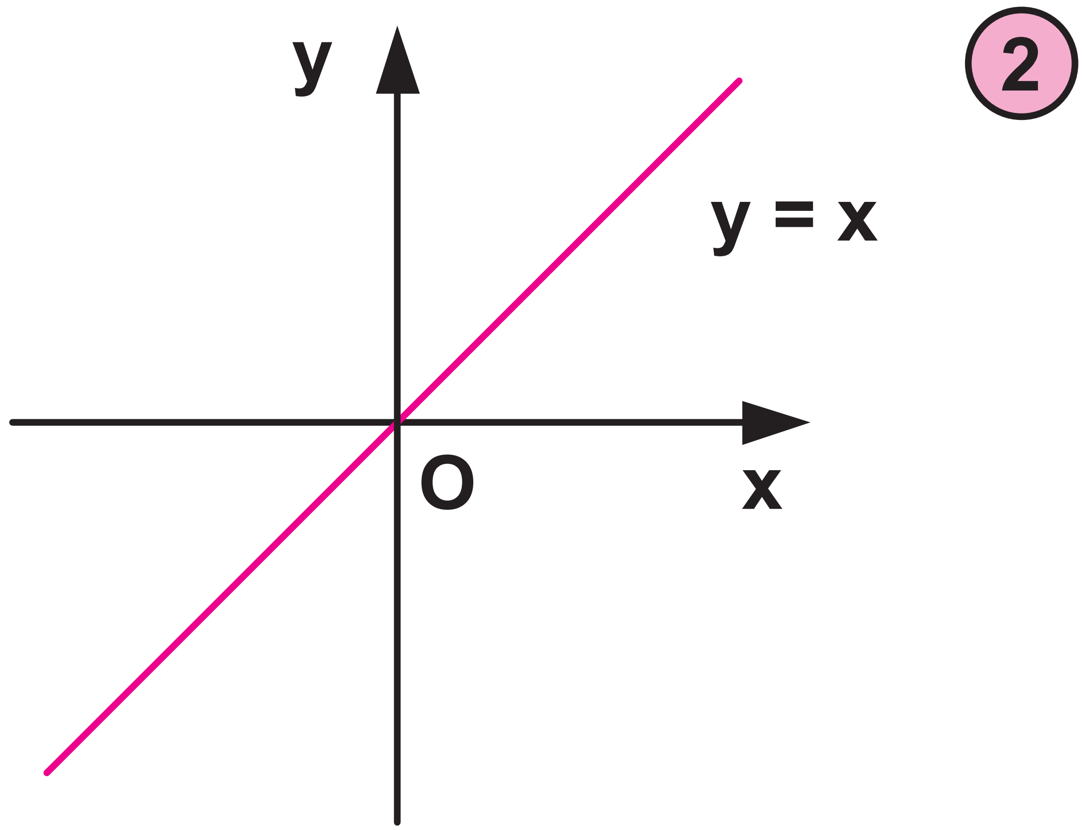
Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A. Όπως είδαμε σε προηγούμενες τάξεις **γραφική παράσταση** ή **καμπύλη** της f σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων Oxy λέγεται το σύνολο των σημείων $M(x,(f(x))$ για όλα τα $x \in A$. Επομένως, ένα σημείο $M(x, y)$ του επιπέδου των αξόνων ανήκει στην καμπύλη της f, μόνο όταν $y = f(x)$.

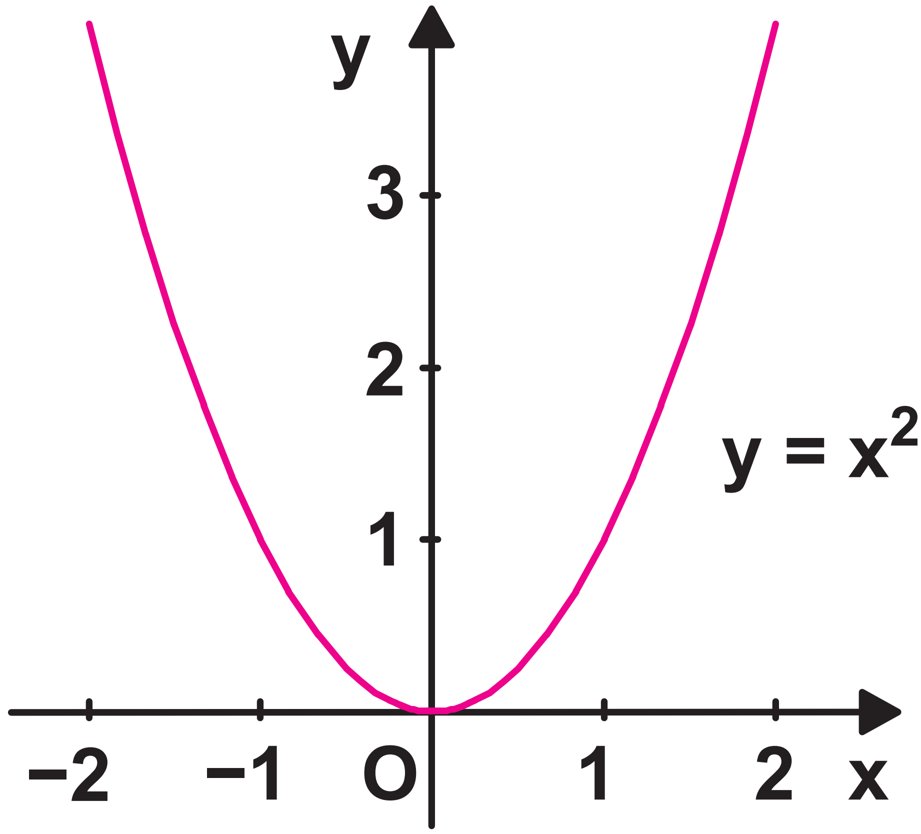
Η εξίσωση λοιπόν y = f(x) επαληθεύεται μόνο από τα ζεύγη (x, y) που είναι συντεταγμένες σημείων της γραφικής παράστασης της f και λέγεται **εξίσωση της γραφικής παράστασης της f**.

Είναι πολύ χρήσιμο να σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση μιας συνάρτησης.

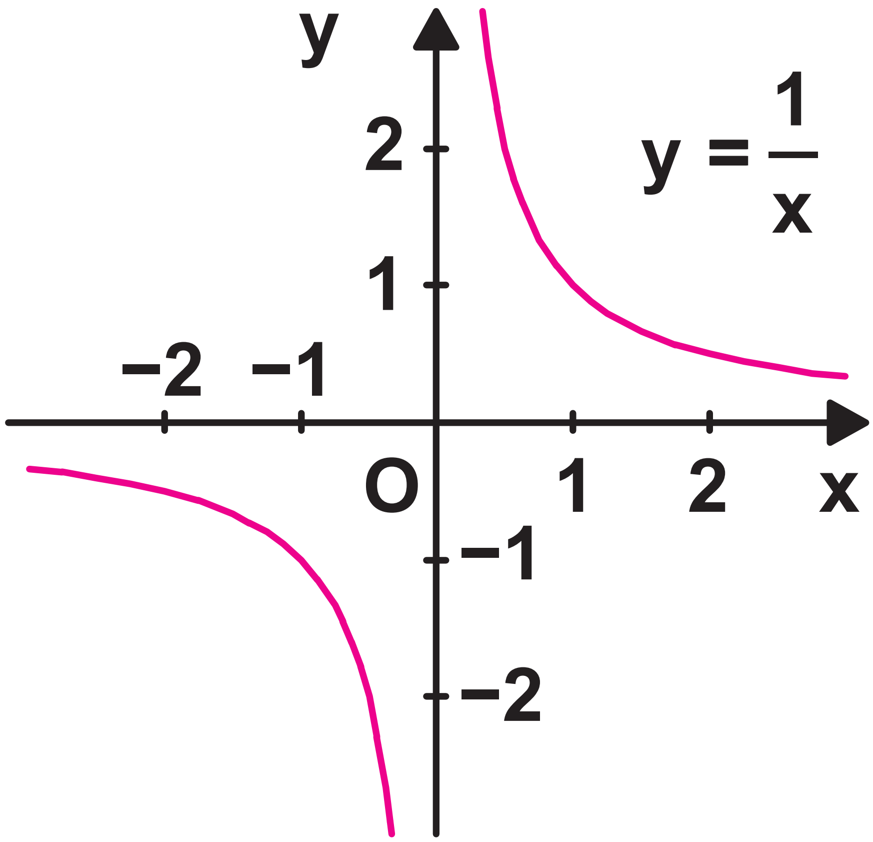
Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις ορισμένων συναρτήσεων που γνωρίσαμε σε προηγούμενες τάξεις.



(α) Η καμπύλη της συνάρτησης f(x) = x είναι η διχοτόμος της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.

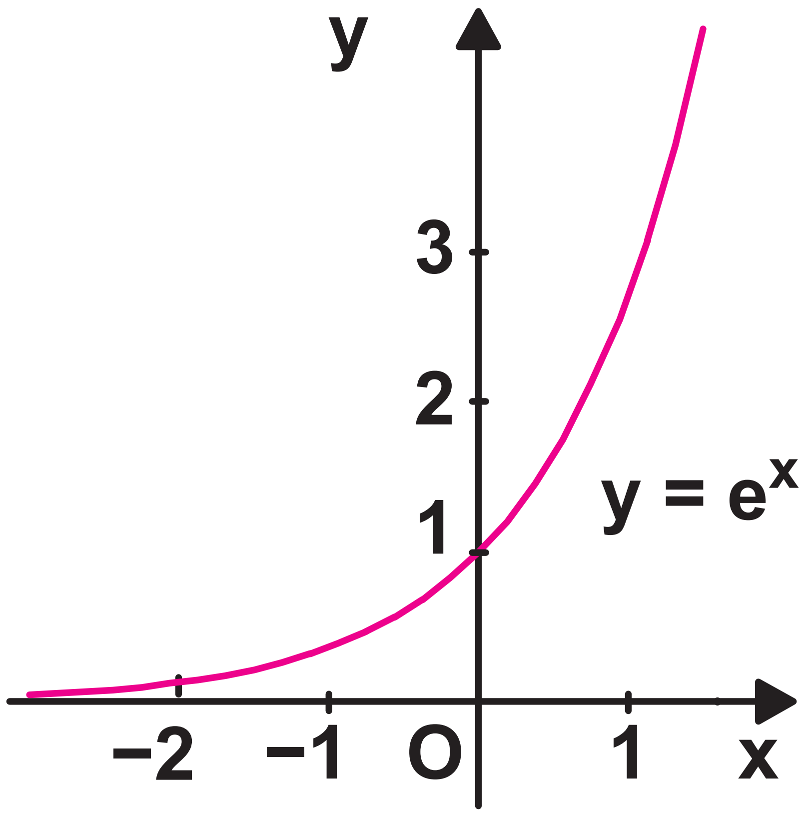


(β) Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια παραβολή.

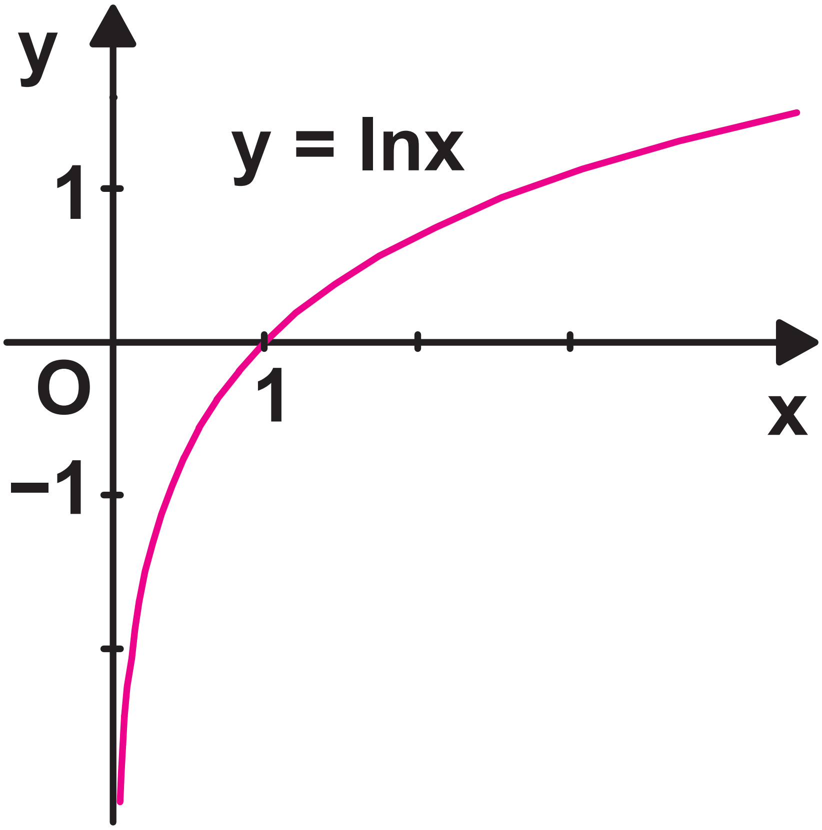


(γ) Η καμπύλη της συνάρτησης

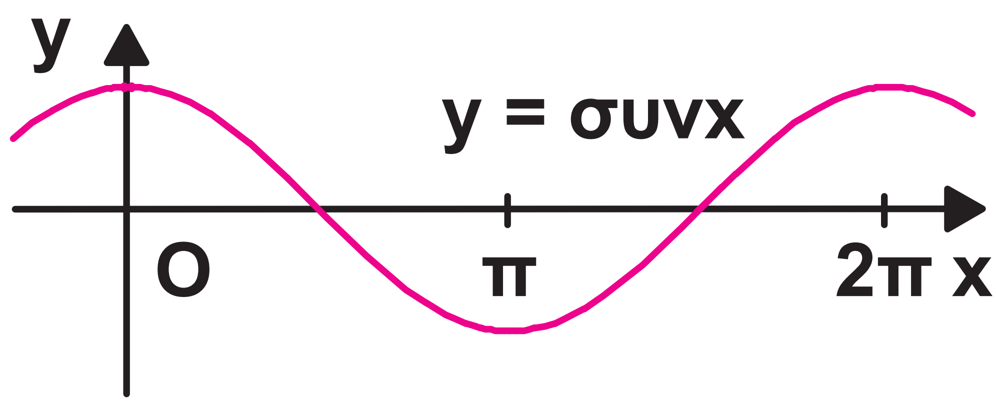
$f(x) = \frac{1}{x}$ είναι μια υπερβολή.

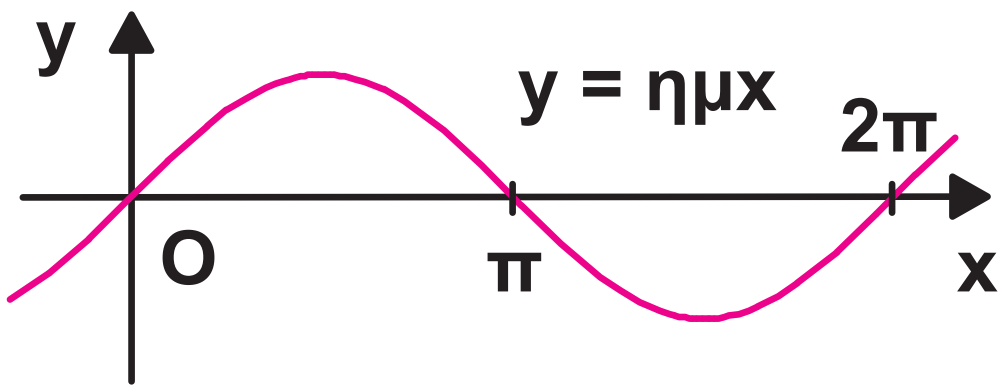


(δ) Η καμπύλη της εκθετικής συνάρτησης $f(x) = e^x$ είναι “πάνω” από τον άξονα x΄x, αφού $e^x > 0$ για κάθε $x \in R$.



(ε) Η καμπύλη της λογαριθμικής συνάρτησης $f(x) = \ln x$ είναι “δεξιά” του άξονα yy΄, αφού ο λογάριθμος ορίζεται μόνο για $x > 0$.



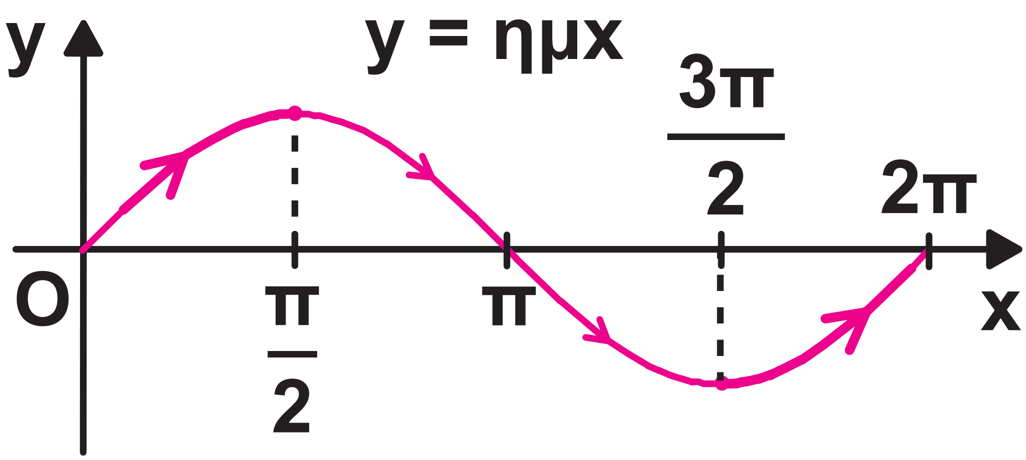


(στ) Οι συναρτήσεις $f(x) = ημx$ και $g(x) = συνx$ είναι περιοδικές με περίοδο $2π$.

Παρατηρούμε ότι στη γραφική παράσταση της $f(x) = \frac{1}{x}$ υπάρχει μια διακοπή στο σημείο $x = 0$. Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πεδίο ορισμού της f δεν περιέχει το μηδέν.

Μονοτονία - Ακρότατα Συνάρτησης

3



• Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$, $x \in [0,2π]$ προκύπτει αμέσως ότι για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[0, \frac{π}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$ είναι

$\eta\mu x_1 < \eta\mu x_2$. Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Το ίδιο συμβαίνει και στο διάστημα $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$. Όμως για δύο οποιαδήποτε σημεία x_1, x_2 του διαστήματος $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ με $x_1 < x_2$, παρατηρούμε ότι $\eta\mu x_1 > \eta\mu x_2$.
Λέμε σ'αυτή την περίπτωση ότι η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu x$ είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

Γενικά:

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$, και **γνησίως φθίνουσα** στο Δ, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) > f(x_2)$.

Μια συνάρτηση που είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα λέγεται **γνησίως μονότονη**.

- Ακόμη, για την παραπάνω συνάρτηση παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in [0,2\pi]$ είναι $\eta\mu x \leq 1 = \eta\mu\frac{\pi}{2}$ και $\eta\mu x \geq -1 = \eta\mu\frac{3\pi}{2}$. Δηλαδή, όπως

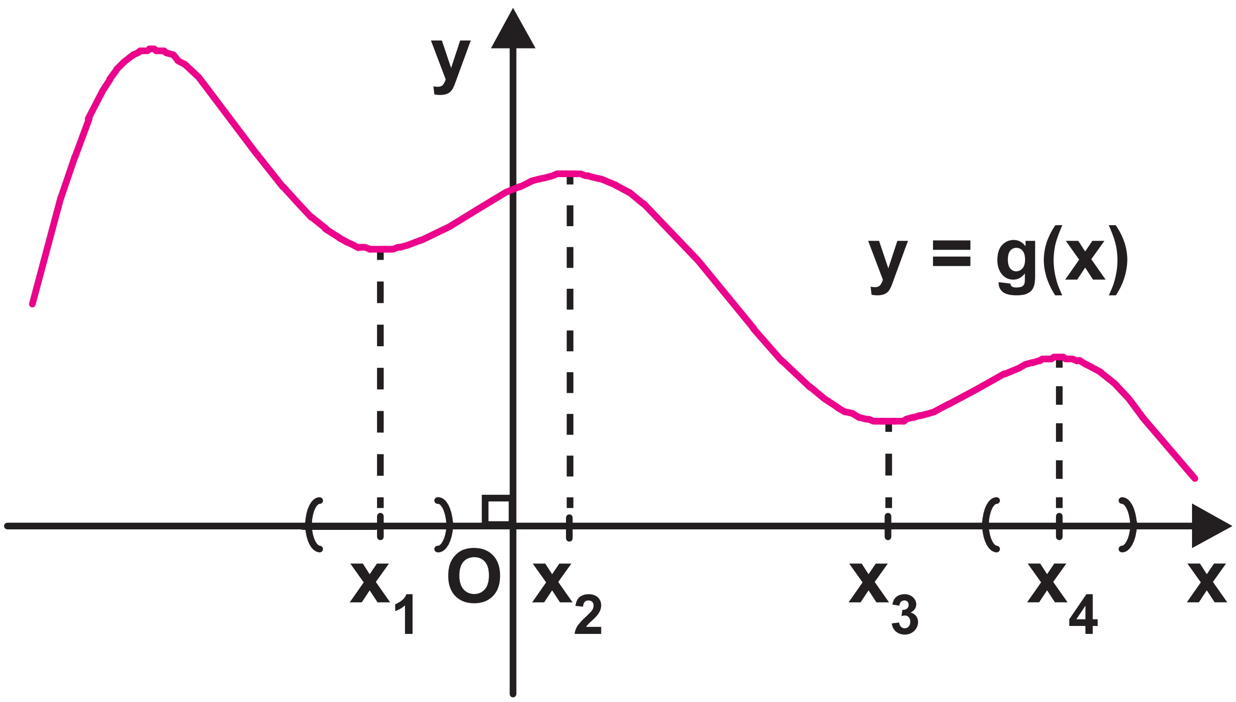
λέμε, η συνάρτηση $f(x) = ημx$ έχει

ολικό μέγιστο (**maximum**) **για** $x = \dfrac{\pi}{2}$

και ολικό ελάχιστο (**minimum**) **για**

$x = \dfrac{3\pi}{2}$.

4



Από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g του σχήματος 4 προκύπτει ότι για $x = x_1$ η τιμή της g είναι

μικρότερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε ένα ανοικτό διάστημα το οποίο περιέχει το x_1, ή, όπως λέμε σε μια **περιοχή** του x_1. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_1 τοπικό ελάχιστο. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_3$. Οι τιμές $g(x_1)$ και $g(x_3)$ λέγονται τοπικά ελάχιστα της συνάρτησης. Επίσης, για $x = x_4$ η τιμή $g(x_4)$ είναι μεγαλύτερη από τις τιμές της g σε όλα τα x που ανήκουν σε μια περιοχή του x_4. Λέμε ότι η συνάρτηση g έχει στο σημείο x_4 τοπικό μέγιστο. Το ίδιο συμβαίνει και για $x = x_2$. Οι τιμές $g(x_2)$ και $g(x_4)$ λέγονται τοπικά μέγιστα της συνάρτησης. Παρατηρούμε ότι ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο. Για παράδειγμα, το

τοπικό ελάχιστο $g(x_1)$ είναι μεγαλύτερο από το τοπικό μέγιστο $g(x_4)$.
Γενικά:

Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A λέμε ότι παρουσιάζει:
Τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \leq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1, και τοπικό ελάχιστο στο $x_2 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_2)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_2.

