

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 4ος

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ

ΣΥΓΓΡΑΦΕΙΣ:

Αδαμόπουλος Λεωνίδας

**Επ. Σύμβουλος Παιδαγωγικού Ιν-
στιτούτου**

Δαμιανού Χαράλαμπος

**Αναπλ. Καθηγητής Παν/μίου Αθη-
νών**

Σβέρκος Ανδρέας

Σχολικός Σύμβουλος

ΚΡΙΤΕΣ:

Κουνιάς Στρατής

Καθηγητής Παν/μίου Αθηνών

Μακρής Κωνσταντίνος

Σχολικός Σύμβουλος

Τσικαλουδάκης Γεώργιος
Καθηγητής Β/θμιας Εκπαίδευσης

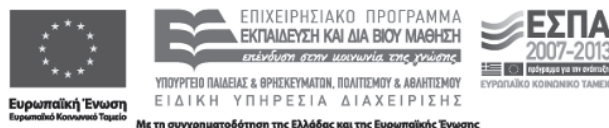
Γλωσσική Επιμέλεια:
Μπουσούνη Λία
Καθηγήτρια Β/θμιας Εκπαίδευσης

Δακτυλογράφηση:
Μπολιώτη Πόπη

Σχήματα:
Μπούτσικας Μιχάλης

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ**

**ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**ΑΔΑΜΟΠΟΥΛΟΣ ΛΕΩΝΙΔΑΣ
ΔΑΜΙΑΝΟΥ ΧΑΡΑΛΑΜΠΟΣ
ΣΒΕΡΚΟΣ ΑΝΔΡΕΑΣ**

**Η συγγραφή και η επιστημονική
επιμέλεια του βιβλίου
πραγματοποιήθηκε υπό την αιγίδα
του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου**

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΑΙ
ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ**

Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Τόμος 4ος

Ι.Τ.Υ.Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

2.5 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΣΥΣΧΕΤΙΣΗ

Εισαγωγή

Έχουμε δει μέχρι τώρα ότι ένα σύνολο παρατηρήσεων μιας μεταβλητής περιγράφεται με τα μέτρα θέσης και διασποράς, όπως για παράδειγμα, η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση, αντιστοίχως. Επιπλέον, με τη γραμμική παλινδρόμηση που εξετάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε πώς βρίσκουμε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης η οποία προσαρμόζεται καλύτερα στο “σμήνος” των σημείων όπως αυτά παριστάνονται σε ένα διάγραμμα διασποράς.

Ας δούμε, για παράδειγμα, τα παρακάτω ζεύγη τιμών (x_i, y_i) για τις μεταβλητές X, Y και (x'_i, y'_i) για τις μεταβλητές X', Y' :

x_i	y_i
1	2,5
1	4,0
2	3,0
3	4,5
3	4,0
4	3,5
5	5,5
5	5,0

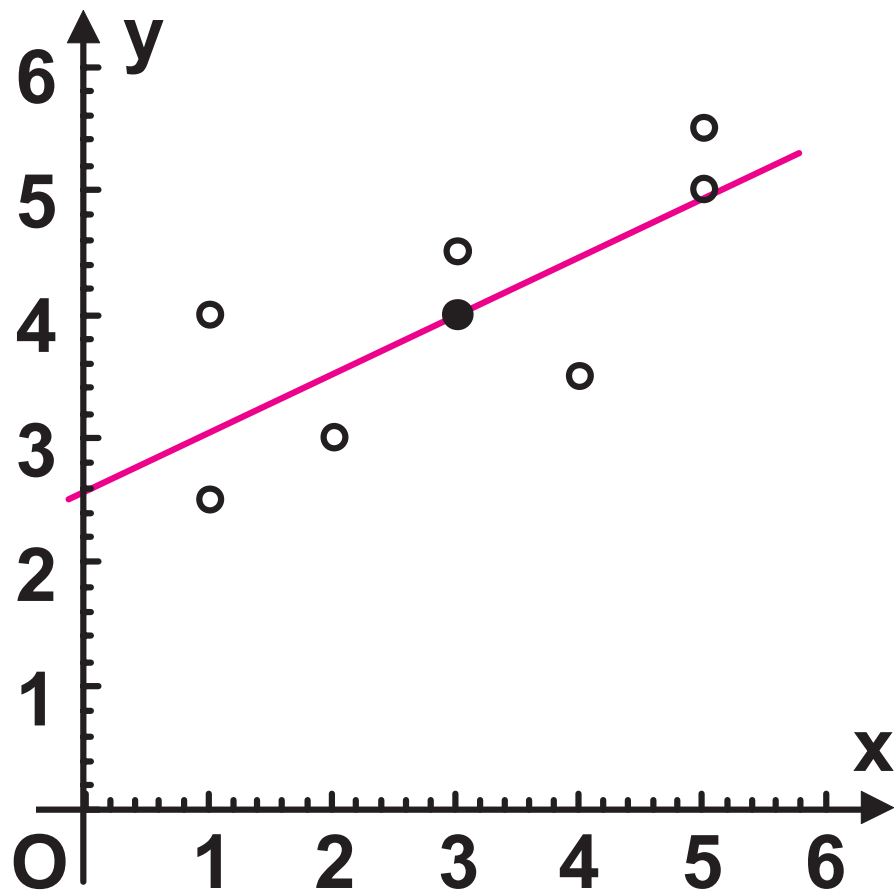
x'_i	y'_i
1,0	2,5
1,5	1,0
2,0	4,0
2,5	5,5
3,0	6,0
4,0	3,5
4,5	6,0
5,5	3,5