Τα μέγιστα και τα ελάχιστα μιας συνάρτησης, τοπικά ή ολικά, λέγονται ακρότατα της συνάρτησης.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 31 18/09/2017 10:23

Όριο Συνάρτησης

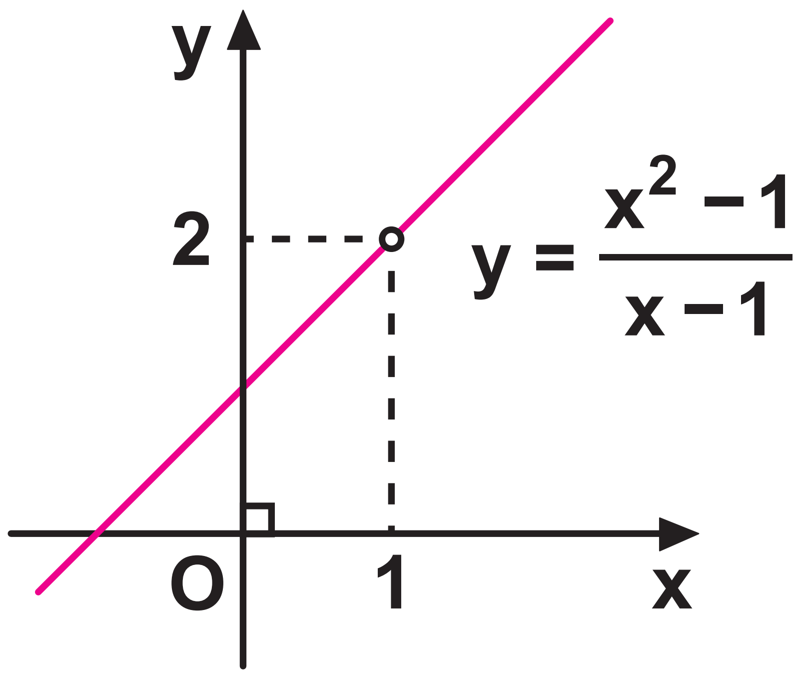
Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$, η οποία δεν ορίζεται για $x = 1$. Ας εξετάσουμε όμως τη συμπεριφορά της f για τιμές του x κοντά στο 1.
Ο παρακάτω πίνακας δείχνει τις τιμές του f(x) για τιμές του x κοντά στο 1.

$x < 1$	f(x)	$x > 1$	f(x)
0,5	1,500000	1,5	2,500000
0,9	1,900000	1,1	2,100000
0,99	1,990000	1,01	2,010000
0,999	1,999000	1,001	2,001000
0,9999	1,999900	1,0001	2,000100

Από τον παραπάνω πίνακα βλέπουμε ότι όταν το x παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 1 (και από τις δύο πλευρές του 1), το f(x) παίρνει τιμές πολύ κοντά στο 2. Στο ίδιο συμπέρασμα φτάνουμε, αν παρατηρήσουμε ότι για $x \neq 1$ είναι

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1,$$

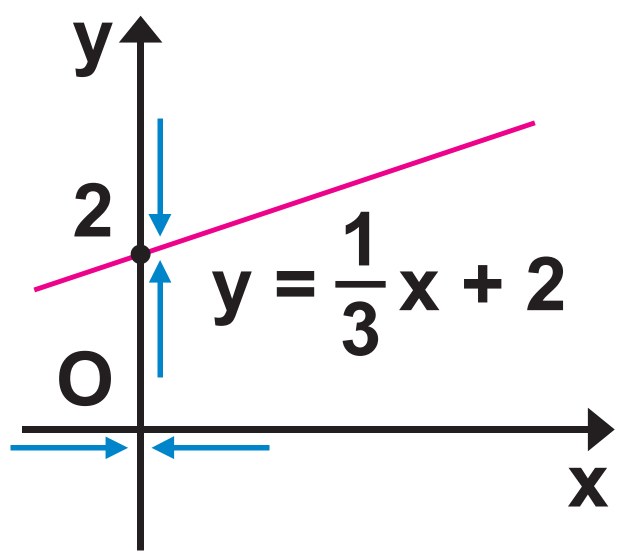
οπότε όταν το x παίρνει τιμές που τείνουν στο 1 $(x \to 1)$, τότε το $f(x) = x + 1$ παίρνει τιμές που τείνουν στο 2 $(x + 1 \to 2)$. Λέμε λοιπόν ότι η f έχει στο σημείο 1 όριο (limit) 2 και γράφουμε $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 2$.



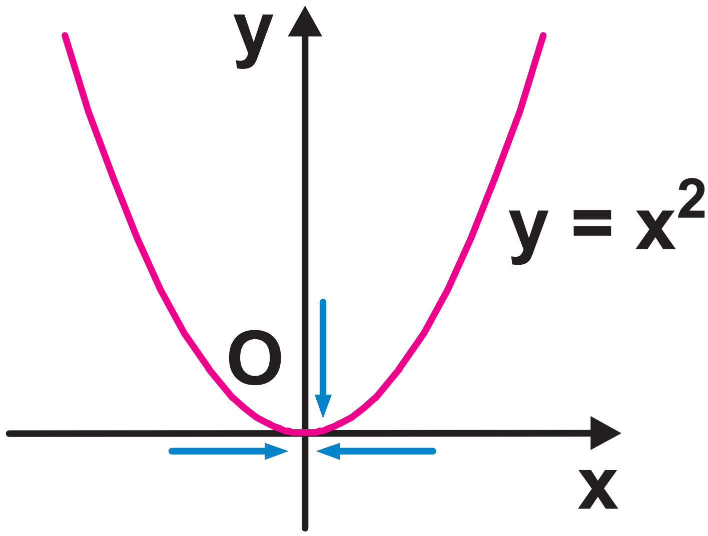
Με το προηγούμενο παράδειγμα παρουσιάσαμε με απλό τρόπο και χωρίς μαθηματική αυστηρότητα την έννοια του ορίου μιας συνάρτησης f σε ένα σημείο x_0, που δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της, υπάρχουν όμως σημεία του πεδίου ορισμού της πολύ κοντά στο x_0. Τίποτα βέβαια δεν αποκλείει την αναζήτηση του ορίου μιας συνάρτησης και σε ένα σημείο x_0 που να ανήκει στο

πεδίο ορισμού της. Για παράδειγμα, έστω η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{3}x + 2$, που είναι ορισμένη στο R. Παρατηρούμε ότι όταν $x \to 0$, το $f(x) \to 2$, δηλαδή $\lim_{x \to 0} f(x) = 2$. Ομοίως, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$ και $\lim_{x \to 0} \sqrt{x} = 0$.

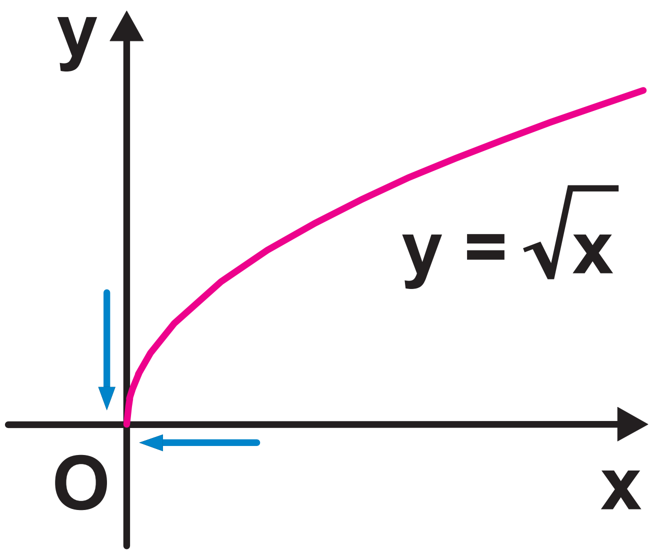
6



(α)



(β)



(γ)

Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν στο x_0 όρια πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή αν $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell_1$ και $\lim_{x \to x_0} g(x) = \ell_2$ όπου ℓ_1 και ℓ_2 πραγματικοί αριθμοί, τότε αποδεικνύεται ότι:

- $\lim_{x \to x_0} (f(x) + g(x)) = \ell_1 + \ell_2$
- $\lim_{x \to x_0} (kf(x)) = k\ell_1$
- $\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \ell_1 \ell_2$
- $\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\ell_1}{\ell_2}$
- $\lim_{x \to x_0} (f(x))^{\nu} = \ell_1^{\nu}$

- $\lim\limits_{x \to x_0} \sqrt[\nu]{f(x)} = \sqrt[\nu]{\ell_1}$.

Έτσι, για παράδειγμα, για την πολυωνυμική συνάρτηση
$f(x) = x^2 + 3x - 9$ έχουμε

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \lim_{x \to 2}(x^2 + 3x - 9) =$$

$$= \lim_{x \to 2} x^2 + 3\lim_{x \to 2} x - \lim_{x \to 2} 9 = 4 + 6 - 9 = 1$$

Παρατηρούμε ότι για τη συνάρτηση
$f(x) = x^2 + 3x - 9$ ισχύει

$$\lim_{x \to 2} f(x) = f(2).$$

Αυτό το εκφράζουμε λέγοντας ότι η συνάρτηση f είναι συνεχής στο
$x_0 = 2$.
Γενικά μια συνάρτηση f με πεδίο

ορισμού Α λέγεται συνεχής, αν για κάθε $x_0 \in A$ ισχύει $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Χαρακτηριστικό γνώρισμα μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα κλειστό διάστημα είναι ότι η γραφική της παράσταση είναι μια συνεχής καμπύλη, δηλαδή για το σχεδιασμό της δε χρειάζεται να σηκώσουμε το μολύβι από το χαρτί.
Αποδεικνύεται ότι οι γνωστές μας συναρτήσεις, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, εκθετικές, λογαριθμικές, αλλά και όσες προκύπτουν από πράξεις μεταξύ αυτών είναι συνεχείς συναρτήσεις. Έτσι ισχύει για παράδειγμα $\lim_{x \to x_0} ημx = ημx_0$,

$\lim_{x \to x_0} συνx = συνx_0$ και

$$\lim_{x \to x_0} \varepsilon\varphi x = \varepsilon\varphi x_0 \text{ (όταν } \sigma\upsilon\nu x_0 \neq 0\text{)}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστούν τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x+5}{4x}$

ii) $\lim\limits_{x \to 8} \left(\sqrt{x-4} + \sqrt{x+1}\right)$

iii) $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$.

ΛΥΣΗ

i) $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{3x+5}{4x} = \dfrac{3 \cdot 5 + 5}{4 \cdot 5} = \dfrac{20}{20} = 1$

ii) $\lim\limits_{x\to 8}\left(\sqrt{x-4}+\sqrt{x+1}\right)=\sqrt{8-4}+$

$+\sqrt{8+1}=\sqrt{4}+\sqrt{9}=2+3=5$

iii) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^2-9}{x+3}=\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{(x+3)(x-3)}{x+3}=$

$=\lim\limits_{x\to -3}(x-3)=-6.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x)=x^3-3x$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$, $f(2)$, $f(-1)$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 41 18/09/2017 10:23

2. Αν $\varphi(t) = t^2 - 5t + 6$, να υπολογίσετε τις τιμές $\varphi(0)$ και $\varphi(1)$. Για ποιες τιμές του t είναι $\varphi(t) = 0$;

3. Αν $h(\theta) = συν\theta - ημ\theta$, να υπολογίσετε τις τιμές $h(0)$ και $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Για ποιες τιμές της γωνίας $\theta \in [0, 2\pi]$ είναι $h(\theta) = 0$;

4. Αν $f(x) = \frac{1}{2}\ln x^2$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(1)$ και $f(e)$.

5. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{2x}{(x-1)(x-2)};$$

6. Για ποιες τιμές του x είναι αρνητική η συνάρτηση
$f(x) = (x - 3)(x - 7)$;
Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης
$$\sigma(x)=\sqrt{(x-3)(x-7)};$$

7. Αν $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ και
$g(x) = 2x - 1$, να βρείτε τις συναρτήσεις $f(x) + g(x)$,
$$f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}.$$

8. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x\to 0}(x^2-3x+4)$

ii) $\lim\limits_{x\to -2}[(2x-1)(x+4)]$

iii) $\lim\limits_{x \to 4}\left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$

iv) $\lim\limits_{x \to 0}(2ημx + 3συνx)$

v) $\lim\limits_{x \to \frac{π}{4}}(3ημx + συνx)$.

9. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim\limits_{x \to -2} \frac{x^2 - 4}{3(x - 2)}$

ii) $\lim\limits_{x \to -1} \frac{5x^2}{x^2 + 1}$

iii) $\lim\limits_{x \to 0}[(x + 1)συνx]$

iv) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{x^2 - 16}{x - 4}$

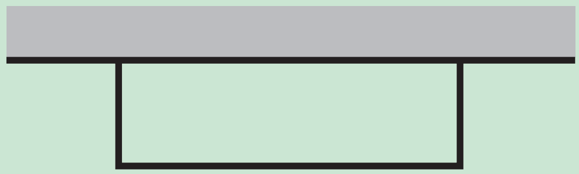
v) $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{x^2 - 25}{x + 5}$

vi) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{2x^2 - 3x - 2}{x - 2}$.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $f(x) = \dfrac{1}{1 + e^{\frac{1}{x}}}$, να δείξετε ότι $f(x) + f(-x) = 1$.

2. Έχουμε περιφράξει με συρματόπλεγμα μήκους 100 m, μια ορθογώνια περιοχή από τις τρεις πλευρές της. Η τέταρτη πλευρά είναι τοίχος. Αν το μήκος του τοίχου που θα χρησιμοποιηθεί είναι x, να εκφράσετε το εμβαδόν της περιοχής ως συνάρτηση του x.



3. Ένα κυλινδρικό φλυτζάνι, ανοικτό από πάνω, κατασκευάζεται έτσι ώστε το ύψος του και το μήκος της βάσης του να έχουν άθροισμα 20 cm. Αν το φλυτζάνι έχει ύψος h cm, να εκφράσετε τον όγκο του ως συνάρτηση του h. Αν η ακτίνα της βάσης του είναι r,

να εκφράσετε το εμβαδόν της επιφάνειάς του ως συνάρτηση του r.

4. Σε ένα τρίγωνο ΑΒΓ είναι ΑΒ = ΑΓ = 10. Αν $B\hat{A}\Gamma = \theta$, να εκφράσετε το ύψος υ του τριγώνου από την κορυφή Β, καθώς και το εμβαδόν του ως συνάρτηση του θ.

5. Να δείξετε ότι

i) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x}-\sqrt{5}}{x-5}=\dfrac{1}{2\sqrt{5}}$

ii) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\sqrt{1+h}-1}{h}=\dfrac{1}{2}$.

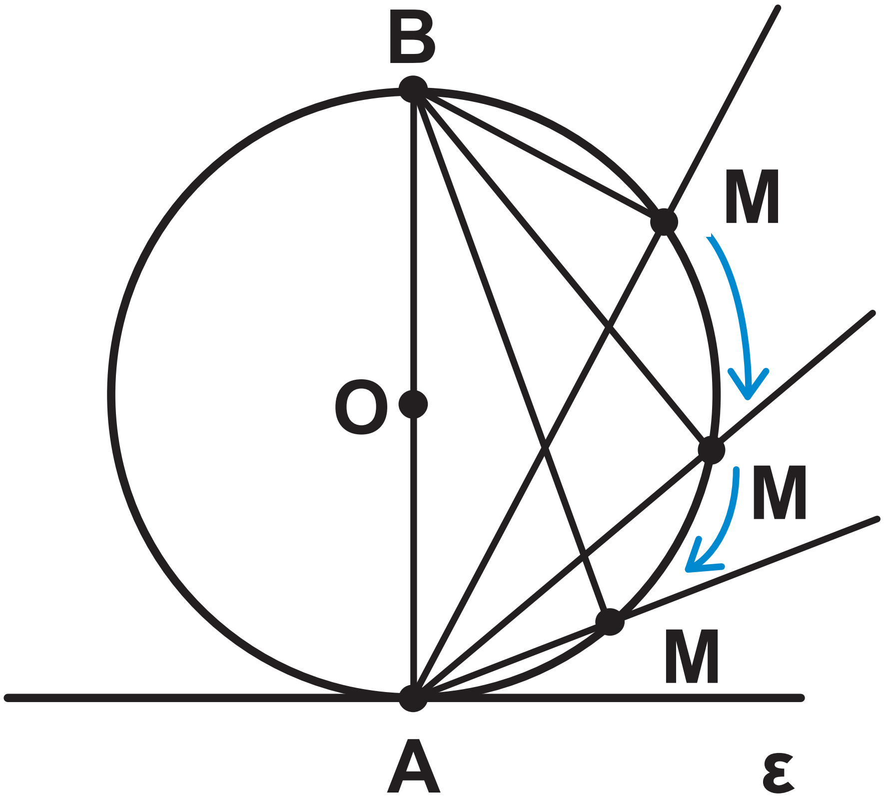
22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 47 18/09/2017 10:23

1.2 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ

Εφαπτομένη Καμπύλης

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι η εφαπτομένη ενός κύκλου (O, R) σε ένα σημείο του A είναι η ευθεία ε που είναι κάθετη στην ακτίνα OA στο σημείο A. Έστω M ένα άλλο σημείο του κύκλου. Επειδή το τρίγωνο MAB είναι ορθογώνιο στο M, το άθροισμα των γωνιών του A και B είναι 90°. Αν υποθέσουμε ότι το M κινούμενο πάνω στον κύκλο πλησιάζει το A, η γωνία B τείνει να γίνει μηδενική, οπότε η γωνία A τείνει να γίνει ορθή. Δηλαδή η τέμνουσα AM τείνει να γίνει κάθετη στην OA που σημαίνει ότι τείνει να συμπέσει με την εφαπτομένη ε. Θα μπορούσαμε επομένως να ορίσουμε ως εφαπτομένη του κύκλου (O, R) στο σημείο A, την οριακή θέση της τέμνουσας AM, καθώς το M κινούμενο πάνω στον κύκλο τείνει να συμπέσει με το A.

Τον ισοδύναμο αυτό ορισμό της εφαπτομένης ενός κύκλου θα τον χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να ορίσουμε την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης σε ένα σημείο της.



7

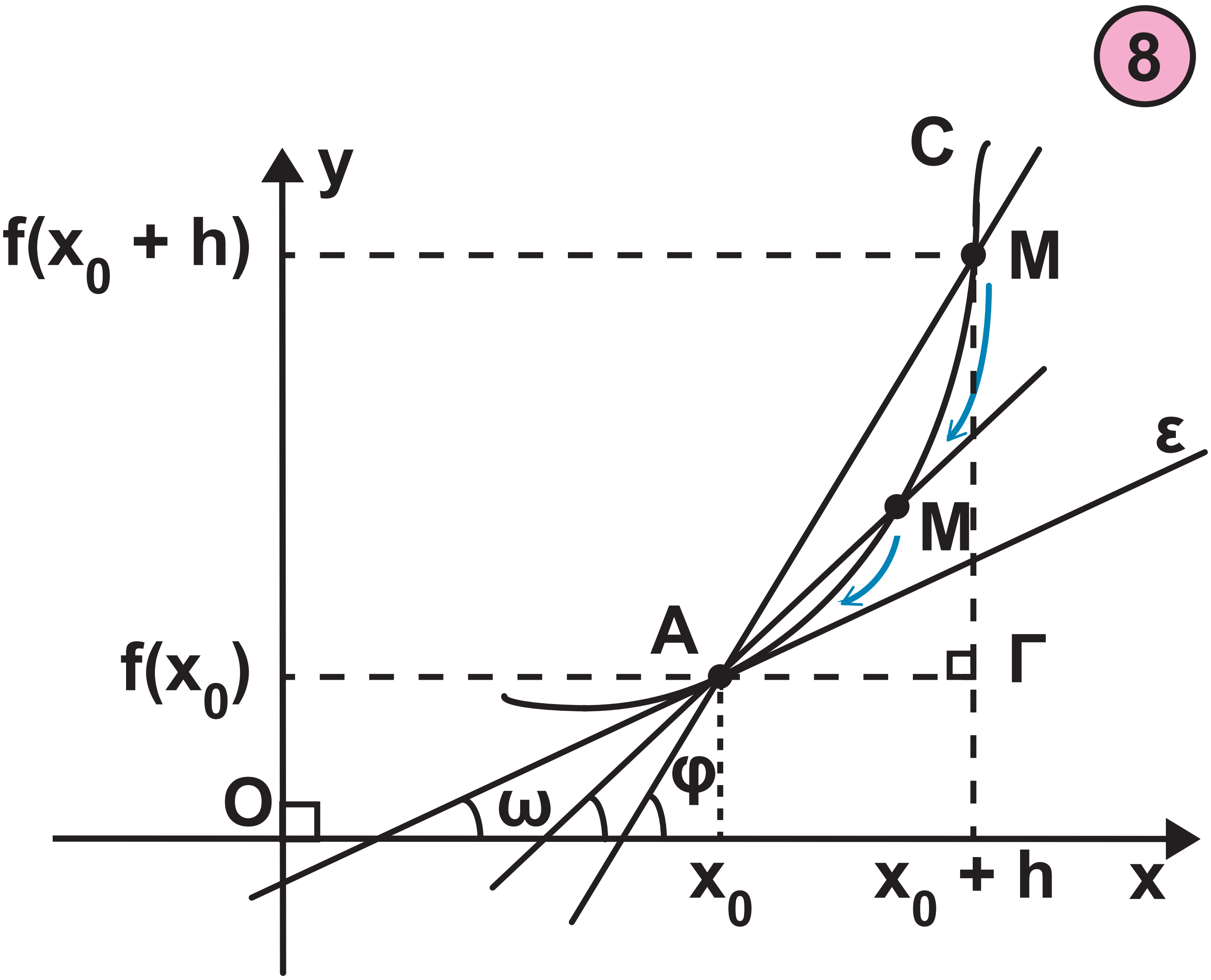
Έστω λοιπόν f μια συνάρτηση και $A(x_0, f(x_0))$ ένα σημείο της γραφικής της παράστασης C.
Παίρνουμε και ένα άλλο σημείο $M(x_0 + h, f(x_0 + h))$ της C με $h \neq 0$.
Παρατηρούμε ότι καθώς το M κινούμενο πάνω στη C πλησιάζει το A, όταν δηλαδή $h \to 0$, τότε η ευθεία AM φαίνεται να παίρνει μια οριακή θέση ε η οποία λέγεται εφαπτομένη

(tangent) της C στο Α. Από το σχήμα έχουμε ότι ο συντελεστής διεύθυνσης της ΑΜ είναι,

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{\text{ΜΓ}}{\text{ΑΓ}} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

οπότε ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της C στο Α θα είναι

$$\varepsilon\varphi\omega = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$



Στιγμιαία Ταχύτητα

Όπως έχει διαπιστωθεί πειραματικά από τον Γαλιλαίο πριν από τέσσερις αιώνες, το διάστημα S που διανύεται σε χρόνο t sec (s) από

ένα σώμα που αφήνεται να πέσει στο κενό εκφράζεται από τον τύπο

$$S(t) = \frac{1}{2}gt^2,$$

όπου $g \cong 9,81\ m/s^2$ είναι η σταθερή επιτάχυνση της βαρύτητας. Ποια όμως θα είναι η ταχύτητα ενός σώματος που πέφτει ελεύθερα σε ένα οποιοδήποτε σημείο της τροχιάς του, για παράδειγμα όταν t = 5 s; Μπορούμε να προσεγγίσουμε το ζητούμενο μέγεθος υπολογίζοντας τη μέση ταχύτητα σε ένα μικρό χρονικό διάστημα για παράδειγμα του ενός δεκάτου του δευτερολέπτου, από t = 5 s στο t = 5,1 s.

Έχουμε:

$$\text{Μέση ταχύτητα} = \frac{\text{διανυθέν διάστημα}}{\text{χρόνο}} =$$

$$= \frac{S(5,1) - S(5)}{0,1} =$$

$$= \frac{4,905(5,1)^2 - 4,905 \cdot 5^2}{0,1} =$$

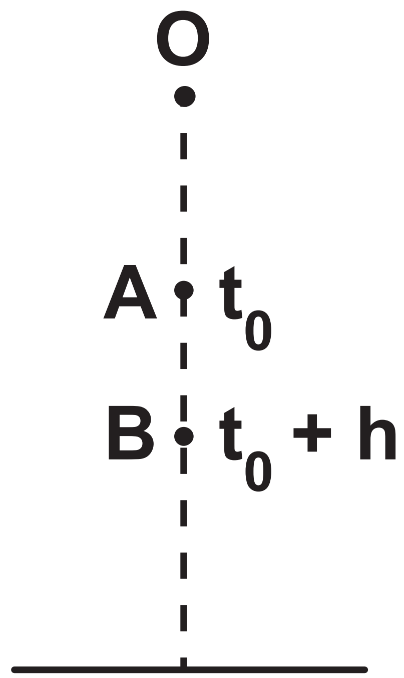
$$= 49,5405 \text{ m/s}.$$

Ο πίνακας που ακολουθεί δείχνει τα αποτελέσματα όμοιων υπολογισμών της μέσης ταχύτητας για ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα.

Χρονικό διάστημα	Μέση ταχύτητα
$5 \leq t \leq 6$	53,955
$5 \leq t \leq 5,1$	49,5405
$5 \leq t \leq 5,05$	49,29525
$5 \leq t \leq 5,01$	49,09905
$5 \leq t \leq 5,001$	49,054905
$5 \leq t \leq 5,0001$	49,050491
$5 \leq t \leq 5,00001$	49,050049

Φαίνεται ότι καθώς μικραίνει το χρονικό διάστημα, η μέση ταχύτητα πλησιάζει ολοένα και περισσότερο στην τιμή 49,05 m/s. Η οριακή αυτή τιμή των μέσων ταχυτήτων σε ολοένα και μικρότερα χρονικά διαστήματα με ένα άκρο το $t = 5$ ορίζεται ως η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος όταν $t = 5$ s. Έτσι η στιγμιαία ταχύτητα του σώματος ύστερα από χρόνο 5 s θα είναι υ = 49,05 m/s.

9



Γενικότερα, ας υποθέσουμε ότι το σώμα ύστερα από t_0 βρίσκεται στο σημείο Α και ας εξετάσουμε πόσο αυξάνεται το διανυόμενο διάστημα, όταν ο χρόνος αυξηθεί κατά h. Το κινητό διανύει σε χρόνο t_0 διάστημα

$$S_1 = OA = S(t_0) = \frac{1}{2}gt_0^2$$

και σε χρόνο $t_0 + h$ διάστημα

$$S_2 = OB = S(t_0 + h) = \frac{1}{2}g(t_0 + h)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}gt_0^2 + \frac{1}{2}g(2t_0h + h^2).$$

Άρα, η αύξηση του διαστήματος σε χρόνο h είναι

$$\Delta S = S_2 - S_1 = AB = \frac{1}{2}g(2t_0h + h^2)$$

και η μέση ταχύτητα στο χρονικό διάστημα από t_0 σε $t_0 + h$ θα είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta S}{(t_0 + h) - t_0} = \frac{\frac{1}{2}g(2t_0 \cdot h + h^2)}{h} =$$

$$= gt_0 + \frac{1}{2}gh.$$

Καθώς όμως ελαττώνεται το h πλησιάζοντας το μηδέν, χωρίς ποτέ να γίνεται ίσο με το μηδέν, η μέση ταχύτητα θα πλησιάζει όλο και περισσότερο στο gt_0. Την οριακή αυτή τιμή τη λέμε στιγμιαία ταχύτητα του κινητού στη χρονική στιγμή t_0 ή απλώς ταχύτητα του κινητού στο t_0.

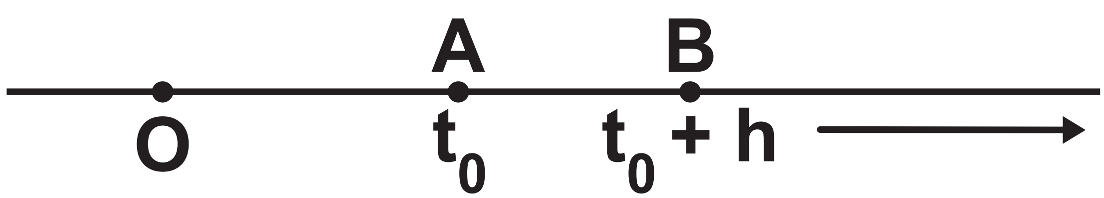
Επομένως, η ταχύτητα υ του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{S(t_0 + h) - S(t_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta S}{h} = gt_0.$$

Προφανώς όταν $t_0 = 5$, τότε
$υ = 9{,}81 \cdot 5 = 49{,}05$ m/s, τιμή την οποία προσεγγίσαμε και προηγουμένως με αριθμητικούς υπολογισμούς.

Την ίδια πορεία μπορούμε να ακολουθήσουμε και για τον υπολογισμό της ταχύτητας ενός κινητού το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση, στη γενικότερη περίπτωση που η τετμημένη του ή, όπως λέμε στη Φυσική, η θέση του τη χρονική στιγμή t εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$.

10



Για να βρούμε την ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0, θεωρούμε το χρονικό διάστημα από t_0 έως $t_0 + h$ με $h \neq 0$. Το κινητό σε χρόνο h μετατοπίζεται κατά $\Delta x = x_2 - x_1 = f(t_0 + h) - f(t_0)$. Επομένως, η μέση ταχύτητα του κινητού στη διάρκεια του χρονικού διαστήματος h θα είναι

$$\bar{\upsilon} = \frac{\Delta x}{h} = \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Αν σκεφτούμε όπως στην προηγούμενη ειδική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι η ταχύτητα του κινητού τη χρονική στιγμή t_0 θα είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta x}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(t_0 + h) - f(t_0)}{h}.$$

Δηλαδή θα είναι το όριο του λόγου

της μεταβολής της τετμημένης του κινητού προς την αύξηση του χρόνου, καθώς η τελευταία τείνει προς το μηδέν χωρίς στην πραγματικότητα να γίνεται ίση με το μηδέν.

Παράγωγος της f στο $x = x_0$

Και τα δύο προηγούμενα προβλήματα, μολονότι αναφέρονται σε διαφορετικούς επιστημονικούς κλάδους, το πρώτο στη Γεωμετρία και το δεύτερο στη Μηχανική, οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της μορφής

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Υπάρχουν όμως και πολλά άλλα

προβλήματα διαφορετικής φύσεως, όπως, για παράδειγμα, είναι ο ορισμός της έντασης ενός ρεύματος, της ταχύτητας μιας χημικής αντίδρασης, του οριακού κόστους στην Οικονομία, τα οποία οδηγούν στον υπολογισμό ενός ορίου της ιδίας μορφής.

Αν το προηγούμενο όριο υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός, τότε λέμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της. Το όριο αυτό ονομάζεται **παράγωγος της f στο x_0**, συμβολίζεται με $f\,'(x_0)$ και διαβάζεται " f τονούμενο του x_0". Έχουμε λοιπόν:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Για παράδειγμα, αν θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της συνάρτησης $f(x) = 3x^2$ στο σημείο 4, εργαζόμαστε ως εξής:

- Βρίσκουμε τη διαφορά $f(4 + h) - f(4)$:

$$f(4 + h) - f(4) = 3(4 + h)^2 - 3 \cdot 4^2 = $$
$$= 3(4^2 + 8h + h^2 - 4^2) =$$
$$= 3h\,(8 + h)$$

- Για $h \neq 0$ βρίσκουμε το πηλίκο $\dfrac{f(4+h) - f(4)}{h}$:

$$\frac{f(4+h) - f(4)}{h} = \frac{3h(8+h)}{h} = 24 + 3h.$$

- Υπολογίζουμε το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h}:$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(4+h)-f(4)}{h} = \lim_{h\to 0}(24+3h) = 24.$$

Άρα, $f'(4) = 24$.

Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει **το ρυθμό μεταβολής** (rate of change) του $y = f(x)$ ως προς το x, όταν $x = x_0$. Έτσι, σύμφωνα με όσα εκθέσαμε στην προηγούμενη παράγραφο:

- Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης που είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$ θα είναι $f'(x_0)$, δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(x)$ ως προς x όταν $x = x_0$.

- Η ταχύτητα ενός κινητού που κινείται ευθύγραμμα και η θέση του στον άξονα κίνησής του εκφράζεται από τη συνάρτηση $x = f(t)$ θα είναι τη χρονική στιγμή t_0

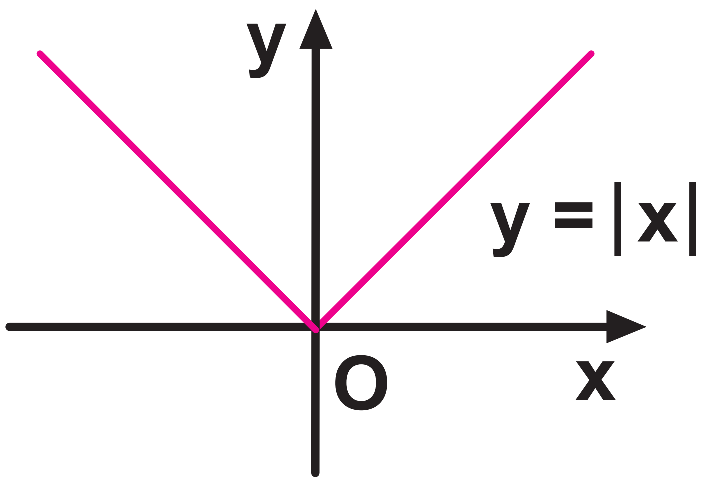
$$υ(t_0) = f'(t_0),$$

δηλαδή ο ρυθμός μεταβολής της $f(t)$ ως προς t όταν $t = t_0$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 65 18/09/2017 10:23

ΣΧΟΛΙΟ

11



Υπάρχουν και συναρτήσεις οι οποίες δεν έχουν παράγωγο σε ένα σημείο. Όπως είναι, για παράδειγμα, η συνάρτηση $f(x)=|x|$ στο $x_0 = 0$. Διότι όταν $h < 0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h}=-1,$$

ενώ όταν $h > 0$, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h}=1,$$ **που**

σημαίνει ότι δεν υπάρχει το

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(0+h)-f(0)}{h}.$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. **Η θέση ενός υλικού σημείου που εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση εκφράζεται με τη συνάρτηση $x(t) = t^2 + t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα.**

α) **Να βρεθεί η μέση ταχύτητα στα παρακάτω χρονικά διαστήματα:**
i) [0,2]   ii) [0,1]   iii) [0, 0,5]
iv) [0, 0,1].

β) **Να βρεθεί η ταχύτητα όταν $t = 0$.**

γ) Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της συνάρτησης $x = x(t)$.

δ) Να σχεδιαστούν οι τέμνουσες από το Ο(0,0) της γραφική παράστασης με συντελεστή διεύθυνσης τις μέσες ταχύτητες του ερωτήματος (α). Επίσης, να βρεθεί και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $x = x(t)$ στο σημείο της με $t = 0$.

ΛΥΣΗ

α) Από τον ορισμό της μέσης ταχύτητας έχουμε

i) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(2) - x(0)}{2} = \dfrac{6}{2} = 3 \text{ m/s}$

ii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(1) - x(0)}{1} = \dfrac{2}{1} = 2 \text{ m/s}$

iii) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0,5) - x(0)}{0,5} = 1,5 \text{ m/s}$

iv) $\bar{\upsilon} = \dfrac{x(0,1) - x(0)}{0,1} = 1,1 \text{ m/s}$

β) Η ταχύτητα υ όταν t = 0, είναι

$$\upsilon = \lim_{h \to 0} \frac{x(0+h) - x(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 + h}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0}(h+1) = 1 \text{ m/s.}$$

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 69 18/09/2017 10:23

γ) Αν σε ένα ορθοκανονικό σύστημα ο οριζόντιος άξονας παριστάνει το χρόνο t και ο κατακόρυφος άξονας το x(t), τότε η γραφική παράσταση της συνάρτησης

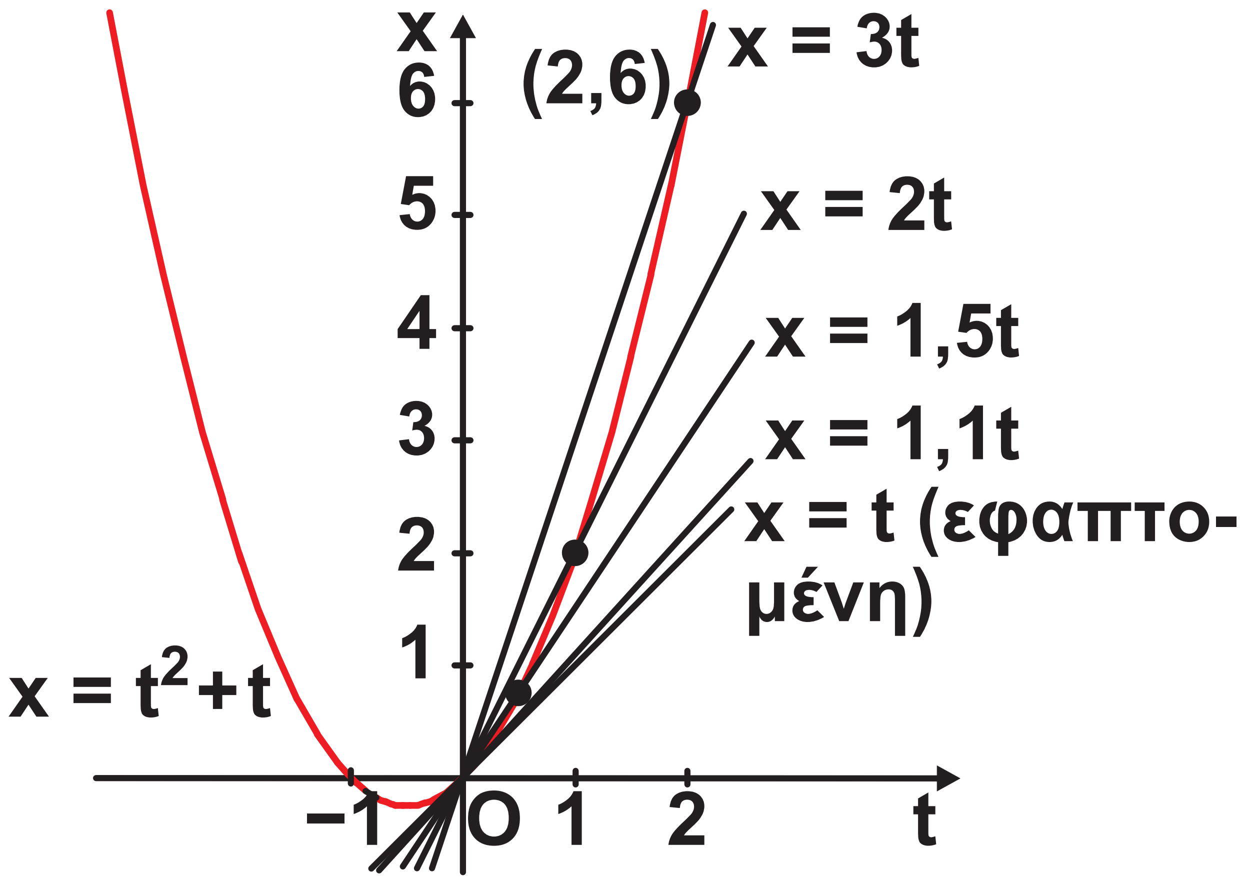
$$x(t) = t^2 + t = \left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \text{ είναι,}$$

σύμφωνα με όσα γνωρίζουμε από την Α΄ Λυκείου, μια παραβολή με

κορυφή το σημείο $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ και

άξονα συμμετρίας την ευθεία $t = -\frac{1}{2}$.

Έτσι, έχουμε την παρακάτω γραφική παράσταση.



δ) Επειδή οι τέμνουσες διέρχονται από το σημείο O(0,0) και έχουν συντελεστές διεύθυνσης 3, 2, 1,5 και 1,1, οι εξισώσεις τους είναι $x = 3t$, $x = 2t$, $x = 1,5t$ και $x = 1,1t$ αντιστοίχως. Οι ευθείες αυτές έχουν σχεδιαστεί στο παραπάνω σχήμα.

Η εφαπτομένη της καμπύλης στο σημείο της με $t = 0$ θα έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με τη στιγμιαία ταχύτητα όταν $t = 0$, δηλαδή ίσο με 1. Επειδή η εφαπτομένη αυτή διέρχεται και από την αρχή των αξόνων, η εξίσωσή της είναι $x = t$, δηλαδή είναι η διχοτόμος της γωνίας των θετικών ημιαξόνων.

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{3}{x}$.

i) Να βρεθεί η $f'(3)$.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο της $(3, f(3))$ και να σχεδιαστεί η εφαπτομένη αυτή.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε $f(3+h)-f(3)=\dfrac{3}{3+h}-\dfrac{3}{3}=$

$$=\frac{3-3-h}{3+h}=-\frac{h}{3+h}$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\frac{-\dfrac{h}{3+h}}{h}=$$

$$=\frac{-h}{h(3+h)}=-\frac{1}{3+h}.$$

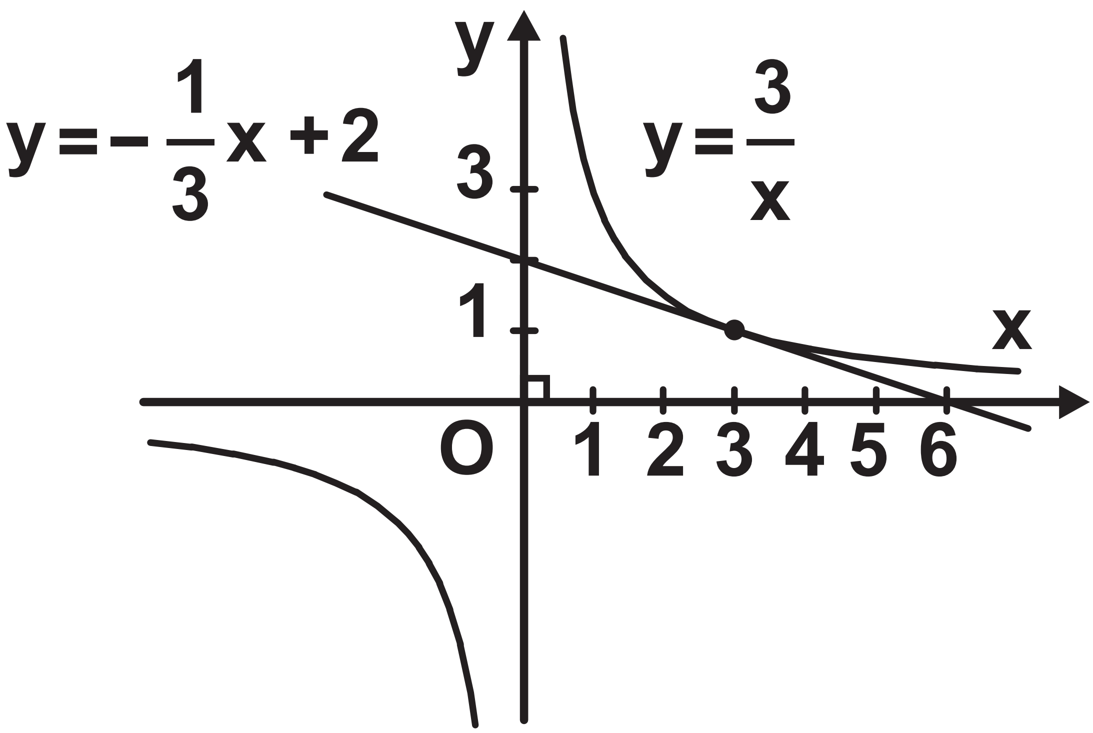
Επομένως

$$f'(3)=\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\left(-\frac{1}{3+h}\right)=-\frac{1}{3}.$$

ii) Η εφαπτομένη της καμπύλης της f στο σημείο της με x = 3 έχει συντελεστή διεύθυνσης ίσο με f′(3). Επομένως, η εξίσωσή της είναι

$$y = -\frac{1}{3}x + \beta.$$



Επειδή όμως το σημείο $(3, f(3)) = (3,1)$ ανήκει στην εφαπτομένη, έχουμε

$$1 = -\frac{1}{3} \cdot 3 + \beta$$

$$1 = -1 + \beta$$

$$\beta = 2.$$

Άρα, η εξίσωση της εφαπτομένης

είναι $y = -\frac{1}{3}x + 2.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης

   i) $f(x) = 3x + 1$ στο $x = 3$

   ii) $g(x) = x^2 + 5$ στο $x = -2$

iii) $\sigma(x) = x^2 + 2x$ στο $x = 4$

2. Να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(t) = \dfrac{1}{t+1}$ στο $t = 1$.

3. i) Το μήκος L ενός κύκλου ακτίνας r είναι $L = 2\pi r$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του L ως προς r, όταν $r = 3$.

   ii) Το εμβαδόν E ενός κύκλου ακτίνας r είναι $E = \pi r^2$. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του E ως προς r, όταν $r = 2$.

4. i) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του εμβαδού E ενός

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 76 18/09/2017 10:23

τετραγώνου πλευράς x ως προς x όταν x = 5.

ii) Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου πλευράς x ως προς x, όταν x = 10.

5. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της συνάρτησης:

i) $f(x) = x^2$ στο Α(3, f(3))

ii) $f(x) = 2\sqrt{x}$ στο Α(4, f(4)).

1.3 ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Ορισμός Παραγώγου

Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, και Β το σύνολο των x∈A στα οποία η f είναι παραγωγίσιμη. Τότε ορίζεται μια νέα συνάρτηση, με την οποία κάθε x∈B αντιστοιχίζεται στο

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}.$$

Η συνάρτηση αυτή λέγεται (πρώτη) παράγωγος (derivative) της f και συμβολίζεται με f΄.

Για παράδειγμα, αν $f(x) = 3x^2$, τότε έχουμε:

$$f(x+h)-f(x)=3(x+h)^2-3x^2=$$

$$=3(x^2+2xh+h^2-x^2)=3h(2x+h),$$

και για $h \neq 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{3h(2x+h)}{h}=6x+3h.$$

Επομένως, $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}(6x+3h)=6x.$

Έτσι, η παράγωγος μιας συνάρτησης f στο x_0 είναι ίση με την τιμή της παραγώγου της συνάρτησης στο σημείο αυτό. Για παράδειγμα, η παράγωγος της $f(x) = 3x^2$ στο $x_0 = 4$ είναι ίση με την τιμή της συνάρτησης $f'(x) = 6x$ στο $x_0 = 4$, δηλαδή $f'(4) = 6 \cdot 4 = 24$.
Η παράγωγος της συνάρτησης f' λέγεται **δεύτερη παράγωγος** της f και συμβολίζεται με f''.

Σύμφωνα με τα προηγούμενα αν η τετμημένη ενός κινητού που κινείται ευθυγράμμως είναι x(t) τη χρονική στιγμή t, τότε η ταχύτητά του θα είναι

$$υ(t) = x'(t).$$

Αν η συνάρτηση υ είναι παραγωγίσιμη, τότε η επιτάχυνση του κινητού τη χρονική στιγμή t θα είναι η παράγωγος της ταχύτητας, δηλαδή θα ισχύει $α(t) = υ'(t)$ ή ισοδύναμα $α(t) = x''(t)$.

Παραγώγιση Βασικών Συναρτήσεων

Έως τώρα η παραγώγιση μιας συνάρτησης f γινόταν με τη βοήθεια

του τύπου $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

Στη συνέχεια θα γνωρίσουμε μερικούς κανόνες που διευκολύνουν τον υπολογισμό της παραγώγου πιο πολύπλοκων συναρτήσεων.