από τα οποία βρίσκουμε:

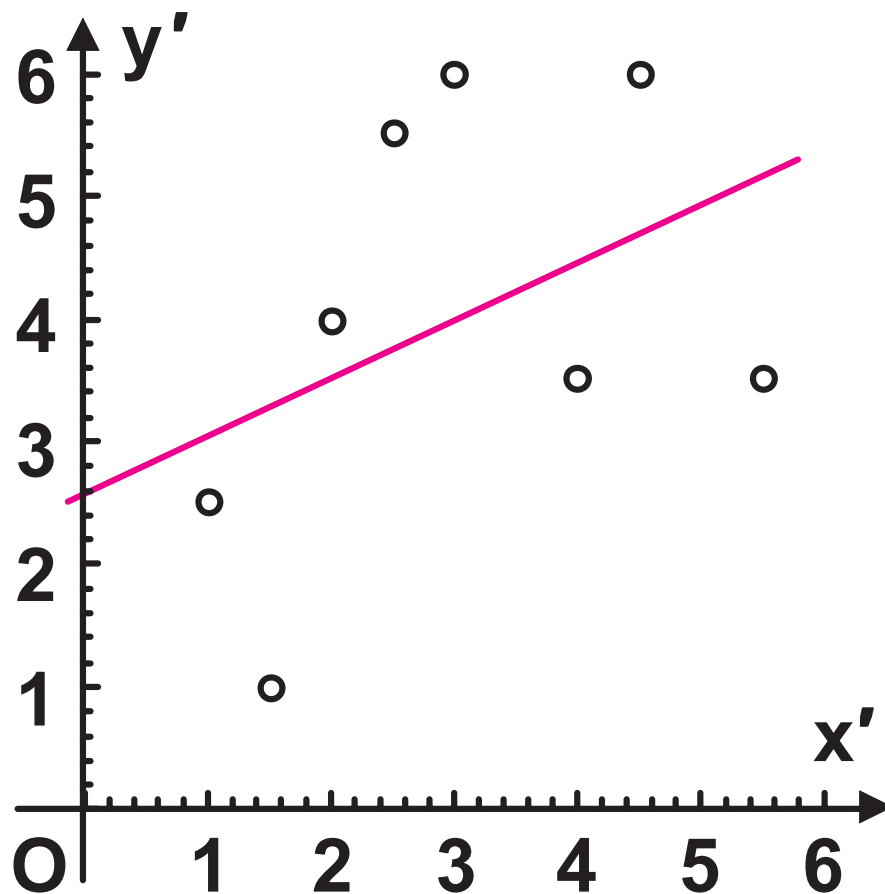
- $\bar{x} = 3, \quad \bar{y} = 5, \quad s_x = 1,5, \quad s_y = 0,94$

- $\bar{x}' = 3, \quad \bar{y}' = 5, \quad s_{x'} = 1,46,$
 $s_{y'} = 1,66$
- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(α) των σημείων (x_i, y_i) και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων
 $\hat{y} = 2,58 + 0,47x$
- το διάγραμμα διασποράς στο σχήμα 18(β) των σημείων (x'_i, y'_i) και την αντίστοιχη ευθεία ελαχίστων τετραγώνων
 $\hat{y}' = 2,58 + 0,47x'.$

18 α



(α)



(β)