- **Η παράγωγος της σταθερής συνάρτησης $f(x) = c$**

Έχουμε

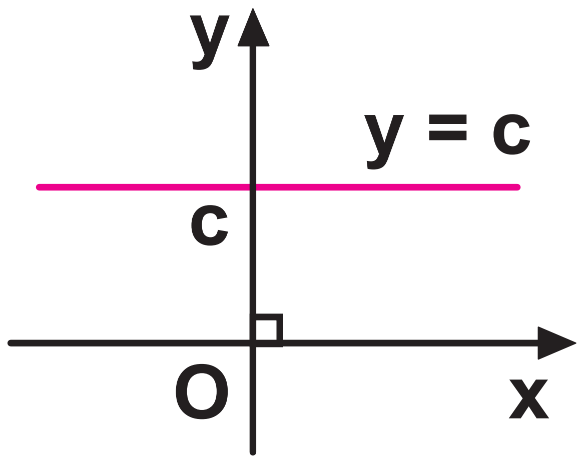
$$f(x + h) - f(x) = c - c = 0$$

και για $h \neq 0$,

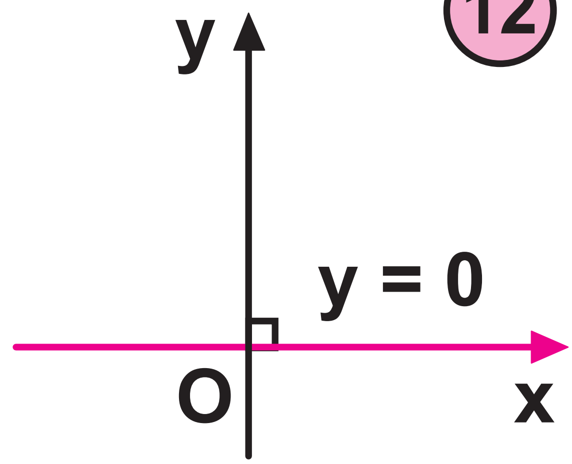
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0,$$

οπότε $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = 0.$

Άρα $(c)' = 0$.



(α)



(β)

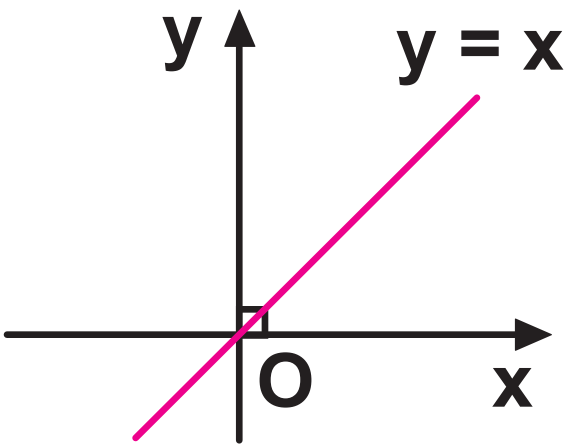
- **Η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης f(x) = x**

Έχουμε $f(x+h)-f(x)=(x+h)-x=h$, και για $h \neq 0$,

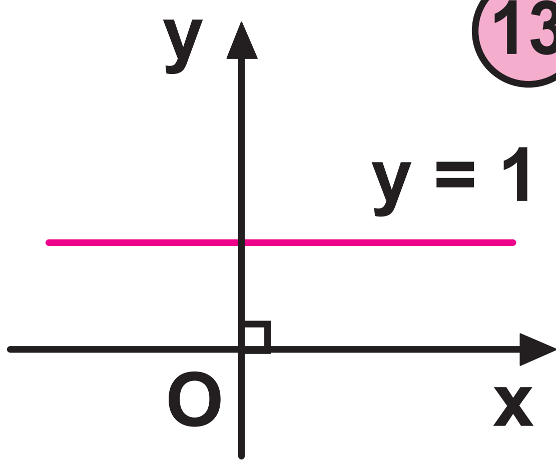
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{h}{h}=1.$$

Επομένως $\lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Άρα $(x)'=1$.



(α)



(β)

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) = x^{\rho}$**

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Έχουμε

$$f(x+h) - f(x) = (x+h)^2 - x^2 =$$

$$= x^2 + 2xh + h^2 - x^2 = (2x+h)h,$$

και για $h \neq 0$,

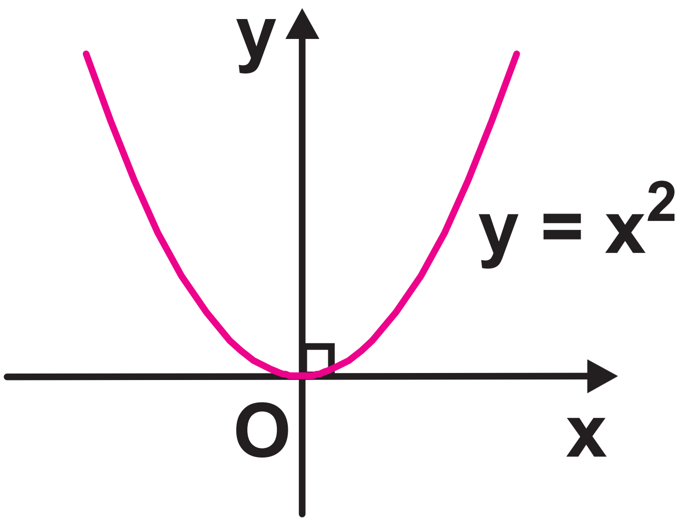
$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(2x+h)h}{h} = 2x + h.$$

Επομένως,

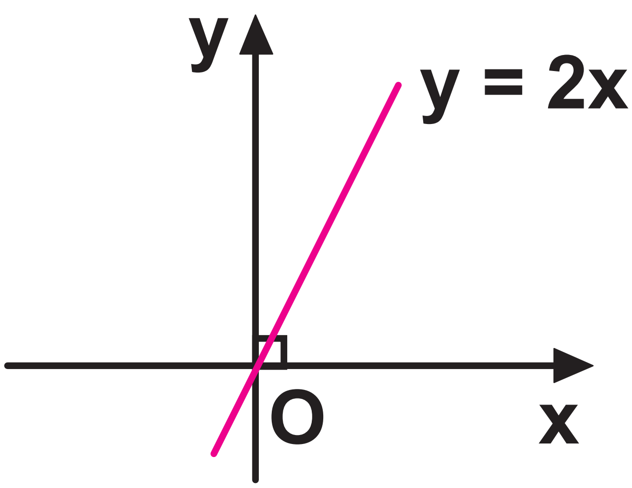
$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h \to 0}(2x+h) = 2x.$$

Άρα $(x^2)' = 2x$

14



(α)



(β)

Αποδεικνύεται ότι

$$(x^{\nu})' = \nu x^{\nu-1}, \text{ όπου } \nu \text{ φυσικός.}$$

Ο τύπος αυτός ισχύει και στην περίπτωση που ο εκθέτης είναι ρητός αριθμός.
Για παράδειγμα

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -x^{-2} = \frac{-1}{x^2},$$

$$\left(\frac{1}{x^2}\right)' = (x^{-2})' = -2 \cdot x^{-2-1} = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3},$$

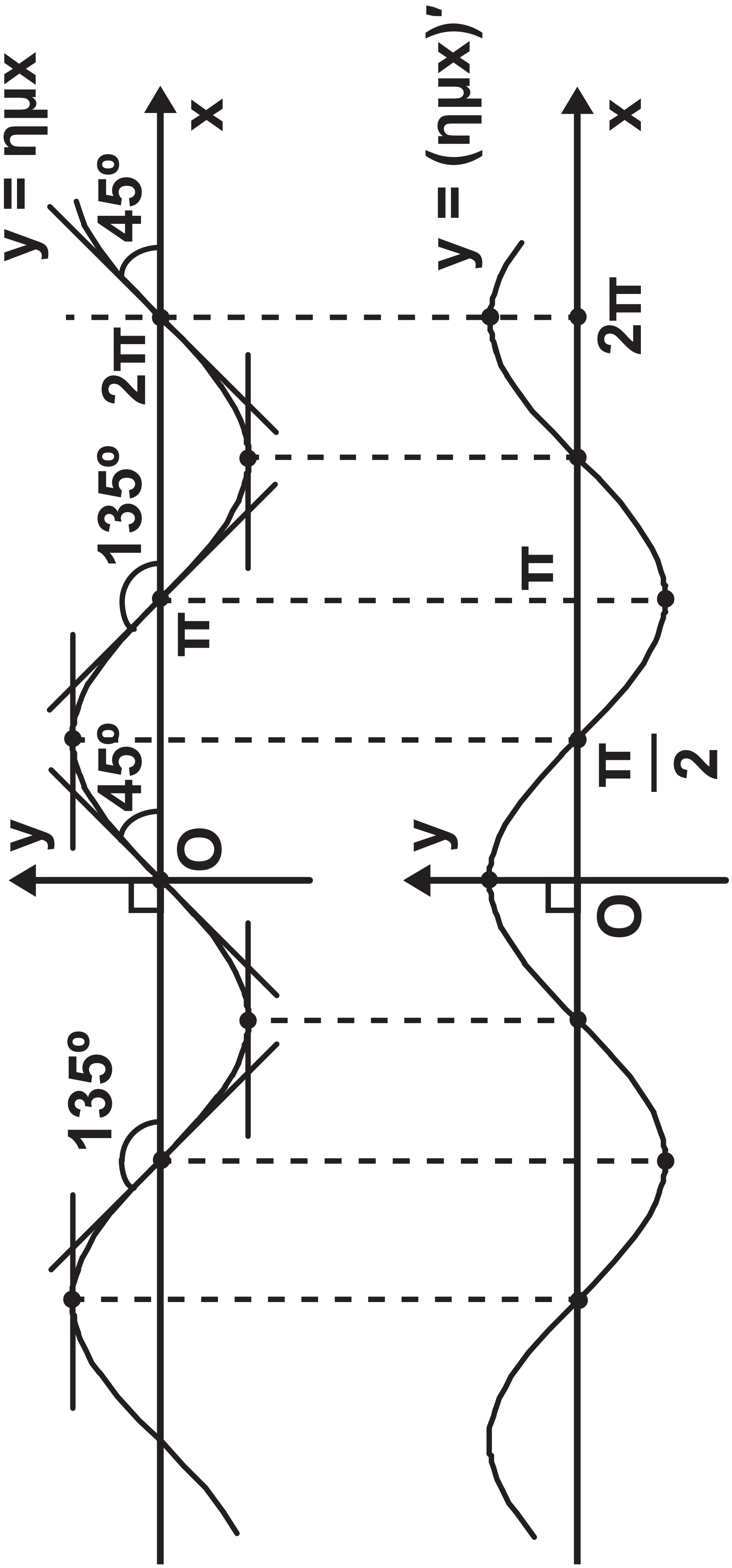
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2} \cdot x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Άρα $(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$, όπου ρ ρητός αριθμός.

- **Η παράγωγος του ημx και του συνx.**

Έστω η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = ημx$ (σχήμα 15). Αν λάβουμε υπόψη ότι η τιμή της $f'(x)$ σε ένα σημείο $x = x_0$ είναι ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της f στο σημείο $(x_0, f(x_0))$, μπορούμε να σχεδιάσουμε προσεγγιστικά τη γραφική παράσταση της f′.
Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της f′ μοιάζει με τη γραφική παράσταση της συνάρτησης συνx.

15



87 / 30

Πράγματι, για τη συνάρτηση $f(x) = ημx$ αποδεικνύεται ότι

$$(ημx)' = συνx.$$

Επίσης για τη συνάρτηση $g(x) = συνx$ αποδεικνύεται ότι

$$(συνx)' = -ημx.$$

- **Η παράγωγος του e^x και του $\ln x$**

Για την εκθετική και τη λογαριθμική συνάρτηση, με βάση τον αριθμό e, αποδεικνύεται ότι

$$(e^x)' = e^x \text{ και } (\ln x)' = \frac{1}{x}.$$

Κανόνες Παραγώγισης

- **Η παράγωγος της συνάρτησης cf(x)**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = cf(x)$.
Έχουμε

$$F(x+h)-F(x) = cf(x+h)-cf(x) =$$
$$= c(f(x+h)-f(x)),$$ και για $h \neq 0$.

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h} = \frac{c(f(x+h)-f(x))}{h} =$$
$$= c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h} =$$
$$= \lim_{h\to 0}\left[c\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right] = cf'(x).$$

Άρα $(c \cdot f(x))' = c \cdot f'(x)$.

Για παράδειγμα

$(3x^5)' = 3(x^5)' = 3 \cdot 5x^4 = 15x^4$,

$$\left(\frac{4}{x}\right)' = 4\left(\frac{1}{x}\right)' = 4\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{-4}{x^2}$$

και $(6\ln x)' = 6(\ln x)' = 6\dfrac{1}{x} = \dfrac{6}{x}$.

- **Η παράγωγος της συνάρτησης $f(x) + g(x)$**

Έστω η συνάρτηση $F(x) = f(x) + g(x)$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 90 18/09/2017 10:23

Έχουμε

$$F(x+h)-F(x)=$$

$$=(f(x+h)+g(x+h))-(f(x)+g(x))=$$

$$=(f(x+h)-f(x))+(g(x+h)-g(x)),$$

και για $h \neq 0$,

$$\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=$$

$$=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}.$$

Επομένως

$$\lim_{h\to 0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+$$

$$+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=f'(x)+g'(x).$$

Άρα $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$

Για παράδειγμα

$$(x^4 + 3x)' = (x^4)' + (3x)' = 4x^3 + 3$$

και

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{x}\right)' = (x^2)' - (x)' + \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

$$= 2x - 1 - \frac{1}{x^2}.$$

- **Παράγωγος των συναρτήσεων $f(x) \cdot g(x)$ και $\frac{f(x)}{g(x)}$**

Για το γινόμενο και το πηλίκο συναρτήσεων αποδεικνύεται ότι ισχύουν οι παρακάτω κανόνες παραγώγισης:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}.$$

Για παράδειγμα

$$(x \cdot \eta\mu x)' = (x)'\eta\mu x + x(\eta\mu x)' =$$
$$= \eta\mu x + x \cdot \sigma\upsilon\nu x$$

και

$$\left(\frac{x+1}{x^2}\right)' = \frac{(x+1)'\,x^2 - (x+1)\cdot(x^2)'}{(x^2)^2} =$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-x^2 - 2x}{x^4} = \frac{-(x+2)}{x^3}.$$

- **Η παράγωγος σύνθετης συνάρτησης**

Γνωρίζουμε ήδη πώς παραγωγίζονται οι συναρτήσεις $x^ν$, ημx, συνx, e^x και ln x. Επίσης, με τη βοήθεια των κανόνων παραγώγισης αθροίσματος, γινομένου και πηλίκου μπορούμε να παραγωγίσουμε και πολυπλοκότερες συναρτήσεις όπως για παράδειγμα τις $(x^3 + 1)^2$ και $(x^3 + 1)^3$ για τις οποίες έχουμε

$$((x^3 + 1)^2)' = ((x^3 + 1)(x^3 + 1))' =$$
$$= 3x^2(x^3 + 1) + 3x^2(x^3 + 1) =$$
$$= 6x^2(x^3 + 1) \text{ και}$$

$$((x^3+1)^3)' = [(x^3+1)^2(x^3+1)]' =$$

$$= 6x^2(x^3+1)(x^3+1) + (x^3+1)^2 \cdot 3x^2 =$$

$$= 9x^2(x^3+1)^2$$

Πώς όμως θα παραγωγίσουμε μια συνάρτηση όπως η $F(x) = \sqrt{x^2+1}$;

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F(x) προκύπτει αν στην $f(x) = \sqrt{x}$ θέσουμε όπου x το $g(x) = x^2 + 1$. Είναι, δηλαδή, $F(x) = \sqrt{x^2+1} = f(g(x))$. Γι'αυτό η συνάρτηση F λέγεται σύνθεση της g με την f.

Αποδεικνύεται ότι για την παράγωγο μιας σύνθετης συνάρτησης ισχύει:

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Δηλαδή για να παραγωγίσουμε τη συνάρτηση f(g(x)), σε πρώτη φάση παραγωγίζουμε την f σαν να έχει ανεξάρτητη μεταβλητή την g(x) και στη συνέχεια πολλαπλασιάζουμε με την παράγωγο της g.

Επομένως,

$$\begin{aligned}((x^3+1)^3)' &= 3\,(x^3+1)^2\,(x^3+1)' = \\ &= 3\,(x^3+1)^2 \cdot 3x^2 = \\ &= 9x^2\,(x^3+1)^2.\end{aligned}$$

Επίσης, επειδή όπως είδαμε, είναι

$\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, έχουμε:

$$\left(\sqrt{x^2+1}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot (x^2+1)' =$$

$$\frac{1}{2\sqrt{x^2+1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Ομοίως,

(ημ(2x + 1))′ = συν(2x + 1) · (2x + 1)′ =

= 2 · συν(2x + 1).

Στον παρακάτω πίνακα συνοψίζονται οι βασικοί τύποι και κανόνες παραγώγισης.

$(c)' = 0$	$(cf(x))' = cf'(x)$
$(x)' = 1$	$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x)$
$(x^{\rho})' = \rho x^{\rho-1}$	
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(f(x)g(x))' = f'(x)\, g(x) + f(x)\, g'(x)$
$(\eta\mu x)' = \sigma\upsilon\nu x$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$
$(\sigma\upsilon\nu x)' = -\eta\mu x$	
$(e^x)' = e^x$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να υπολογιστεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i) $f(x) = εφx$ ii) $f(x) = ημ^2 3x$.

ΛΥΣΗ

i) Έχουμε

$$f'(x) = (εφx)' =$$

$$= \left(\frac{ημx}{συνx}\right)' =$$

$$= \frac{(ημx)'\,συνx - ημx(συνx)'}{συν^2 x} =$$

$$= \frac{συν^2 x + ημ^2 x}{συν^2 x} = \frac{1}{συν^2 x}.$$

Άρα $(\text{εφ}x)' = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$.

ii) Έχουμε

$$f'(x) = \left[(\text{ημ}3x)^2\right]' = 2 \cdot \text{ημ}3x \cdot (\text{ημ}3x)' =$$
$$= 2 \cdot \text{ημ}3x \cdot \text{συν}3x \cdot (3x)' =$$
$$= 3 \cdot 2\text{ημ}3x \cdot \text{συν}3x =$$
$$= 3 \cdot \text{ημ}(2 \cdot 3x) = 3\text{ημ}6x,$$

όπου χρησιμοποιήθηκε η σχέση ημ2α = 2ημα συνα.

2. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = t^3 - 6t^2 + 9t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

i) Να βρεθεί η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο t.

ii) Ποια είναι η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο 2 s και ποια σε χρόνο 4 s;

iii) Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;

iv) Πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση και πότε στην αρνητική κατεύθυνση;

v) Να βρεθεί το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων 5 s.

ΛΥΣΗ

i) Η ταχύτητα είναι

$$\upsilon(t) = x'(t) = (t^3 - 6t^2 + 9t)' =$$
$$= 3t^2 - 12t + 9.$$

ii) Η ταχύτητα του σημείου σε χρόνο $t = 2s$ είναι

$u(2) = 3 \cdot 2^2 - 12 \cdot 2 + 9 = -3$ m/s

και σε χρόνο $t = 4s$ είναι

$u(4) = 3 \cdot 4^2 - 12 \cdot 4 + 9 = 9$ m/s.

iii) Το σημείο είναι ακίνητο, όταν $u(t) = 0$, δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 = 0$$

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t = 1 \text{ ή } t = 3.$$

Άρα, το σημείο είναι ακίνητο ύστερα από 1 s και ύστερα από 3 s.

iv) Το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, όταν $u(t) > 0$, δηλαδή όταν

$$3t^2 - 12t + 9 > 0$$

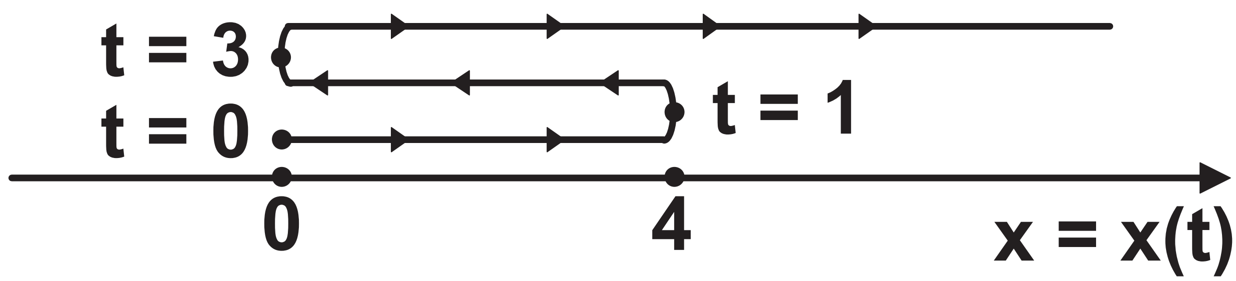
$$t^2 - 4t + 3 > 0$$

$$(t - 1)\,(t - 3) > 0$$

$$t < 1 \text{ ή } t > 3.$$

Άρα, το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση στα χρονικά διαστήματα $t < 1$ και $t > 3$ (και στην αρνητική κατεύθυνση όταν $1 < t < 3$).

Σχηματικά η κίνηση του υλικού σημείου μπορεί να παρασταθεί ως εξής:



v) Η απόσταση που διανύθηκε από το κινούμενο σημείο είναι:

- Στη διάρκεια του πρώτου δευτερόλεπτου

$S_1 = |x(1) - x(0)| = |4 - 0| = 4m$

- Από t = 1 μέχρι t = 3

$S_2 = |x(3) - x(1)| = |0 - 4| = 4m$

- Από t = 3 μέχρι t = 5

$S_3 = |x(5) - x(3)| = |20 - 0| = 20\ m$

Άρα, το ολικό διάστημα S που διάνυσε το σημείο σε χρόνο 5 s είναι
$S = S_1 + S_2 + S_3 = 4 + 4 + 20 = 28\ m.$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

(Να βρείτε τις παραγώγους των συναρτήσεων στις ασκήσεις 1-18)

1. i) $f(x) = -5$

ii) $f(x) = x^4$

iii) $f(x) = x^9$.

2. i) $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

ii) $f(x) = x^{-3}$

iii) $f(x) = x^{-5}$.

3. i) $f(x) = \sqrt[3]{x}$

ii) $f(x) = \sqrt[5]{x^2}$, $x > 0$.

4. i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$

ii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$

iii) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x^2}}$, $x > 0$.

5. i) $f(x) = 4x^3$

ii) $f(x) = 6x^{-5}$

iii) $f(x) = -\dfrac{2}{5}x^{20}$.

106 / 35 - 36

6. i) $f(x) = \dfrac{-6}{\sqrt[4]{x}}$

ii) $f(x) = 6x\sqrt{x}$.

7. i) $f(x) = x^4 + 3x^2$

ii) $f(x) = x^2 + 5 + \dfrac{3}{x}$

iii) $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

8. i) $f(x) = 8x^3 - \eta\mu x + 5$

ii) $f(x) = 6\sigma\upsilon\nu x - 8(x^2 + x)$.

9. i) $f(x) = (x^3 + 1)(x^4 + 1)$

ii) $f(x) = \eta\mu x(1 - \sigma\upsilon\nu x)$.

10. i) $f(x) = x\text{συνx} + 3(x+1)(x-1)$

ii) $f(x) = 4x^2\text{ημx} - 3x^2\text{συνx}.$

11. i) $f(x) = \dfrac{x^2}{x+1}$

ii) $f(x) = \dfrac{x}{\text{ημx}}$

iii) $f(x) = \dfrac{x+\text{ημx}}{1+\text{συνx}}.$

12. i) $f(x) = \dfrac{1}{1+\text{συνx}}$

ii) $f(x) = \dfrac{3}{(x+1)^2}.$

13. i) $f(x) = (x-1)^5$

ii) $f(x) = (2x+1)^5$

iii) $f(x) = (2x^2 - 3x)^5.$

14. i) $f(x) = ημ^3x$

ii) $f(x) = ημx^3$

iii) $f(x) = x \cdot ημ4x$

iv) $f(x) = εφ3x$.