Στα δύο αυτά διαγράμματα διασποράς βλέπουμε ότι προσαρμόζεται η ίδια ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης. Όμως τα σημεία του σμήνους στο διάγραμμα (α) είναι περισσότερο συγκεντρωμένα γύρω από την ευθεία ενώ στο διάγραμμα (β) έχουμε ένα πιο χαλαρό σμήνος

σημείων γύρω από την αντίστοιχη ευθεία παλινδρόμησης. Δηλαδή στην πρώτη περίπτωση η γραμμική σχέση μεταξύ των μεταβλητών είναι ισχυρότερη παρά στη δεύτερη περίπτωση. Ένα μέτρο που μας δίνει το μέγεθος της γραμμικής σχέσης ή το βαθμό συγκέντρωσης των σημείων του διαγράμματος διασποράς γύρω από την ευθεία παλινδρόμησης είναι ο λεγόμενος **συντελεστής γραμμικής συσχέτισης (linear correlation coefficient)**.

Συντελεστής Γραμμικής Συσχέτισης

Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X και Y ορίζεται με βάση ένα δείγμα n ζευγών παρατηρήσεων (x_i, y_i) , $i = 1, 2, \dots, n$

συμβολίζεται με $r(X, Y)$ ή απλά με r και δίνεται από τον τύπο:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^v (y_i - \bar{y})^2}} \quad (1)$$

αναφέρεται δε και ως συντελεστής συσχέτισης του Pearson.

Από τον ορισμό του r παρατηρούμε ότι για μεγάλες τιμές x_i της X και y_i της Y (μεγαλύτερες από τη μέση τιμή τους) οι διαφορές $(x_i - \bar{x})$ και $(y_i - \bar{y})$ είναι θετικές, οπότε το γινόμενο τους είναι θετικό. Όμοια για μικρές τιμές x_i και y_i , οι διαφορές $(x_i - \bar{x})$ και $(y_i - \bar{y})$ είναι αρνητικές,

οπότε το γινόμενο τους είναι πάλι θετικό. Επομένως, όταν σε μεγάλες τιμές της μεταβλητής X αντιστοιχούν και μεγάλες τιμές της Y , ή σε μικρές τιμές της X αντιστοιχούν μικρές τιμές της Y τότε ο συντελεστής συσχέτισης είναι θετικός και λέμε ότι οι X, Y είναι θετικά συσχετισμένες. Ανάλογα μπορούμε να δούμε ότι ο r παίρνει αρνητικές τιμές όταν σε μεγάλες τιμές της μιας μεταβλητής αντιστοιχούν μικρές τιμές της άλλης, οπότε λέμε ότι οι μεταβλητές αυτές είναι αρνητικά συσχετισμένες.

Με βάση τον παρακάτω πίνακα και τον τύπο (1) υπολογίζουμε το συντελεστή

x_i	y_i	$x_i - \bar{x}$	$y_i - \bar{y}$	
1	2,5	-2	-1,5	
1	4,0	-2	0	
2	3,0	-1	-1	
3	4,5	0	0,5	
3	4,0	0	0	
4	3,5	1	-0,5	
5	5,5	2	1,5	
5	5,0	2	1	
24	32	0	0	

γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του πρώτου παραδείγματος

	$(x_i - \bar{x})^2$	$(y_i - \bar{y})^2$	$(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})$
	4	2,25	3
	4	0	0
	1	1	1
	0	0,25	0
	0	0	0
	1	0,25	-0,5
	4	0,25	3
	4	1	2
	18	7	8,5

$$r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum (y_i - \bar{y})^2}} =$$
$$= \frac{8,5}{\sqrt{18}\sqrt{7}} \approx 0,76.$$

Με ανάλογο τρόπο υπολογίζουμε και το συντελεστή γραμμικής συσχέτισης για τα δεδομένα του δεύτερου παραδείγματος όπου βρίσκουμε $r' \approx 0,41$.

Συγκρίνοντας τους δύο συντελεστές συσχέτισης βλέπουμε ότι $r > r'$. Αυτό δηλώνει ότι οι μεταβλητές X , Y του πρώτου παραδείγματος είναι περισσότερο γραμμικά συσχετισμένες παρά οι μεταβλητές X' , Y' του δεύτερου παραδείγματος.