15. i) $f(x) = \sqrt{2x^2 - x}$

ii) $f(x) = \sqrt{1 + ημx}$.

16. i) $f(x) = e^{3x}$

ii) $f(x) = e^{-x^2}$

iii) $f(x) = e^{αx + β}$

iv) $f(x) = \dfrac{e^x}{e^x + e^{-x}}$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 109 18/09/2017 10:23

17. i) $f(x) = \ln 2x$

ii) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x^3}$

iii) $f(x) = \ln(\alpha x + \beta)$

iv) $f(x) = \ln\sqrt{x-1}$.

18. i) $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$

ii) $f(x) = e^x \ln x$.

19. i) Να βρείτε το συντελεστή διεύθυνσης της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(t) = \dfrac{t^3}{t^2+1}$ στο σημείο της $A(3, f(3))$.

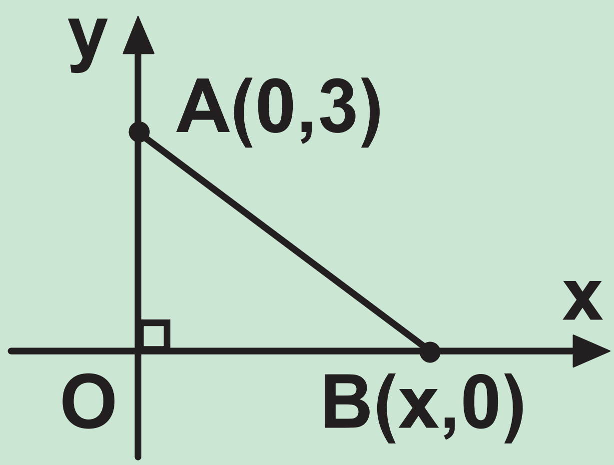
ii) Ομοίως της καμπύλης της συνάρτησης

$$f(\theta) = \frac{\eta\mu\theta}{\eta\mu\theta + \sigma\upsilon\nu\theta}$$ στο σημείο της $A\left(\frac{\pi}{3}, f\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$.

20. Το βάρος Β σε γραμμάρια ενός θηλυκού ποντικιού ύστερα από t εβδομάδες δίνεται προσεγγιστικά από τη συνάρτηση $B(t) = 1 + \frac{1}{4}(t+2)^2$, όπου $t \leq 8$. Να βρείτε το ρυθμό ανάπτυξης του ποντικιού: i) ύστερα από t εβδομάδες και ii) ύστερα από 1, 2 και 8 εβδομάδες.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 111 18/09/2017 10:23

21. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής της απόστασης των σημείων A(0,3) και B(x, 0) ως προς x όταν x = 10.



22. Να βρείτε την τιμή του α ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f(x) = αx(1 − x) στο σημείο της O(0, f(0)) να σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία 60°.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Σε ποια σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{3x}{x+1}$ η εφαπτομένη της είναι παράλληλη στην ευθεία $y = 3x + 5$;

2. Να βρείτε τα σημεία της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 4$ στα οποία οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στον άξονα x΄x.

3. Να βρείτε τα σημεία της γραφικής παράστασης της $f(x) = \dfrac{x}{x+1}$ που οι εφαπτόμενες είναι παράλληλες στη διχοτόμο της γωνίας $x\hat{O}y$.

4. Ένα σώμα κινείται σε έναν άξονα έτσι ώστε η θέση του σε χρόνο t να δίνεται από τον τύπο $x(t) = t^3 - 2t^2 + t$. Να βρείτε την ταχύτητα του σώματος σε χρόνο t και να προσδιορίσετε πότε το σώμα είναι ακίνητο. Ποια είναι η επιτάχυνση του σώματος στις χρονικές αυτές στιγμές;

5. Αν $f(x) = Aσυνωx + Bημωx$, να δείξετε ότι $f''(x) + ω^2 f(x) = 0$.

6. Αν $f(x) = αe^{px} + βe^{-px}$, να δείξετε ότι $f''(x) = p^2 f(x)$.

7. Αν $f(x) = e^{\mu x}$, να βρείτε το μ ώστε να ισχύει
$f''(x) - 3f'(x) - 4f(x) = 0$.

8. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης
$f(x) = 2\eta\mu x \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο σημείο της με $x = \frac{\pi}{3}$.

9. Ο ρυθμός της φωτοσύνθεσης P ενός φυτού δίνεται από τον τύπο $P(I) = \frac{I}{\alpha + \beta I}$, $I \geq 0$, όπου I η ένταση του φωτός και α, β σταθερές.

i) Να βρείτε την $P'(I)$ ή, όπως

λέγεται, τη φωτοχημική ικανότητα του φυτού, καθώς και την $P'(0)$.

ii) Να δείξετε ότι

$$P'(I) = \frac{1}{\alpha}\left[1 - \beta P(I)\right]^2.$$

10. Η θέση ενός υλικού σημείου που κινείται σε έναν κατακόρυφο άξονα δίνεται από τον τύπο $y(t) = A\eta\mu\omega t$, όπου t ο χρόνος και τα A, ω σταθερές.

i) Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου ως συνάρτηση του t.

ii) Να δείξετε ότι η επιτάχυνση είναι ανάλογη της απομάκρυνσης y.

iii) Να δείξετε ότι, όταν η επιτάχυνση είναι 0, το μέτρο της ταχύτητας είναι μέγιστο.

1.4 ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΩΝ ΠΑΡΑΓΩΓΩΝ

Το Κριτήριο της Πρώτης Παραγώγου

Σε προηγούμενες τάξεις χρειάστηκε να εφαρμόσουμε τις μεθόδους της Άλγεβρας και της Γεωμετρίας για να επιλύσουμε προβλήματα στα οποία σκοπός ήταν να μεγιστοποιήσουμε ή να ελαχιστοποιήσουμε την τιμή ενός μεγέθους. Για παράδειγμα, μεταξύ όλων των ορθογωνίων με την

ίδια περίμετρο βρήκαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει το μέγιστο εμβαδόν και μεταξύ όλων των ορθογωνίων με το ίδιο εμβαδόν, αναζητήσαμε τις διαστάσεις εκείνου του ορθογωνίου που έχει την ελάχιστη περίμετρο. Βέβαια οι μέθοδοι που χρησιμοποιήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων αυτών δύσκολα μπορούν να εφαρμοστούν και για την επίλυση προβλημάτων άλλης μορφής. Με τη βοήθεια όμως της παραγώγου μπορούμε να διατυπώσουμε μια γενική μέθοδο προσδιορισμού της μέγιστης ή της ελάχιστης τιμής ενός μεταβαλλόμενου μεγέθους.
Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι θέλουμε να βρούμε το μέγιστο ύψος στο οποίο μπορεί να φθάσει

ένα σώμα που εκτοξεύεται κατακόρυφα προς τα επάνω με αρχική ταχύτητα $u_0 = 20$ m/s. Αν η επιτάχυνση της βαρύτητας είναι $g = 10$ m/s^2, τότε, σύμφωνα με όσα μας διδάσκει η Φυσική, το ύψος h του σώματος ύστερα από t δευτερόλεπτα θα είναι

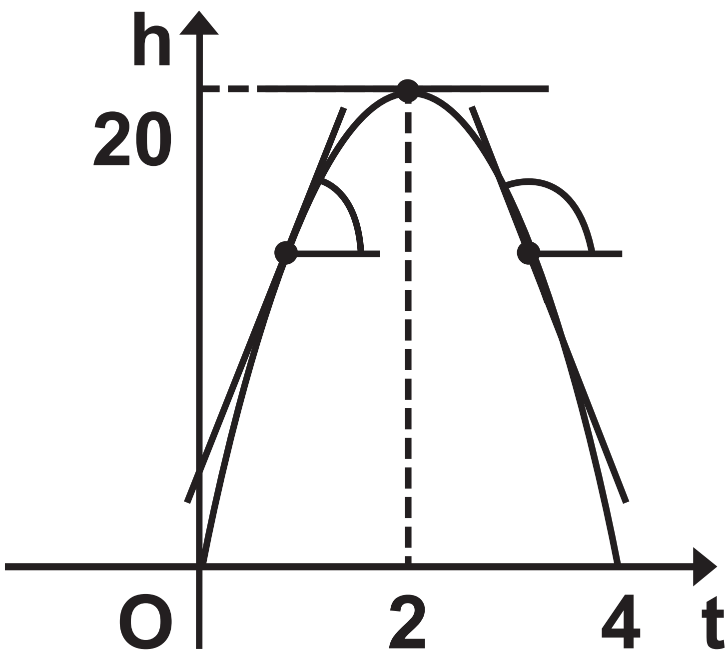
$$h(t) = 20t - 5t^2 = -5t^2 + 20t. \qquad (1)$$

Επομένως η γραφική παράσταση της h(t) θα είναι μια παραβολή η οποία:

- Τέμνει τον άξονα των t στα σημεία $t = 0$ και $t = 4$.
- Παρουσιάζει μέγιστο για $t = -\dfrac{\beta}{2\alpha} = 2$ που είναι ίσο με $h(2) = 20$.

• **Είναι γνησίως αύξουσα για t < 2 και γνησίως φθίνουσα για t > 2.**

16



Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλεται το πρόσημο της παραγώγου $h'(t) = -10t + 20$ στο διάστημα [0,4]. Λύνοντας την ανίσωση $h'(t) > 0$, βρίσκουμε ότι αριστερά του 2 όπου η συνάρτηση είναι γνησίως αύξουσα, η παράγωγός της είναι θετική, ενώ δεξιά του 2 όπου η συνάρτηση είναι φθίνουσα, η παράγωγός της

είναι αρνητική.

t	0		2		4
$h'(t)$		+	0	−	

Από τα παραπάνω φαίνεται να υπάρχει στενή σχέση ανάμεσα στη μονοτονία και στην παράγωγο μιας συνάρτησης.

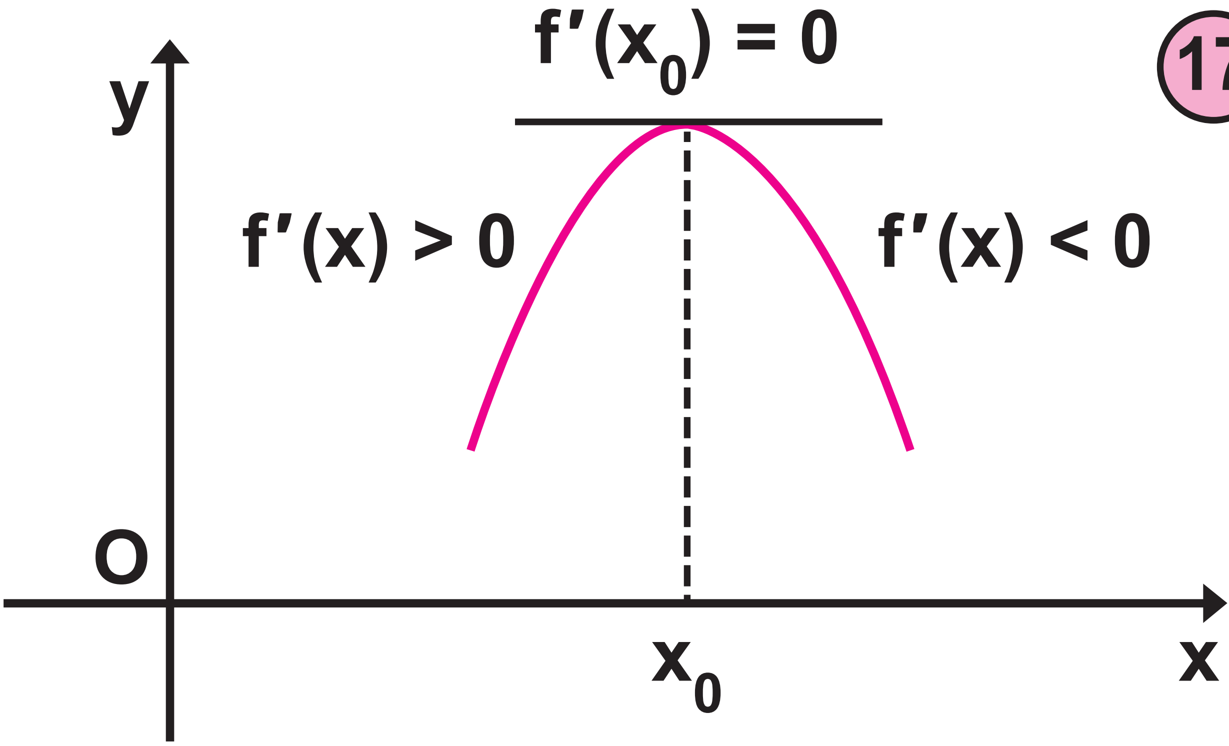
Αποδεικνύεται ότι:

- **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) > 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως αύξουσα στο Δ.**
- **Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f'(x) < 0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ, τότε η f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ.**

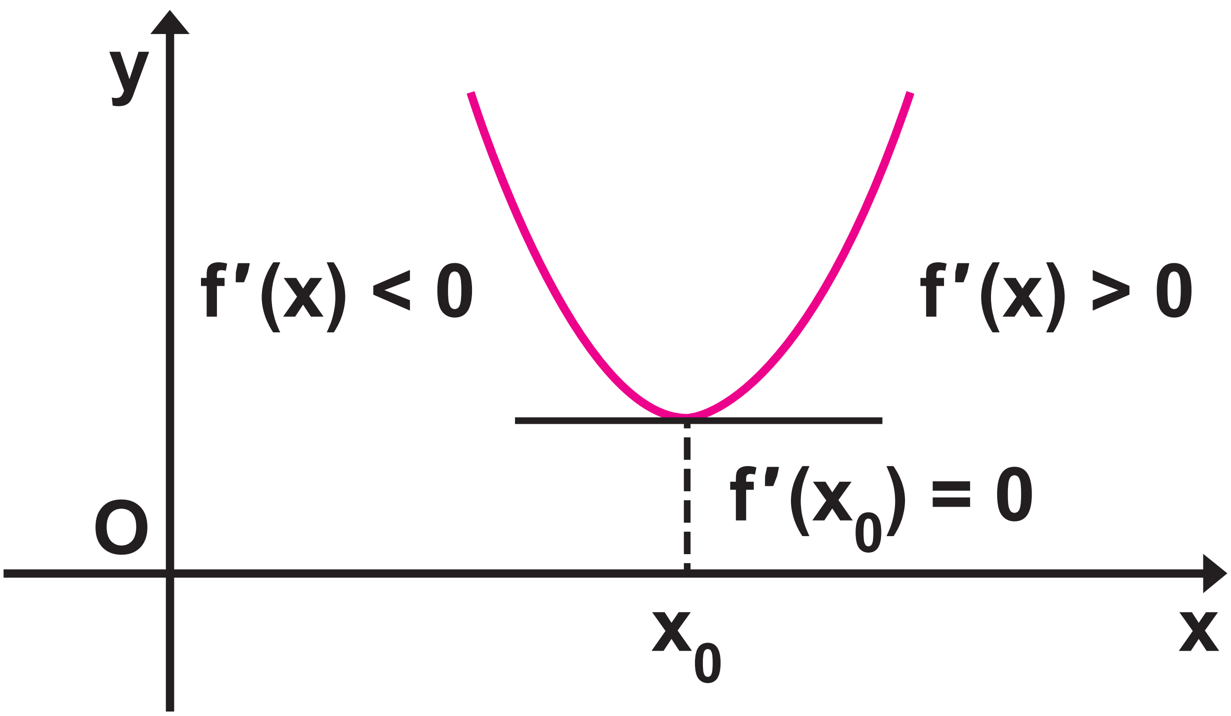
Παρατηρούμε ακόμα ότι στο σημείο $t = 2$, όπου η h παρουσιάζει μέγιστο, η h′ μηδενίζεται, ενώ εκατέρωθεν του $t = 2$ η h′ αλλάζει πρόσημο. Αποδεικνύεται ότι:

- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) < 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ μέγιστο.
- Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ για $x_0 \in (\alpha, \beta)$, $f'(x) < 0$ στο (α, x_0) και $f'(x) > 0$ στο (x_0, β), τότε η f παρουσιάζει στο διάστημα (α, β) για $x = x_0$ ελάχιστο.

17



(α)



(β)

123 / 40

ΣΧΟΛΙΟ

Αν για τη συνάρτηση f ισχύει $f'(x_0) = 0$, για $x_0 \in (\alpha, \beta)$ και η παραγωγός της f′ διατηρεί πρόσημο εκατέρωθεν του x_0, τότε η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β) και δεν παρουσιάζει ακρότατα στο διάστημα αυτό.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να βρεθούν τα ακρότατα της συνάρτησης

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$.

ΛΥΣΗ

Έχουμε:

$f'(x) = (\alpha x^2 + \beta x + \gamma)' = 2\alpha x + \beta$.

$$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2\alpha x+\beta=0 \Leftrightarrow x=-\frac{\beta}{2\alpha}.$$

$$f'(x)>0 \Leftrightarrow 2\alpha x+\beta>0 \Leftrightarrow 2\alpha x>-\beta.$$

Επομένως, αν $\alpha > 0$, τότε $f'(x) > 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) < 0$ για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	

ενώ αν $\alpha < 0$, τότε $f'(x) > 0$ για $x < -\frac{\beta}{2\alpha}$ και $f'(x) < 0$ για $x > -\frac{\beta}{2\alpha}$.

x	$-\infty$		$-\frac{\beta}{2\alpha}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

Άρα, η συνάρτηση

$f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $\alpha \neq 0$ για $x = -\dfrac{\beta}{2\alpha}$

παρουσιάζει ελάχιστο αν $\alpha > 0$ και μέγιστο αν $\alpha < 0$. Η τιμή του μεγίστου ή του ελαχίστου είναι ίση με

$$f\left(-\frac{\beta}{2\alpha}\right) = \alpha\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) + \gamma =$$

$$= \frac{4\alpha\gamma - \beta^2}{4\alpha}.$$

2. Ένας πληθυσμός 1000 βακτηριδίων εισάγεται σε ένα θρεπτικό μέσον και αναπτύσσεται σύμφωνα με τη συνάρτηση

$$p(t) = 1000 + \frac{1000t}{100 + t^2},$$

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 126 18/09/2017 10:23

όπου t ο χρόνος σε ώρες. Σε πόσο χρόνο ο πληθυσμός των βακτηριδίων θα είναι μέγιστος και ποιος θα είναι ο πληθυσμός αυτός;

ΛΥΣΗ

Έχουμε

$$p'(t) = \frac{1000(100+t^2) - 1000t \cdot 2t}{(100+t^2)^2} =$$

$$= \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2}.$$

$p'(t) = 0 \Leftrightarrow 1000(100 - t^2) = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow t = 10$ ή $t = -10$.

Επειδή ο χρόνος t είναι θετικός, η ρίζα $t = -10$ απορρίπτεται.

$$p'(t) > 0 \Leftrightarrow \frac{1000(100-t^2)}{(100+t^2)^2} > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 100 - t^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^2 - 100 < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (t+10)(t-10) < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -10 < t < 10.$$

Επομένως $p'(t) > 0$ για $0 < t < 10$.

Έχουμε λοιπόν $p'(10) = 0$, $p'(t) > 0$ στο $(0, 10)$ και $p'(t) < 0$, στο $(10, +\infty)$.

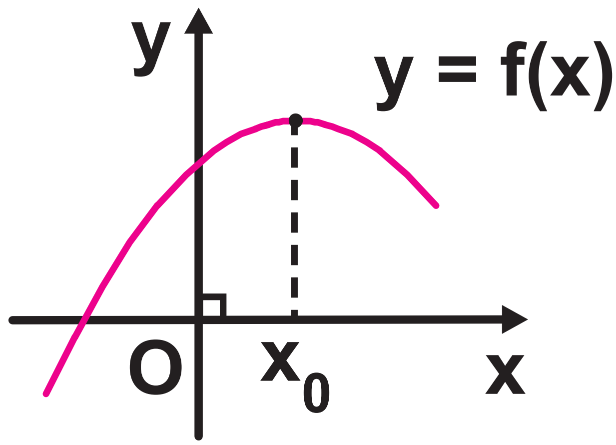
Άρα ύστερα από 10 ώρες θα παρουσιαστεί ο μέγιστος πληθυσμός βακτηριδίων που θα είναι ίσος με

$$p(10) = 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{100 + 10^2} =$$

$$= 1000 + \frac{1000 \cdot 10}{200} = 1050.$$

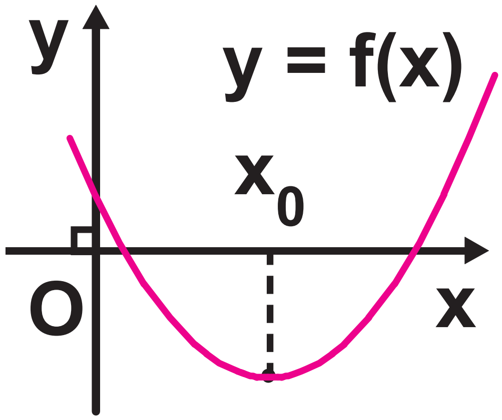
Το Κριτήριο της Δεύτερης Παραγώγου

• Έστω μια συνάρτηση f, της οποίας η καμπύλη είναι μία παραβολή και η οποία για $x = x_0$ παρουσιάζει μέγιστο. Τότε, για τιμές κοντά στο x_0, η συνάρτηση είναι αύξουσα για $x \leq x_0$ και φθίνουσα για $x \geq x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f′ από θετική γίνεται αρνητική, δηλαδή είναι φθίνουσα συνάρτηση. Αφού λοιπόν η f′ είναι φθίνουσα, η παράγωγός της, δηλαδή η f′′ θα είναι αρνητική. Επομένως, $f''(x_0) < 0$.



18

• Έστω τώρα η συνάρτηση f, της οποίας η καμπύλη είναι μια παραβολή και η οποία για $x = x_0$ παρουσιάζει ελάχιστο. Τότε, για τιμές του x κοντά στο x_0, η συνάρτηση είναι φθίνουσα για $x \leq x_0$ και αύξουσα για $x \geq x_0$. Αυτό σημαίνει ότι η f′ από αρνητική γίνεται θετική, δηλαδή είναι αύξουσα συνάρτηση. Άρα, η παράγωγος της f′, δηλαδή η f″ θα είναι θετική. Επομένως, $f''(x_0) > 0$.



19

Γενικά:

Έστω f μια συνάρτηση παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β) και $x_0 \in (\alpha, \beta)$.

Αποδεικνύεται ότι:

- **Αν ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) < 0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) μέγιστο στο $x = x_0$.**
- **Αν ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) > 0$, τότε η f παρουσιάζει (τοπικό) ελάχιστο στο $x = x_0$.**

Αν επιπλέον το x_0 είναι η μοναδική ρίζα της f′, τότε το $f(x_0)$ είναι ολικό ακρότατο στο (α, β).

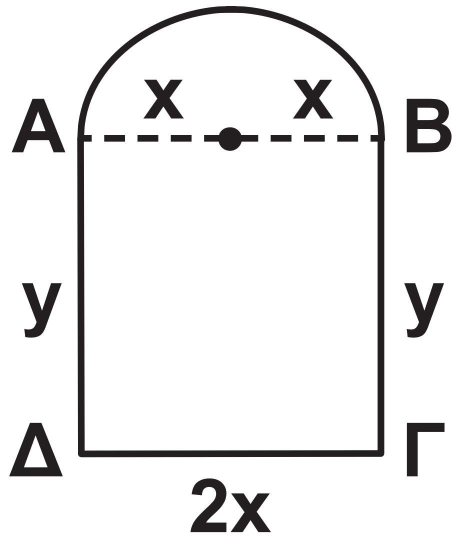
ΣΧΟΛΙΟ

Αν για μια συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0) = 0$ και $f''(x_0) = 0$, τότε δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί το κριτήριο της 2ης παραγώγου για τον προσδιορισμό των ακροτάτων της f.

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ένα παράθυρο έχει το παρακάτω σχήμα και αποτελείται από ένα ορθογώνιο που περικλείεται στο άνω μέρος από ένα ημικύκλιο. Το παράθυρο έχει περίμετρο 30 μέτρα. Να βρείτε τις διαστάσεις που

πρέπει να έχει ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.



ΛΥΣΗ

- **Έστω x η ακτίνα του ημικυκλίου.**

Τότε ΑΒ = ΓΔ = 2x. Αν ΑΔ = ΒΓ = y, έχουμε:

$$y = 2x + y + \frac{1}{2} \cdot 2\pi x = 30$$

$$2y = 30 - 2x - \pi x \qquad (1)$$

Η μεγαλύτερη ποσότητα φωτός θα διέρχεται από το παράθυρο, όταν

το εμβαδόν του είναι μέγιστο.
Αν Ε το εμβαδόν του παραθύρου, τότε

$$E = 2xy + \frac{1}{2}\pi x^2 =$$

$$= x(30 - 2x - \pi x) + \frac{1}{2}\pi x^2 =$$

$$= 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2,$$

δηλαδή $\quad E(x) = 30x - \left(2 + \frac{\pi}{2}\right)x^2.$

- Έχουμε $E'(x) = 30 - (4 + \pi)x$ και

$$E'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{30}{4 + \pi}.$$

Επειδή $E''(x) = -(4+\pi) < 0$, συμπεραίνουμε ότι για $x = \dfrac{30}{4+\pi}$ η συνάρτηση έχει τη μέγιστη τιμή της. Για την τιμή αυτή του x από την (1) έχουμε

$$2y = 30 - (2+\pi) \cdot \frac{30}{4+\pi} = \frac{60}{4+\pi} \text{ και}$$

επομένως $y = \dfrac{30}{\pi+4}$.

Άρα για $x = y = \dfrac{30}{\pi+4} \approx 4{,}2$ m, το παράθυρο έχει το μέγιστο εμβαδό.

2. Το κέρδος P σε ευρώ από την πώληση ενός αυτοκινήτου ορισμένου τύπου και ο χρόνος παραγωγής του t σε ώρες σχετίζονται με τον τύπο:

$$P(t) = 20\left(200 - \frac{250}{t} - t^2\right), \quad t > 3.$$

Να βρεθεί το μέγιστο δυνατό κέρδος.

ΛΥΣΗ

Έχουμε $P'(t) = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right)$**. Επομένως**

$$P'(t) = 0 \Leftrightarrow \frac{250}{t^2} - 2t = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow t^3 = 125 \Leftrightarrow t = 5.$$

Θα εξετάσουμε αν η τιμή t = 5 αντιστοιχεί σε μέγιστο κέρδος με τη βοήθεια της δεύτερης παραγώγου.

Έχουμε

$$P''(t) = 20\left(\frac{250}{t^2} - 2t\right)' = 20\left(-\frac{500}{t^3} - 2\right) =$$

$$= -20\left(\frac{500}{t^3} + 2\right) < 0,$$

αφού $t > 3$.

Άρα για $t = 5$ έχουμε το μέγιστο δυνατό κέρδος που είναι ίσο με

$$P(5) = 20(200 - 50 - 25) = 20 \cdot 125 = = 2500 \text{ ευρώ.}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Να βρείτε τα ακρότατα των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^2 - 2x$
ii) $f(x) = -3x^2 + 6$
iii) $f(x) = x^2 - 2x + 4$.

2. Ομοίως των συναρτήσεων

i) $f(x) = x^3 - 6x^2 + 5$
ii) $f(x) = -x^3 + 3x + 1$.

3. Να δείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις δεν έχουν ακρότατα

i) $f(x) = 2x^3$
ii) $f(x) = -x^3 + 16$

iii) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 10$

iv) $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 5x - 11$.

4. Το άθροισμα δύο αριθμών είναι ίσο με 40. Να βρείτε τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει το γινόμενό τους.

5. Από όλα τα ορθογώνια με εμβαδό 100 m^2 ποιο είναι εκείνο που έχει τη μικρότερη περίμετρο;

6. Ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με τετράγωνη βάση και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει όγκο 32 dm^3. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του κουτιού, ώστε για την κατασκευή του να χρειάζεται το ελάχιστο δυνατό υλικό.

7. Αν ένα κουτί σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ανοικτό από πάνω πρέπει να έχει επιφάνεια ίση με $12 \ dm^2$, ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός όγκος του;

8. Να βρείτε το σημείο της ευθείας με εξίσωση $y = 2x - 3$ που είναι πλησιέστερο στην αρχή των αξόνων.

9. Η ταχύτητα ενός κύματος μήκους λ μέσα στο νερό είναι $υ = κ\sqrt{\frac{λ}{c} + \frac{c}{λ}}$, όπου κ και c θετικές σταθερές. Για ποιο

μήκος κύματος έχουμε την ελάχιστη ταχύτητα;

10. Να προσδιοριστούν δύο θετικοί αριθμοί με τις εξής ιδιότητες:

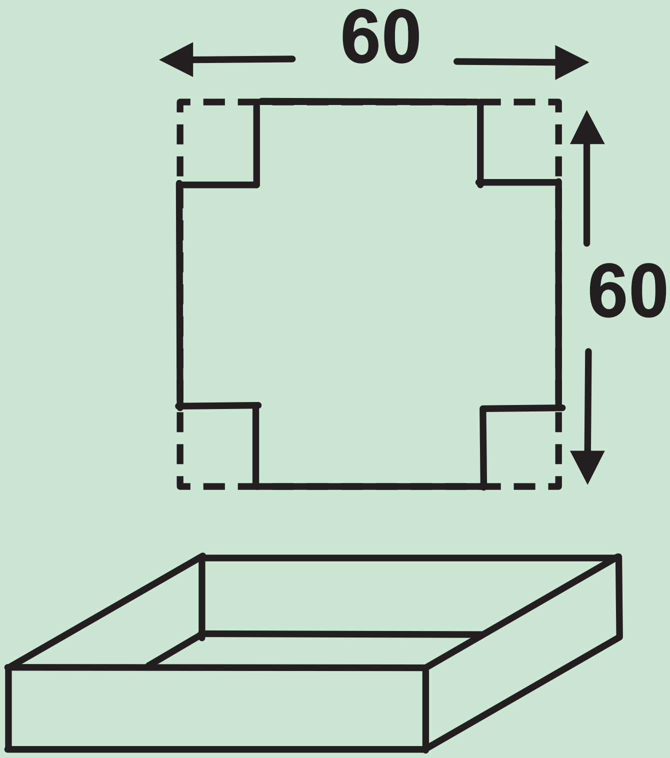
Το άθροισμά τους να είναι 10 και το άθροισμα των τετραγώνων τους να είναι ελάχιστο.

Β΄ ΟΜΑΔΑΣ

1. Αν $υ = 100p(1 + \ln r) - 100qr$, όπου p και q θετικές σταθερές, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $r = \frac{p}{q}$.

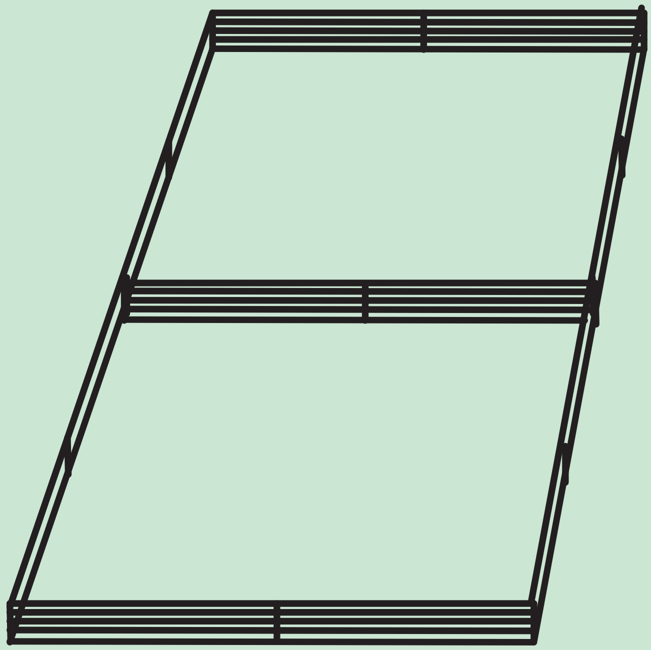
2. Αν $\upsilon = \kappa x^2 \ln\left(\frac{1}{x}\right)$, όπου κ θετική σταθερά, να δείξετε ότι το υ έχει τη μέγιστη τιμή του όταν $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$.

3. Από ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος τετραγώνου πλευράς 60 cm θα κατασκευαστεί ένα δοχείο, ανοικτό από πάνω, αφού κοπούν από τις γωνίες του τέσσερα ίσα τετράγωνα και στη συνέχεια διπλωθούν προς τα επάνω οι πλευρές. Να βρείτε ποιες πρέπει να είναι οι διαστάσεις του δοχείου, ώστε να έχει το μέγιστο όγκο.



4. **Θέλουμε να περιφράξουμε μια περιοχή 16000 m^2 σχήματος ορθογωνίου με μεταβλητές διαστάσεις και να τη χωρίσουμε στη μέση. Ο φράχτης για την περίφραξη κοστίζει 9 ευρώ/m και ο φράχτης για το χώρισμα 6 ευρώ/m. Να βρείτε ποιες**

πρέπει να είναι οι διαστάσεις του ορθογωνίου ώστε, να έχουμε το ελάχιστο κόστος για την περίφραξη μαζί με το χώρισμα.



5. Σε έναν κύκλο ακτίνας ρ να εγγράψετε το ορθογώνιο με το μεγαλύτερο δυνατό εμβαδόν.

6. Ένα σύρμα μήκους λ κόβεται σε δύο τμήματα με τα

οποία σχηματίζουμε έναν κύκλο και ένα τετράγωνο αντιστοίχως. Να δείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων είναι ελάχιστο, όταν η πλευρά του τετραγώνου είναι ίση με τη διάμετρο του κύκλου.

7*. Η έρευνα έχει δείξει ότι αν σε έναν ασθενή γίνει μια υποδόρια ένεση, τότε ύστερα από χρόνο t η συγκέντρωση y του φαρμάκου στο αίμα του δίνεται από τη συνάρτηση

$$y(t) = \frac{A}{k_2 - k_1}\left(e^{-k_1 t} - e^{-k_2 t}\right),$$

όπου A, k_1 και k_2 θετικές

σταθερές με $k_1 > k_2$. Να βρείτε το χρόνο t στον οποίο το φάρμακο θα παρουσιάσει τη μέγιστη συγκέντρωση.

8. Ένα ορισμένο όχημα όταν ταξιδεύει με ταχύτητα υ km/h, καταναλώνει την ώρα $6 + 0{,}0001υ^3$ λίτρα καύσιμα.

i) Να βρείτε τη συνολική ποσότητα καυσίμων που χρειάζεται για να διανύσει μια απόσταση 1000 km με σταθερή ταχύτητα υ.

ii) Να βρείτε την τιμή του υ για την οποία έχουμε την οικονομικότερη κατανάλωση καυσίμων, καθώς και την ποσότητα καυσίμων που

χρειάζεται το όχημα για να διανύσει τα 1000 km.
Να σχολιάσετε αν η απάντηση στο ερώτημα ii) είναι εφαρμόσιμη λόγω της μεγάλης απόστασης.

9. **Δύο ηλεκτρικές αντιστάσεις πρέπει να έχουν άθροισμα 450Ω. Πως πρέπει να επιλεγούν ώστε όταν συνδεθούν εν παραλλήλω να δίνουν τη μέγιστη ολική αντίσταση;**

10. **Το μεσημέρι ένα ιστιοφόρο βρίσκεται 20 χιλιόμετρα βορείως ενός φορτηγού πλοίου. Το ιστιοφόρο ταξιδεύει νότια με 40 km/h, και το φορτηγό ανατολικά με 20 km/h. Αν η ορατότητα είναι 10 km,**

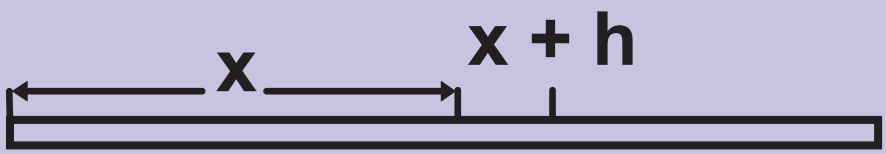
θα έχουν οι άνθρωποι των δύο πλοίων οπτική επαφή σε κάποια στιγμή;

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Αν μια συρμάτινη ράβδος είναι ομογενής, τότε η γραμμική της πυκνότητα ρ ορίζεται ως η μάζα της ανά μονάδα μήκους $\left(\rho = \dfrac{m}{\ell}\right)$ και μετριέται σε χιλιόγραμμα ανά μέτρο (kgr/m). Όμως αν η ράβδος δεν είναι ομογενής και η μάζα της μετρούμενη από το αριστερό

άκρο της μέχρι το σημείο που απέχει από το άκρο αυτό από-σταση x μέτρα δίνεται από τη συνάρτηση m = f(x), τότε ορί-ζουμε ως γραμμική πυκνό-τητα ρ στο σημείο x το όριο

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$**, δηλαδή την παράγωγο της μάζας ως προς το μήκος.**



Αν υποθέσουμε ότι για μια ρά-βδο η μάζα της δίνεται από τη συνάρτηση $m = f(x) = \sqrt{x}$, όπου το x μετριέται σε μέτρα και η μάζα της σε χιλιόγραμ-μα, να βρεθεί

i) Η μέση πυκνότητα του τμήματος της ράβδου στο διάστημα [1, 1,21]
ii) Η γραμμική πυκνότητα της ράβδου για $x = 1$.

2. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί ν εργάτες δίνεται από τον τύπο:

$$C(x) = x^3 - 3\nu x^2 + 5\nu^3 \text{ ευρώ}$$

Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $16 - \nu$ ευρώ.
Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

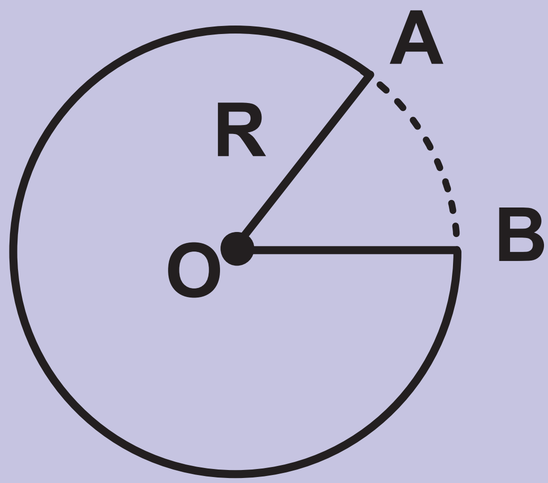
3. Σε ποιό σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 1$ η εφαπτομένη έχει τον ελάχιστο συντελεστή διεύθυνσης;

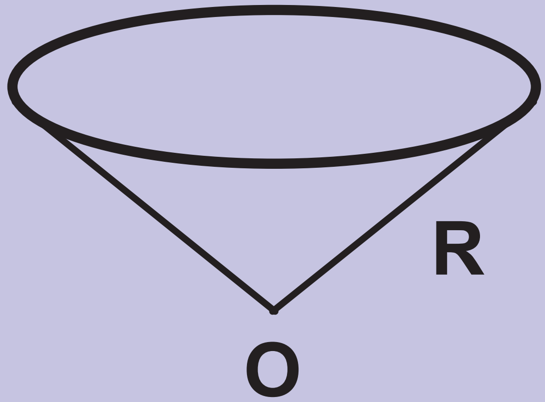
4. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα δίνεται το σημείο Α(α, β) του 1ου τεταρτημορίου. Μια ευθεία ε διέρχεται από το Α και τέμνει τους θετικούς ημιάξονες 0x και 0y στα p και q αντιστοίχως. Να δείξετε ότι η ελάχιστη τιμή του αθροίσματος p + q είναι ίση με $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$.

5. Ποιος κύλινδρος με άθροισμα διαμέτρου και ύψους 20 cm έχει το μέγιστο δυνατό όγκο;

6. Ένα κυλινδρικό δοχείο πρέπει να έχει χωρητικότητα 1 lt. Να βρείτε τις διαστάσεις του οι οποίες ελαχιστοποιούν το κόστος του μετάλλου από το οποίο θα κατασκευαστεί το δοχείο.

7. Από έναν κυκλικό δίσκο ακτίνας R αφαιρούμε έναν κυκλικό τομέα ΟΑΒ και ενώνοντας τις ακτίνες ΟΑ και ΟΒ κατασκευάζουμε ένα κωνικό ποτήρι. Να βρείτε τη μέγιστη χωρητικότητα του ποτηριού.





8. Αν C(x) είναι το συνολικό κόστος για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος, τότε η συνάρτηση C λέγεται **συνάρτηση κόστους**, το πηλίκο $c(x) = \frac{C(x)}{x}$ λέγεται **μέσο κόστος** και το όριο $\lim_{h \to 0} \frac{C(x+h) - C(x)}{h}$ λέγεται **οριακό κόστος.**

α) Να αποδείξετε ότι αν για κάποιο x το μέσο κόστος είναι ελάχιστο, τότε ισχύει:

οριακό κόστος = μέσο κόστος.

β) Μια εταιρεία εκτιμά ότι το κόστος (σε δολάρια) για την παραγωγή x μονάδων ενός προϊόντος είναι

$$C(x) = \frac{1}{1000} \cdot x^2 + 2x + 2600.$$

i) Να βρείτε το κόστος, το μέσο κόστος και το οριακό κόστος για την παραγωγή 1000 μονάδων, 2000 μονάδων και 3000 μονάδων.

ii) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής για το οποίο το μέσο κόστος είναι το χαμηλότερο και ποια είναι η ελάχιστη τιμή του μέσου κόστους;

9. Αν x μονάδες ενός προϊόντος είναι διαθέσιμες για πώληση, τότε η τιμή πώλησης p(x) της

μονάδας του προϊόντος λέγεται **συνάρτηση ζήτησης**. Από την πώληση x μονάδων του προϊόντος, τα συνολικά έσοδα είναι $R(x) = x \cdot p(x)$. Η συνάρτηση R λέγεται **συνάρτηση εσόδων** και η παράγωγος R′ λέγεται **οριακή συνάρτηση εσόδων**. Επίσης από την πώληση x μονάδων του προϊόντος το συνολικό κέρδος είναι $P(x) = R(x) - C(x)$.

Η συνάρτηση P καλείται **συνάρτηση κέρδους** και η παράγωγος P′ καλείται **οριακή συνάρτηση κέρδους**.

α) Να αποδείξετε ότι αν το κέρδος για κάποιο x είναι μέγιστο, τότε τα οριακά έσοδα είναι ίσα με το οριακό κόστος.

β) Ποιο είναι το επίπεδο παραγωγής που μεγιστοποιεί τα κέρδη για μια εταιρεία, αν η συνάρτηση κόστους είναι
$C(x) = 3800 + 5x - 0{,}001x^2$
και η συνάρτηση ζήτησης
$p(x) = 50 - 0{,}01x$;

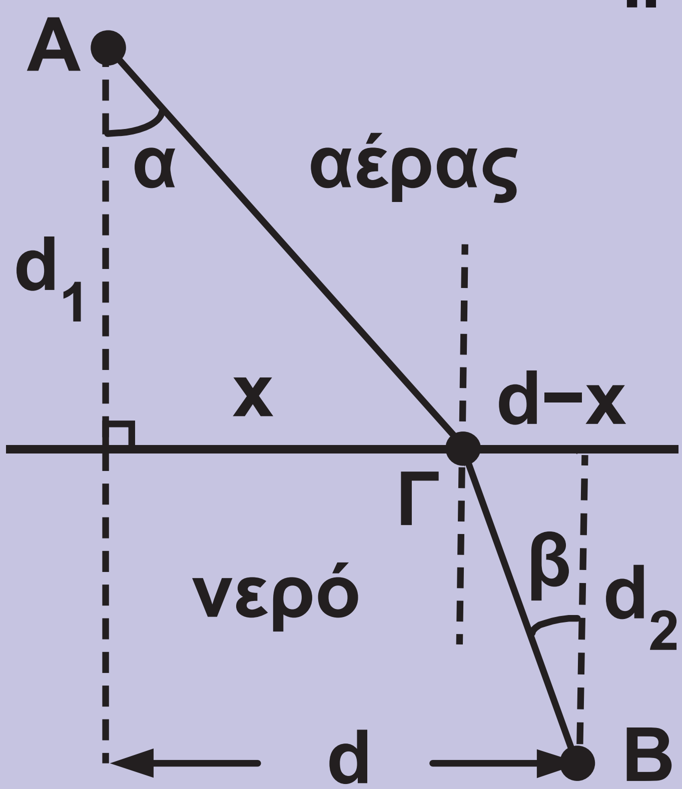
10. Έστω $υ_1$ η ταχύτητα του φωτός στον αέρα και $υ_2$ η ταχύτητα του στο νερό. Σύμφωνα με την **αρχή του Fermat**, μια ακτίνα φωτός από ένα σημείο Α του αέρα φθάνει σε ένα σημείο Β του νερού ακολουθώντας μια πορεία ΑΓΒ η οποία ελαχιστοποιεί τον απαιτούμενο χρόνο. Να αποδείξετε ότι

i) Ο χρόνος που χρειάζεται το φως για τη διαδρομή ΑΓΒ είναι

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{\upsilon_1} + \frac{\sqrt{(d-x)^2 + d_1^2}}{\upsilon_2}.$$

ii) Να υπολογίσετε την $t'(x)$.

iii) Να αποδείξετε ότι $\frac{\eta\mu\alpha}{\eta\mu\beta} = \frac{\upsilon_1}{\upsilon_2}$.

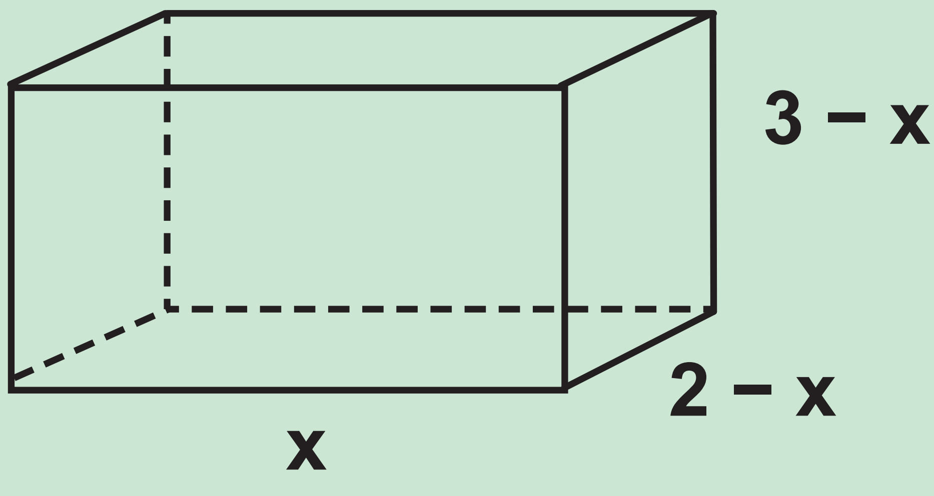


ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

1. Ο όγκος του παρακάτω ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου εκφράζεται με τη συνάρτηση $V(x) = x(2 - x)(3 - x)$. Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης αυτής είναι το διάστημα:

Α. $[0, +\infty)$ Β. $(0, 2)$

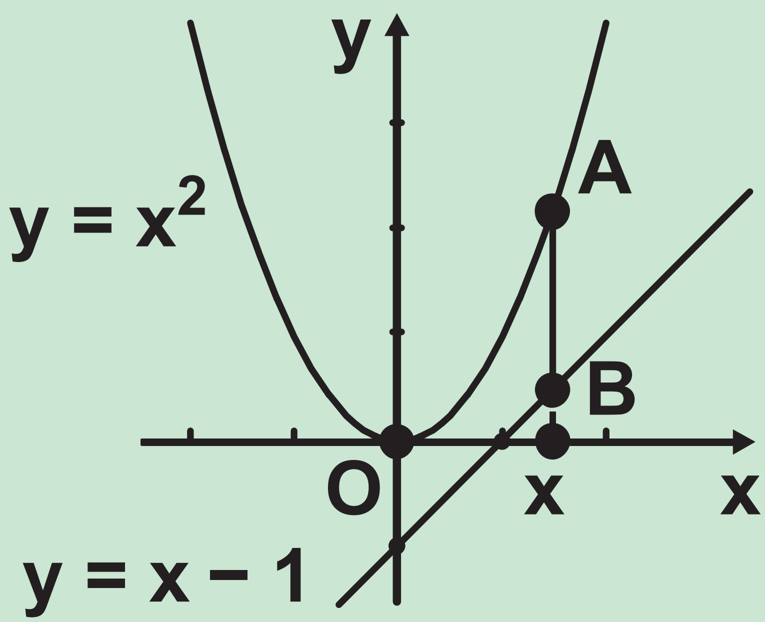
Γ. $(-\infty, 0]$ Δ. $[2, 3]$.