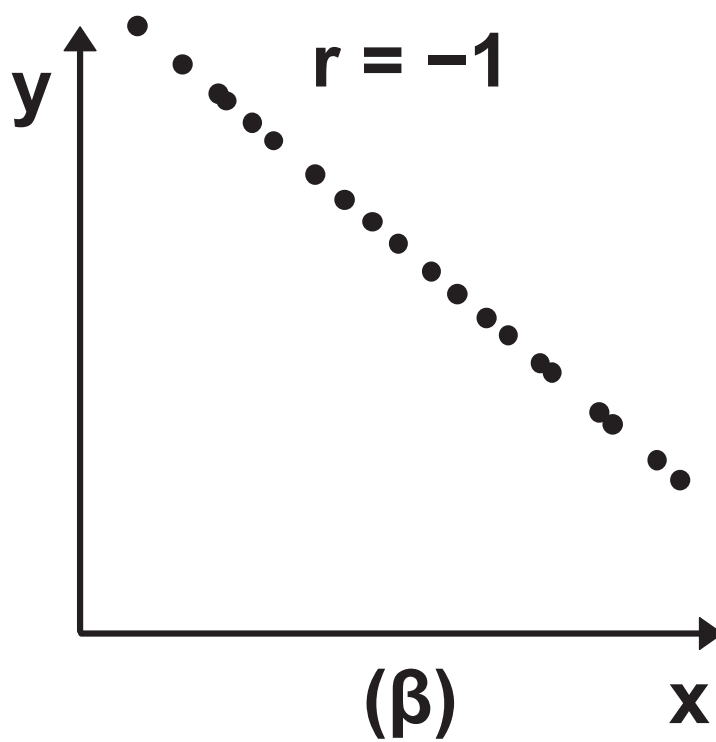
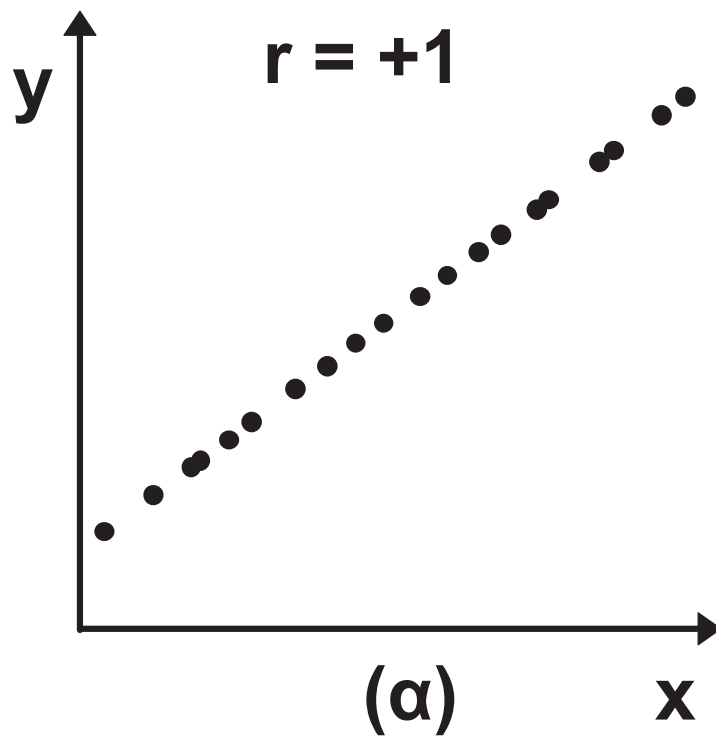
Ο συντελεστής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός, δηλαδή δεν εκφράζεται σε συγκεκριμένες μονάδες μέτρησης, επομένως είναι ανεξάρτητος των χρησιμοποιούμενων μονάδων μέτρησης των μεταβλητών X και Y . Επί πλέον ισχύει πάντοτε ότι:

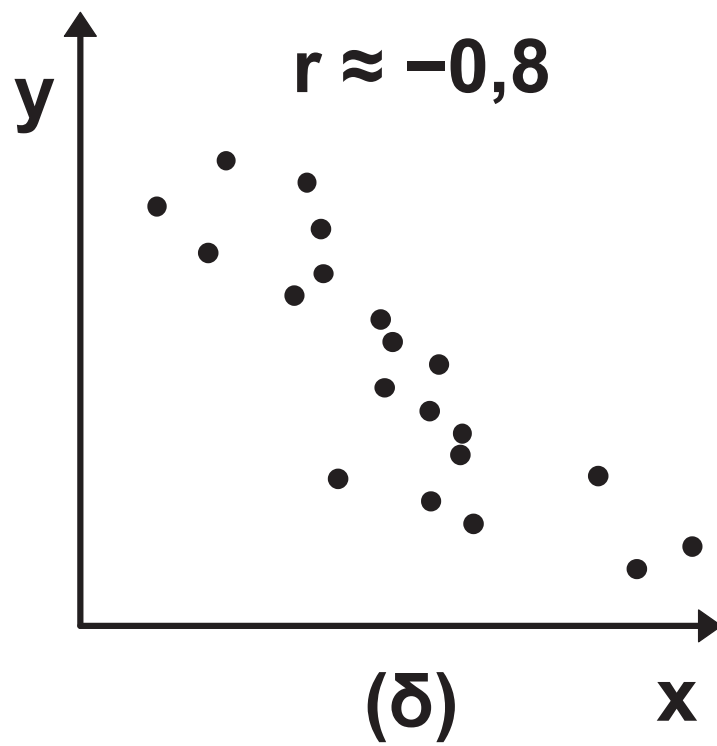
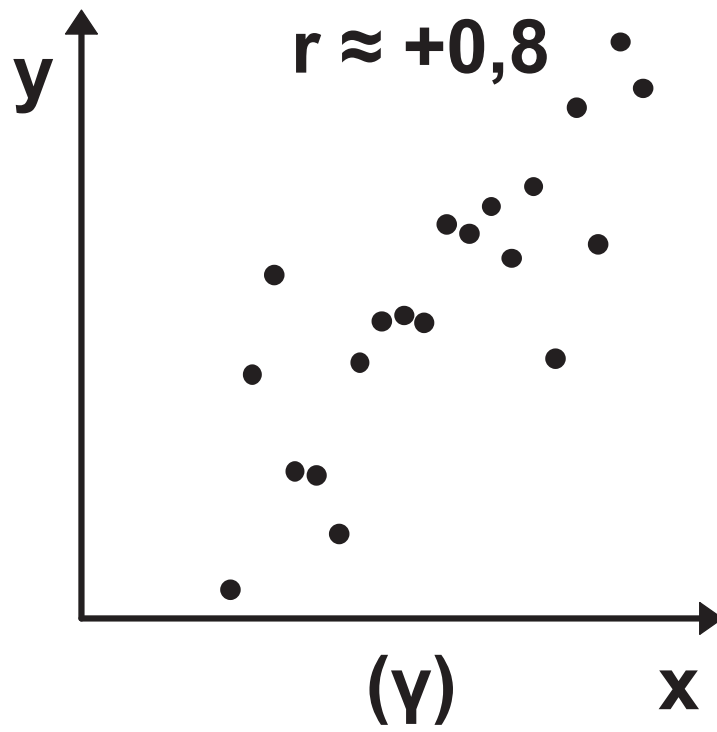
$$-1 \leq r \leq +1.$$