2. Στο παρακάτω σχήμα το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι

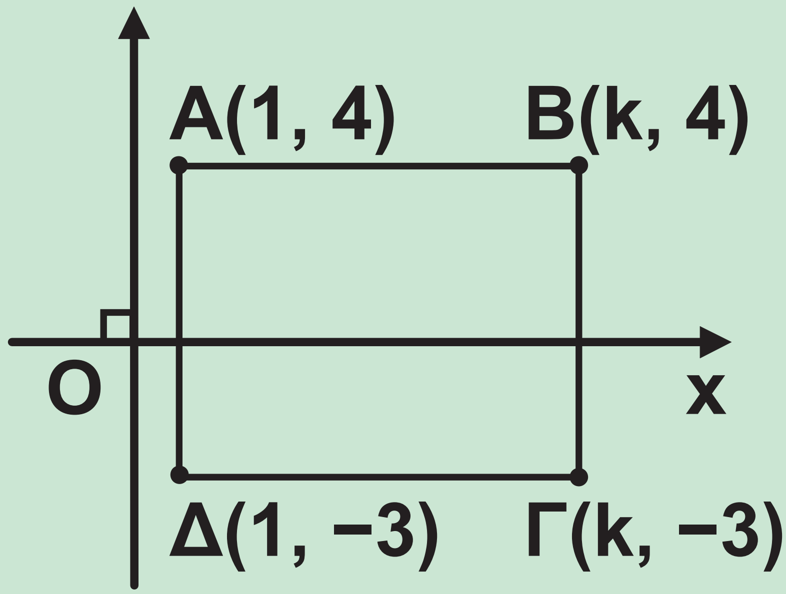
Α. x Β. x^2

Γ. $x^2 - x + 1$ Δ. $x - 1 - x^2$.



3. Το εμβαδόν του παρακάτω ορθογωνίου ΑΒΓΔ είναι 63. Η τιμή του κ είναι

Α. 8 Β. 2 Γ. – 6 Δ. 10.

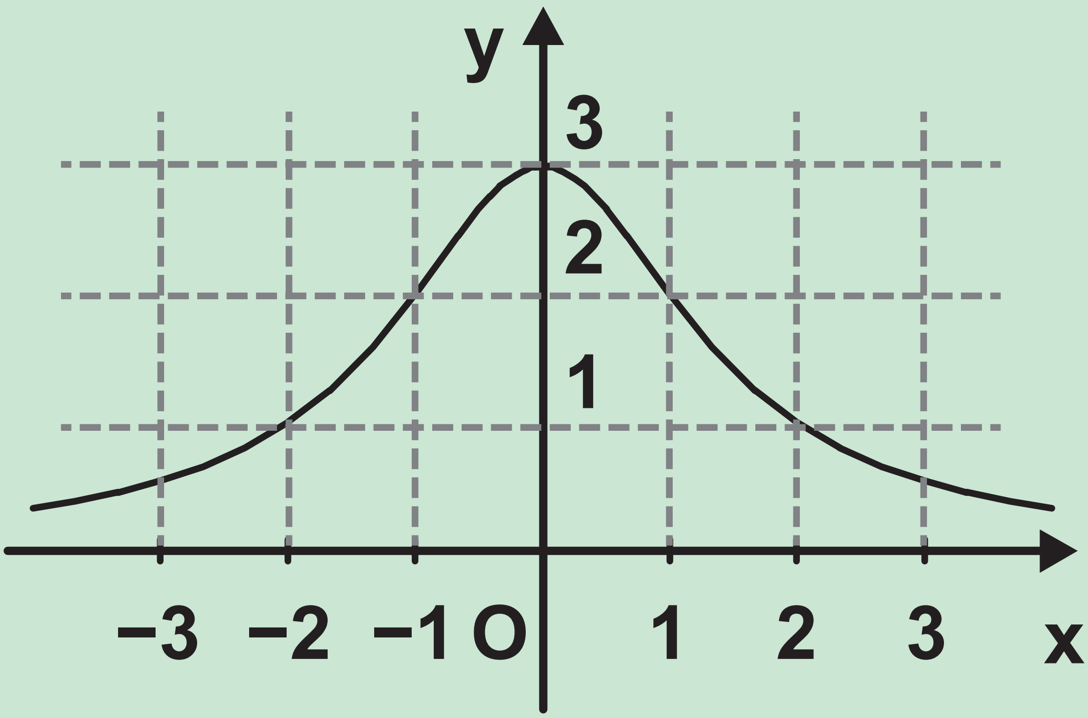


4. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \dfrac{6}{2 + x^2}$.

Οι τιμές του x για τις οποίες ισχύει $\dfrac{6}{2 + x^2} > 2$ είναι:

Α. $x > 2$ Β. $-1 < x < 1$

Γ. $-2 < x < 2$ Δ. $x < -2$.

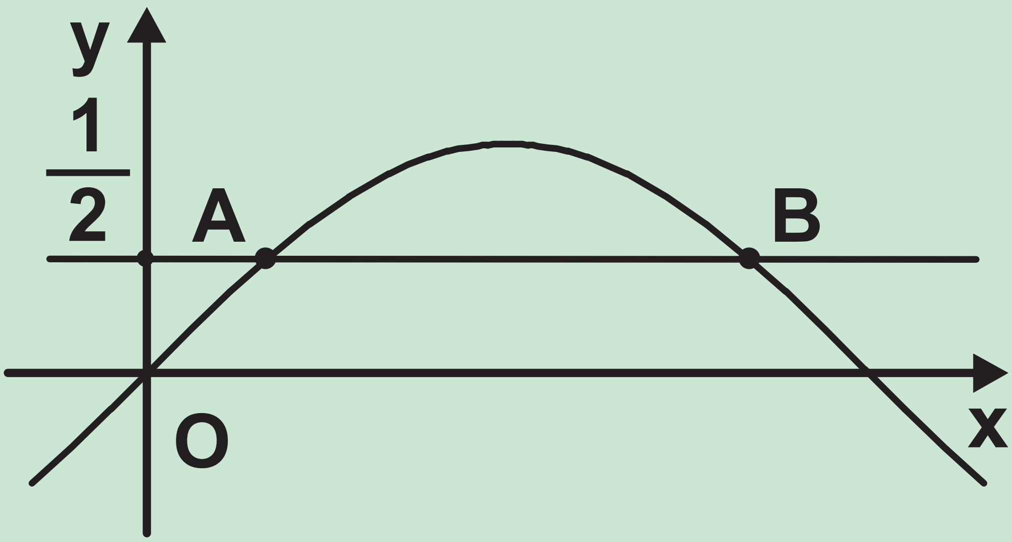


5. Στο παρακάτω σχήμα τα σημεία Α και Β είναι τα σημεία τομής των καμπυλών των συναρτήσεων $f(x) = ημx$ και $g(x) = \frac{1}{2}$.

Το μήκος του τμήματος ΑΒ είναι:

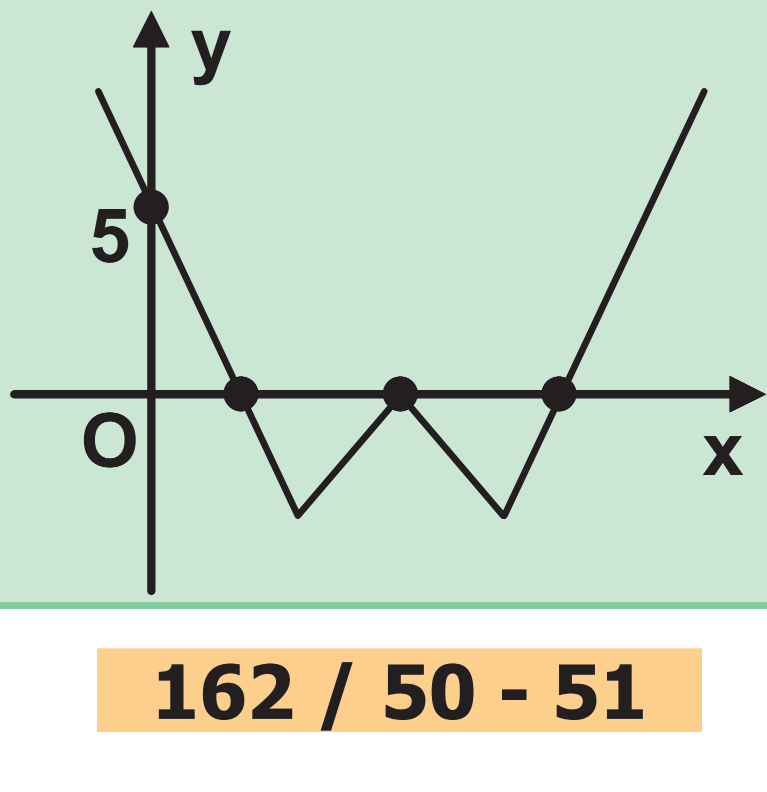
Α. $\frac{π}{2}$ Β. $\frac{π}{3}$ Γ. $\frac{2π}{3}$ Δ. $\frac{π}{6}$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 161 18/09/2017 10:23



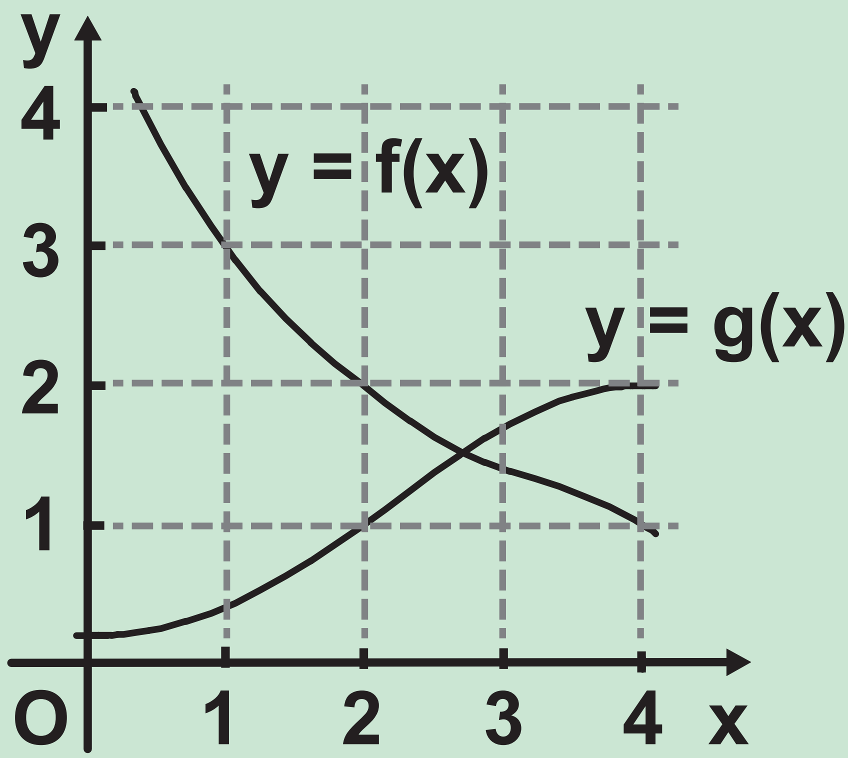
6. Η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Το πλήθος των διακεκριμένων λύσεων της εξίσωσης $(f(x))^2 = f(x)$ είναι:

Α. 2 Β. 3 Γ. 4 Δ. 5 Ε. 6



7. Στο παρακάτω σχήμα έχουμε τις γραφικές παραστάσεις δυο συναρτήσεων f και g. Το άθροισμα f(2) + g(2) είναι:

Α. 5 Β. 4 Γ. 3 Δ. 2

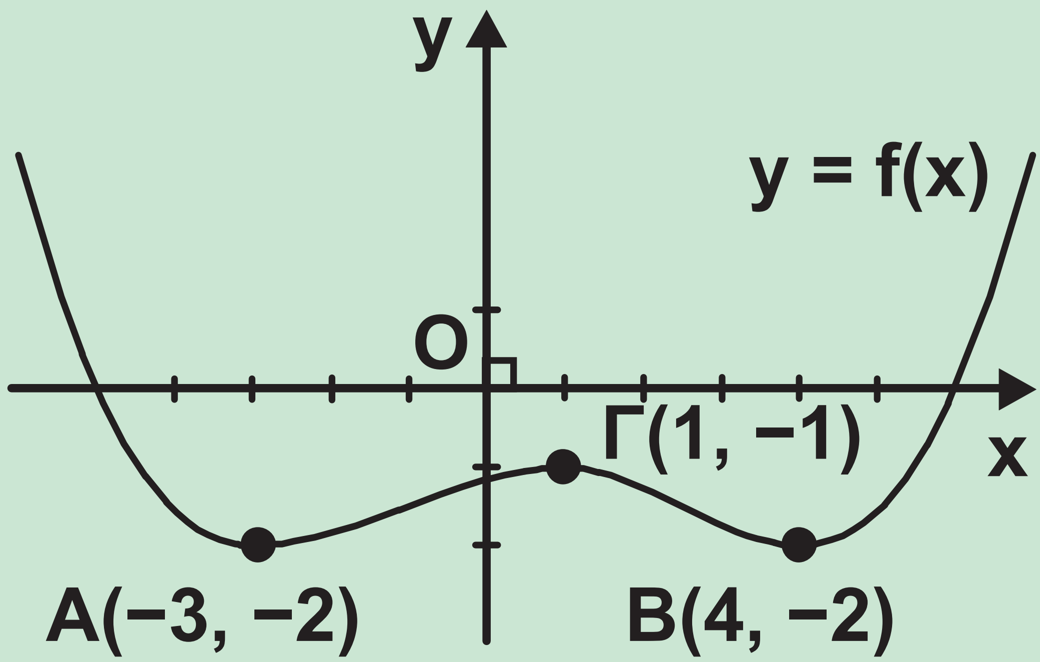


8. Η ευθεία y = κ θέλουμε να τέμνει την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης f σε 4 διαφορετικά σημεία.

Τότε πρέπει:

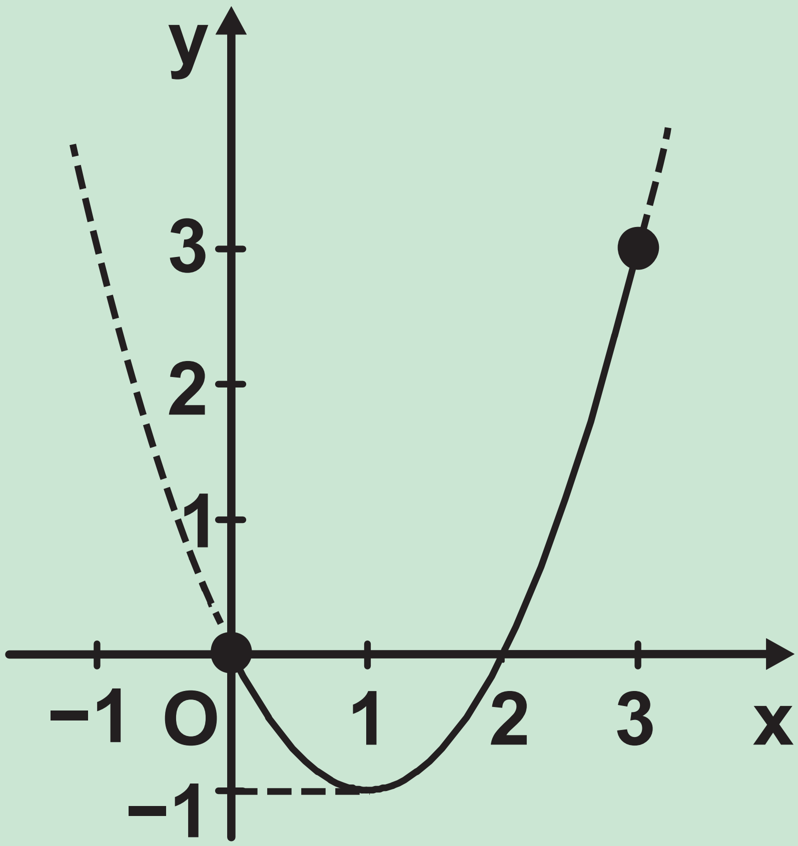
Α. $κ > -1$ Β. $κ = -1$

Γ. $κ < -2$ Δ. $-2 < κ < -1$.



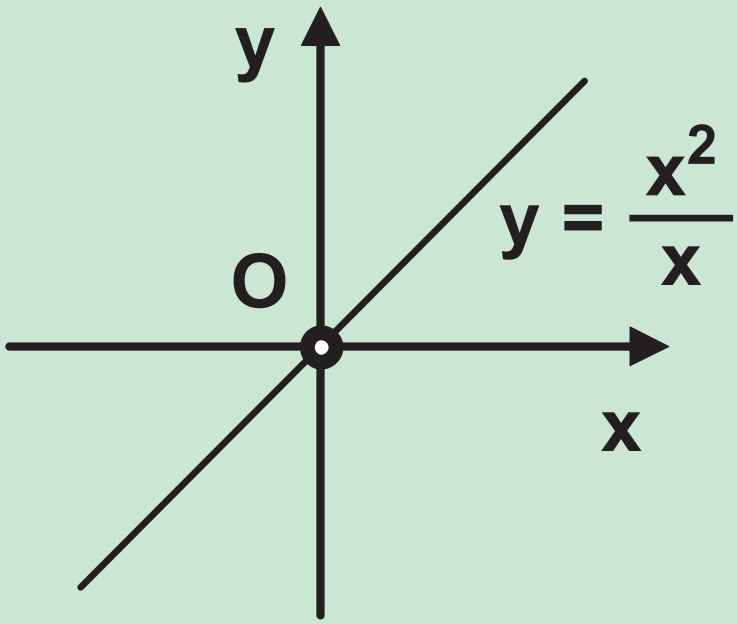
9. Με βάση την παρακάτω γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 2x$ / $A = [0, 3]$ να γράψετε τα ακρότατα της συνάρτησης f.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 164 18/09/2017 10:23



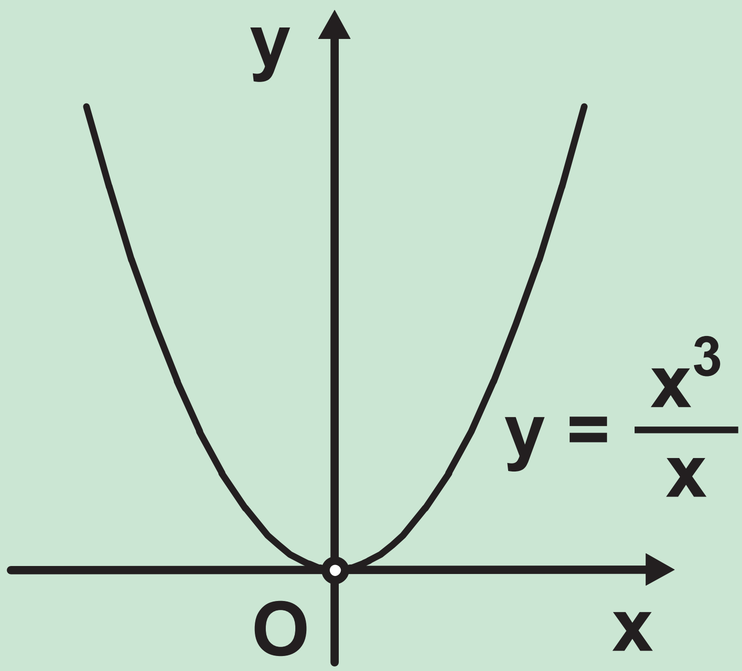
10. Για καθένα από τα παρακάτω όρια να χρησιμοποιήσετε την αντίστοιχη γραφική παράσταση για να βρείτε την τιμή του ή να προσδιορίσετε ότι δεν υπάρχει.

i)



$$\lim_{x \to 0} \frac{x^2}{x}$$

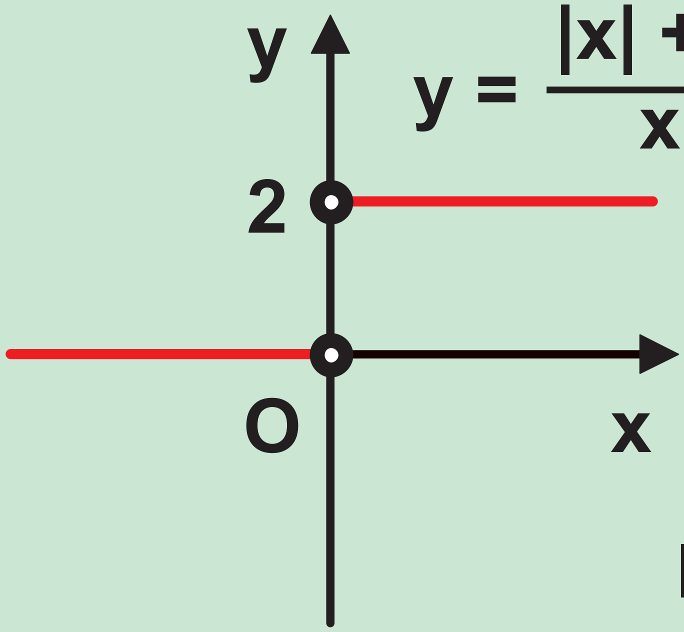
ii)



$$\lim_{x \to 0} \frac{x^3}{x}$$

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 166 18/09/2017 10:23

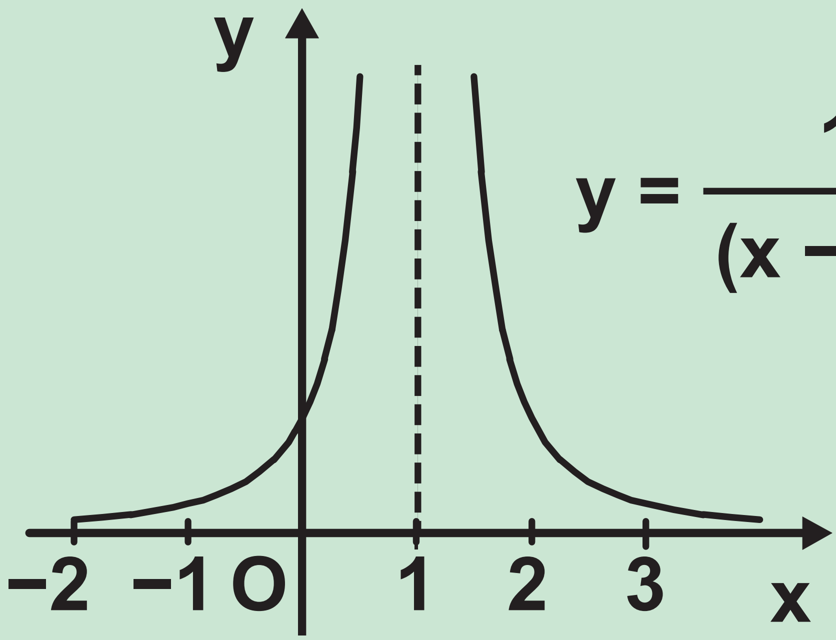
iii)



$$y = \frac{|x| + x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{|x| + x}{x}$$

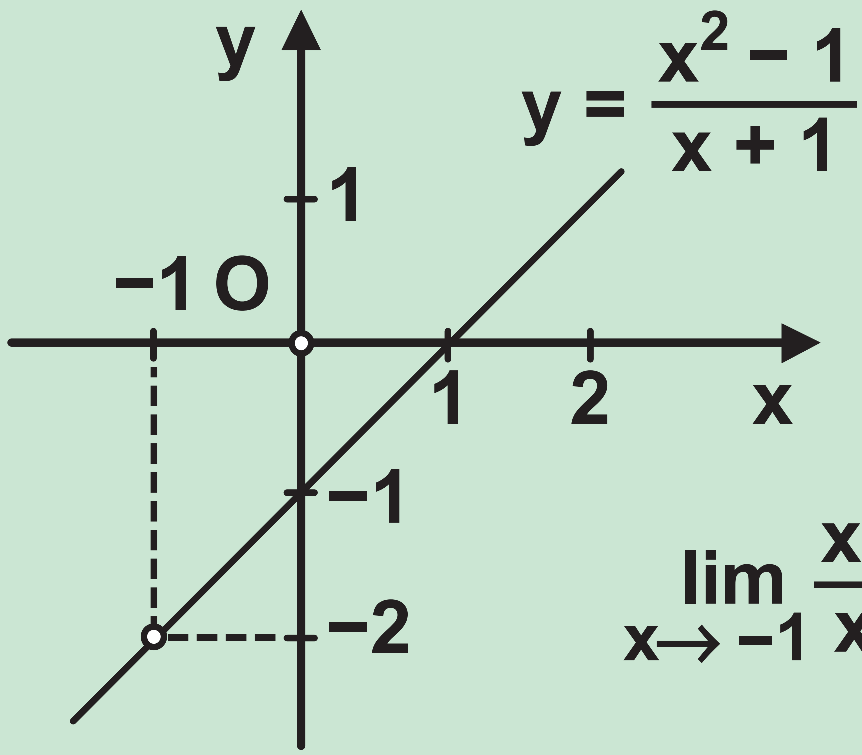
iv)



$$y = \frac{1}{(x - 1)^2}$$

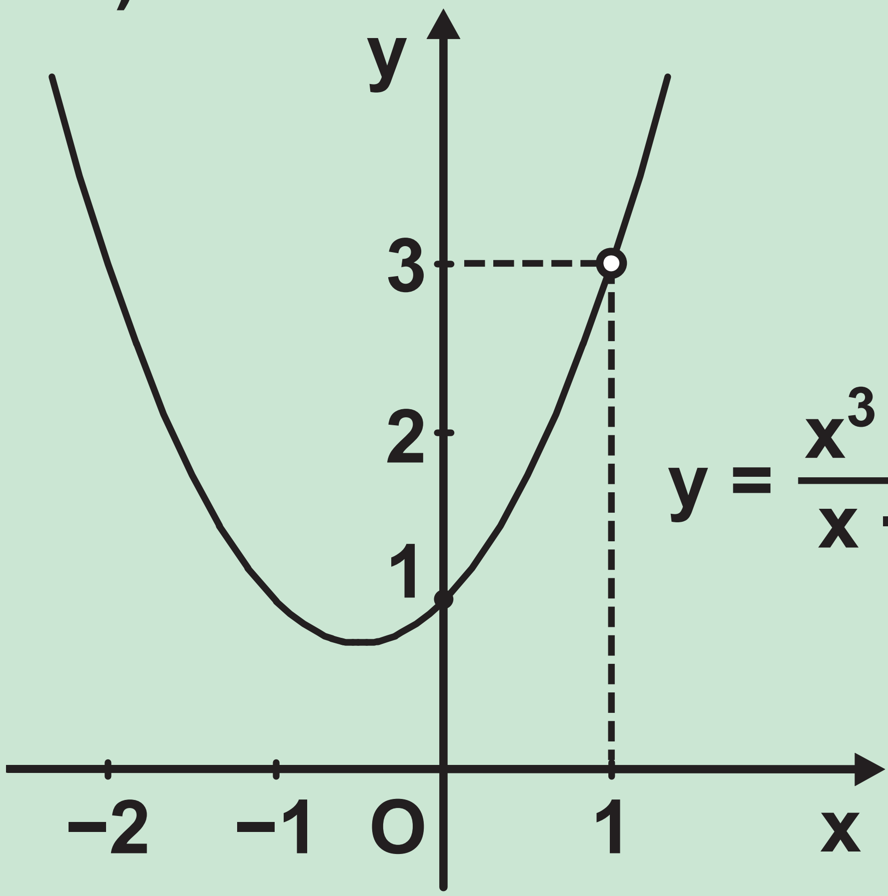
$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{(x - 1)^2}$$

v)



$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2 - 1}{x + 1}$$

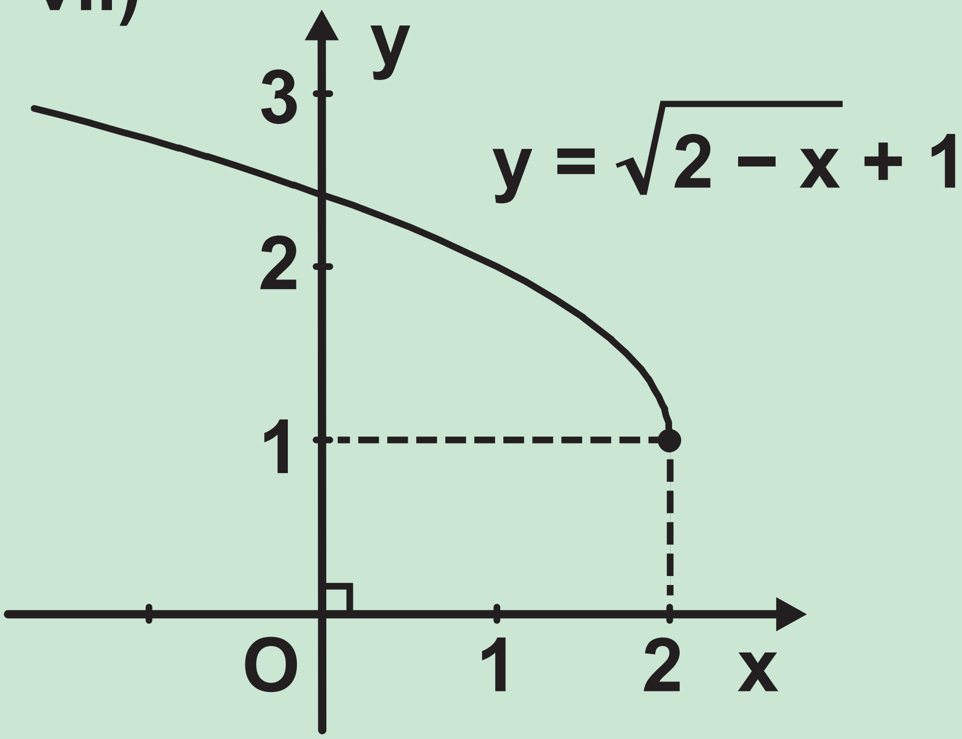
vi)



$$y = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

vii)



$$\lim_{x \to 2} (\sqrt{2 - x} + 1)$$

11. i) Αν $f(x) = -3x^2$ και $f'(\alpha) = 12$, ποια είναι η τιμή του α;

ii) Αν $f(x) = \frac{1}{x}$ και $f'(\alpha) = -\frac{1}{9}$, ποιες τιμές μπορεί να έχει ο α;

iii) Αν $f(x) = ημx$ και

$f'(\alpha) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, ποιο είναι το σύνολο των τιμών του α;

12. Αν για τις συναρτήσεις f και g ισχύουν $f(3) = 4$, $g(3) = 2$, $f'(3) = -6$ και $g'(3) = 5$ να βρείτε για $x = 3$ τις παραγώγους των συναρτήσεων

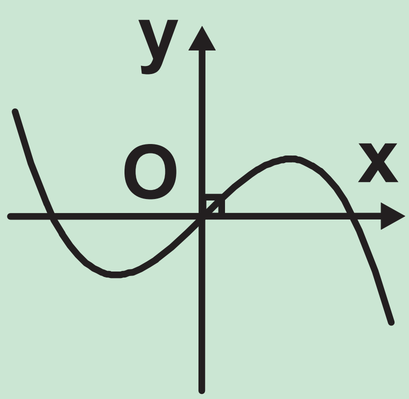
α) $f + g$ β) $f - g$

γ) $f \cdot g$ δ) $\frac{f}{g}$

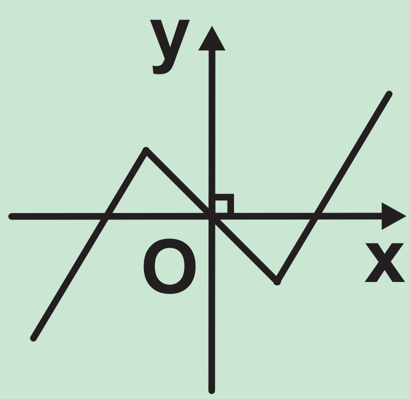
13. Αν $h(x) = f(g(x))$ και $g(3) = 6$, $g'(3) = 4$ και $f'(6) = 7$, να βρείτε τον αριθμό $h'(3)$.

14. Στην πρώτη γραμμή του παρακάτω πίνακα υπάρχουν οι

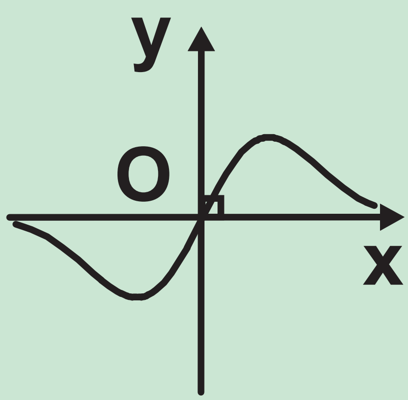
γραφικές παραστάσεις μερικών συναρτήσεων και στη δεύτερη γραμμή οι παράγωγοι των συναρτήσεων αυτών. Να αντιστοιχίσετε κάθε συνάρτηση στην παράγωγό της.



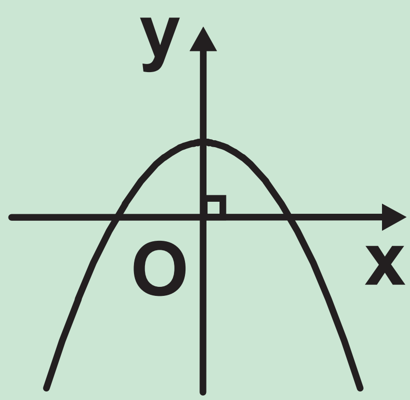
(1)



(2)

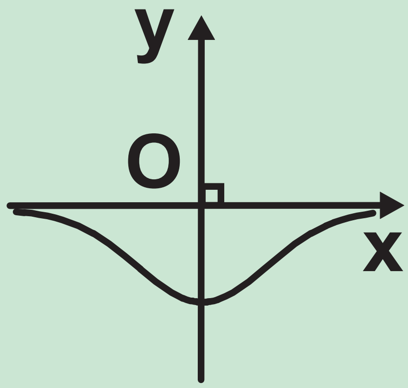


(α)

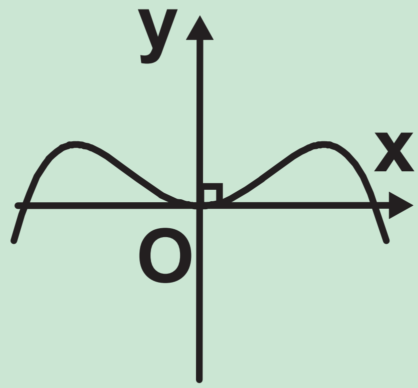


(β)

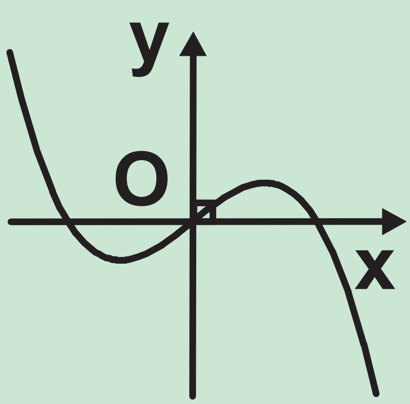
22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 172 18/09/2017 10:23



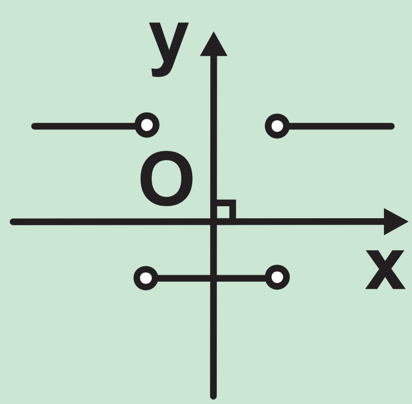
(3)



(4)



(γ)



(δ)

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

1 ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

§ 1.1 Α΄ Ομάδας

1. $-2, 2, 2$.

2. $6, 2, t = 2$ ή $t = 3$.

3. $1, -1, \theta = \frac{\pi}{4}$ ή $\theta = \frac{5\pi}{4}$.

4. $0, 1$.

5. $R-\{1,2\}$.

6. • $3 < x < 7$

   • $(-\infty, 3] \cup [7, +\infty)$.

7. • $3x^2 - 2$

• $6x^3 - 7x^2 + 1$

• $\dfrac{3x^2 - 2x - 1}{2x - 1}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$.

8. i) 4 ii) −10 iii) $\dfrac{5}{2}$ iv) 3 v) $2\sqrt{2}$.

9. i) 0 ii) $\dfrac{5}{2}$ iii) 1 iv) 8 v) −10 vi) 5.

§ 1.1 Β΄ Ομάδας

1. Να χρησιμοποιήσετε την ιδιότητα $\alpha^{-\nu} = \dfrac{1}{\alpha^{\nu}}$.

2. $E(x) = x(50 - \frac{x}{2}),\ 0 < x < 100.$

3. • $V(h) = \pi\left(\frac{20 - h}{2\pi}\right)^2 \cdot\ h,\ 0 < h < 20.$

• $E(r) = \pi r^2 + 2\pi r \cdot (20 - 2\pi r),$

$0 < r < \frac{10}{\pi}.$

4. • $\upsilon(\theta) = 10 \cdot \eta\mu\theta,\ 0^\circ < \theta < 180^\circ$

• $E(\theta) = 50 \cdot \eta\mu\theta,\ 0^\circ < \theta < 180^\circ.$

5. i) $x - 5 = (\sqrt{x} - \sqrt{5})(\sqrt{x} + \sqrt{5})$ κτλ.

ii) $h = (1 + h) - 1 =$

$= \left(\sqrt{1+h} - 1\right)\left(\sqrt{1+h} + 1\right)$ κτλ.

§ 1.2 Α΄ Ομάδας

1. i) 3 ii) -4 iii) 10.

2. $-\frac{1}{4}$.

3. i) 2π ii) 4π.

4. i) 10 ii) 300.

5. i) $y = 6x - 9$ ii) $y = \frac{1}{2}x + 2$.

§ 1.3 Α΄ Ομάδας

1. i) 0 ii) $4x^3$ iii) $9x^8$.

2. i) $\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ii) $-3x^{-4}$ iii) $-5x^{-6}$.

3. i) $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}$ ii) $\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}$.

4. i) $-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt{x}}$ ii) $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{x\sqrt[3]{x}}$

iii) $-\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{x\sqrt[5]{x^2}}$.

5. i) $12x^2$ ii) $-30x^{-6}$ iii) $-8x^{19}$.

6. i) $\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{x\sqrt[4]{x}}$ ii) $9\sqrt{x}$.

7. i) $4x^3+6x$ ii) $2x-\frac{3}{x^2}$ iii) $1+\frac{1}{x^2}$.

8. i) $24x^2-\sigma\upsilon\nu x$

ii) $-6\eta\mu x-8(2x+1)$.

178 / 179 - 180

9. i) $7x^6 + 4x^3 + 3x^2$

ii) $συνx - συν2x$.

10. i) $συνx - xημx + 6x$

ii) $(8x + 3x^2)ημx + (4x^2 - 6x)συνx$.

11. i) $\dfrac{x^2 + 2x}{(x+1)^2}$ ii) $\dfrac{ημx - xσυνx}{ημ^2x}$

iii) $\dfrac{2 + 2συνx + xημx}{(1+συνx)^2}$.

12. i) $\dfrac{ημx}{(1+συνx)^2}$ ii) $\dfrac{-6}{(x+1)^3}$.

13. i) $5(x - 1)^4$ ii) $10(2x + 1)^4$

iii) $5(2x^2 - 3x)^4(4x - 3)$.

14. i) $3ημ^2x \cdot συνx$

ii) $3x^2 \cdot συνx^3$

iii) $\eta\mu 4x + 4x \cdot \sigma\upsilon\nu 4x$

iv) $\dfrac{3}{\sigma\upsilon\nu^2 3x}$.

15. i) $\dfrac{4x-1}{2\sqrt{2x^2-x}}$ ii) $\dfrac{\sigma\upsilon\nu x}{2\sqrt{1+\eta\mu x}}$.

16. i) $3e^{3x}$ ii) $-2xe^{-x^2}$ iii) $\alpha e^{\alpha x+\beta}$

iv) $\dfrac{2}{\left(e^x+e^{-x}\right)^2}$.

17. i) $\dfrac{1}{x}$ ii) $-\dfrac{3}{x}$ iii) $\dfrac{\alpha}{\alpha x+\beta}$

iv) $\dfrac{1}{2(x-1)}$.

18. i) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$ ii) $e^x\left(\dfrac{1}{x}+\ln x\right)$.

19. i) 1,08 ii) $2(2-\sqrt{3})$.

20. i) $\dfrac{1}{2}(t+2)$ ii) $\dfrac{3}{2}$, 2, 5.

21. $\dfrac{10}{\sqrt{109}}$.

22. $\sqrt{3}$.

§ 1.3 Β΄ Ομάδας

1. (0, 0), (−2, 6).

2. (1, 8), (3, 4).

3. (0, 0), (−2, 2).

4. • $\upsilon(t) = 3t^2 - 4t + 1,\ t = \frac{1}{3},\ t = 1$

• $\alpha\left(\frac{1}{3}\right) = -2,\ \alpha(1) = 2.$

5. $f'(x) = -A\omega\eta\mu\omega x + B\omega\sigma\upsilon\nu\omega x$

$f''(x) = -A\omega^2\sigma\upsilon\nu\omega x - B\omega^2\eta\mu\omega x$

κτλ.

6. $f'(x) = \alpha p e^{px} - \beta p e^{-px}$

$f''(x) = \alpha p^2 e^{px} + \beta p^2 e^{-px}$ κτλ.

7. −1, 4.

8. $y = -x + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}.$

9. i) $P'(I) = \dfrac{\alpha}{(\alpha + \beta I)^2}$

ii) Να κάνετε τις πράξεις στο 2ο μέλος.

10. i) $\upsilon(t) = A\omega\sigma\upsilon\nu\omega t$

$\alpha(t) = -A\omega^2\eta\mu\omega t$

ii) $\alpha(t) = -\omega^2 \cdot y$

iii) $\alpha(t) = 0 \Leftrightarrow \sigma\upsilon\nu\omega t = \pm 1$ κτλ.

§ 1.4 Α΄ Ομάδας

1. i) Ελάχιστο: $f(1) = -1$

ii) Μέγιστο: $f(0) = 6$

iii) Ελάχιστο: $f(1) = 3$.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 183 18/09/2017 10:23

2. i) Μέγιστο: $f(0) = 5$

   Ελάχιστο: $f(4) = -27$

   ii) Ελάχιστο: $f(-1) = -1$

   Μέγιστο: $f(1) = 3$.

3. i) $f'(x) = 6x^2$, γνησίως αύξουσα

   ii) $f'(x) = -3x^2$, γνησίως φθίνουσα

   iii) $f'(x) = 3(x - 1)^2$, γνησίως αύξουσα

   iv) $f'(x) = -3x^2 + 6x - 5 < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα γνησίως φθίνουσα.

4. 400.

5. Το τετράγωνο με πλευρά 10 m.

6. Πλευρά βάσης 4 dm, ύψος 2 dm.

7. $4\ dm^3$.

8. $\left(\frac{6}{5}, -\frac{3}{5}\right)$.

9. $\lambda = c$.

10. Καθένας είναι ίσος με 5.

§ 1.4 Β΄ Ομάδας

1. $u'(r) = -100p\frac{1}{r} - 100q$,

$u''(r) = -100p\frac{1}{r^2} < 0$ κτλ.

2. $u'(x) = -\kappa(2x\ln x + x)$,

$u''(x) = -\kappa(2\ln x + 3)$ κτλ.

3. Πλευρά βάσης 40 cm, ύψος 10 cm.

4. $20\sqrt{3} \approx 109{,}5$ m, $\dfrac{16000}{20\sqrt{30}} \approx 146$ m.

5. Είναι το τετράγωνο.

6. Διάμετρος κύκλου $= \dfrac{\lambda}{4+\pi} =$

= Πλευρά τετραγώνου.

7. $t = \dfrac{1}{\kappa_2 - \kappa_1} - \ln\left(\dfrac{\kappa_2}{\kappa_1}\right)$.

8. i) $\dfrac{6000}{u} + 0{,}1 \cdot u^2$

ii) $\sqrt[3]{30000} \approx 31$ Km / h.

9. Καθεμιά 225 Ω.

10. Θα έχουν, διότι η ελάχιστη από-
σταση των πλοίων θα είναι

$\sqrt{80} < \sqrt{100} = 10$ km.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. i) $\approx 0{,}476$ ii) $p = 0{,}5$.

2. 16 μονάδες από 8 εργάτες.

3. $(-1, 3)$.

4. $p + q = (\alpha + \beta) - \left(\alpha\lambda + \dfrac{\beta}{\lambda}\right)$ κτλ.

5. Διάμετρος $= \dfrac{40}{3}$ cm,

   ύψος $= \dfrac{20}{3}$ cm.

6. Ύψος = Διάμετρος βάσης.

7. $\frac{2\pi}{27}R^3\sqrt{3}$.

8. β) i) 5600, 5,6, 4

10600, 5,3, 6

17600, 5,87, 8

ii) 1612, 5,22

9. α) $P'(x) = R'(x) - C'(x)$ κτλ.

β) 2.500.

10. i) $A\Gamma = \sqrt{d_1^2 + x^2}$,

$B\Gamma = \sqrt{d_2^2 + (d - x)^2}$ κτλ.

ii) $t'(x) = \frac{1}{u_1} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{1}{u_2} \cdot$

$$\cdot \frac{d - x}{\sqrt{(d - x)^2 + d_2^2}}$$

iii) Όταν t ελάχιστος, τότε

$t'(x) = 0$ κτλ.

Ευρετήριο Όρων

Στο Ευρετήριο όρων τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ και Ε δηλώνουν τον 1ο, 2ο, 3ο, 4ο και 5ο τόμο αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί αναφέρονται στην πρώτη από τις δύο ενδείξεις που αναγράφονται σε κάθε σελίδα.

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 194 18/09/2017 10:24

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 196 18/09/2017 10:24

22-0088_I_c_math_bm_1-54_28b.indd 201 18/09/2017 10:24

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 1ου ΤΟΜΟΥ