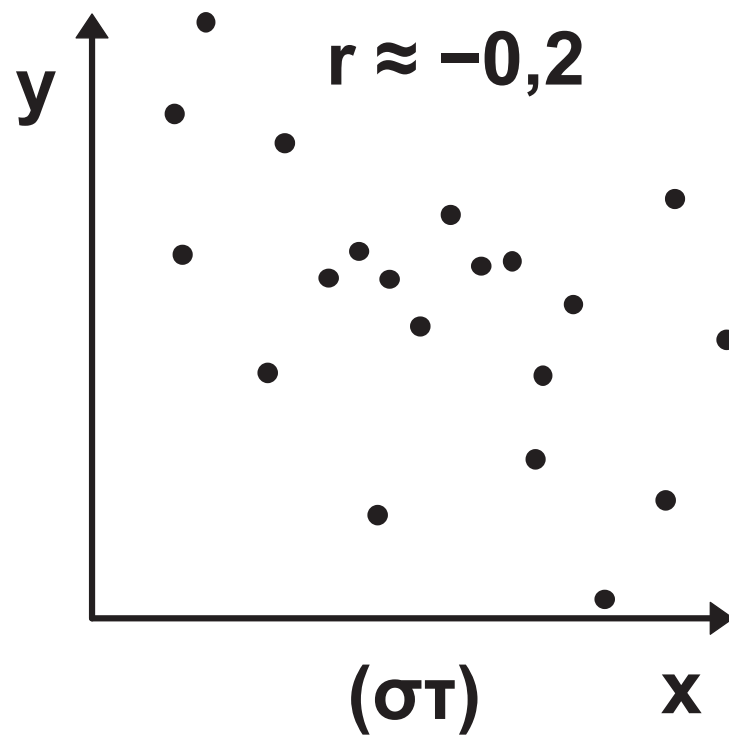
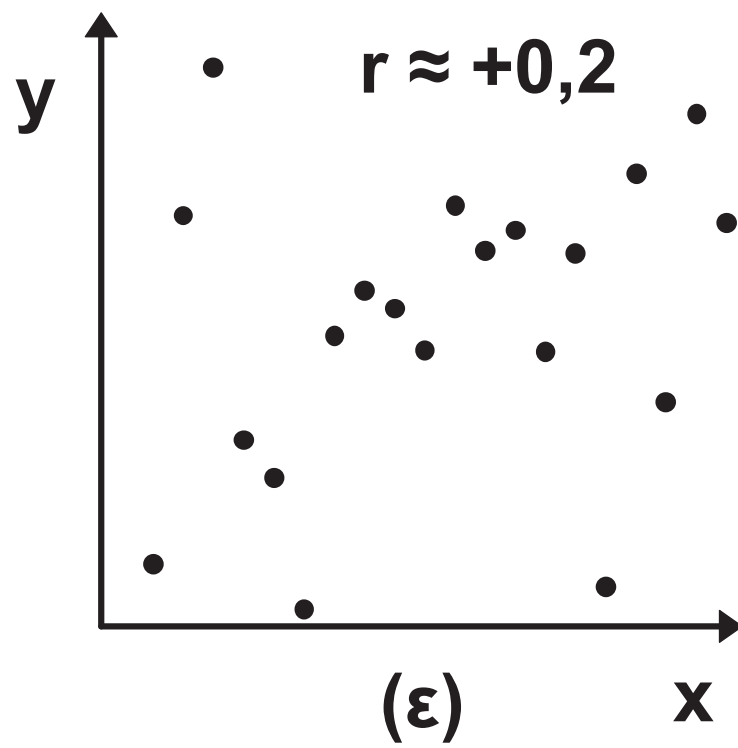
Πιο συγκεκριμένα όταν:

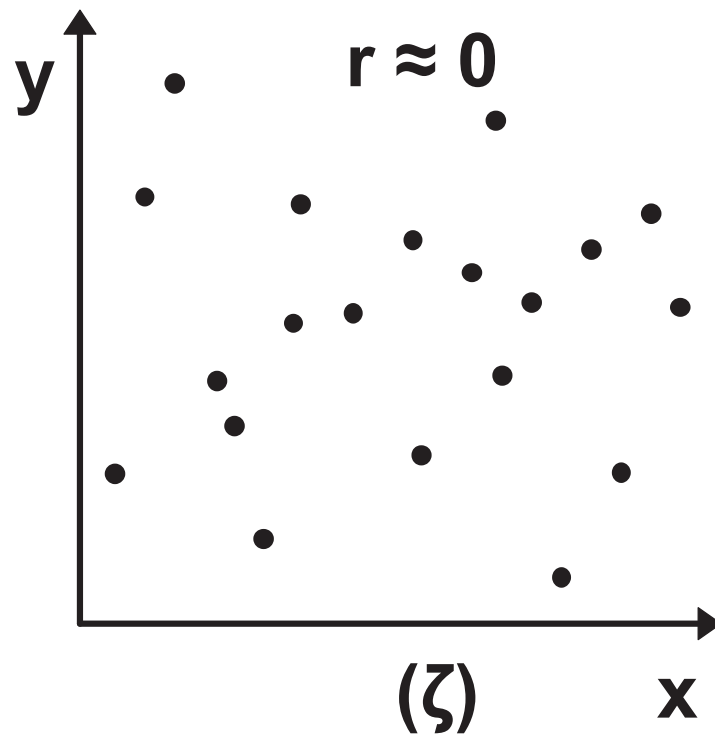
- $0 < r < +1$, τότε οι X, Y είναι θετικά γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(γ), (ε))
- $-1 < r < 0$, τότε οι X, Y είναι αρνητικά γραμμικά συσχετισμένες (σχήμα 19(δ), (στ))

- $r = +1$, τότε έχουμε τέλεια θετική γραμμική συσχέτιση και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με θετική κλίση (σχήμα 19(α)), δηλαδή $y = \alpha + \beta x$, $\beta > 0$
- $r = -1$, τότε έχουμε τέλεια αρνητική γραμμική συσχέτιση και όλα τα σημεία βρίσκονται πάνω σε μια ευθεία με αρνητική κλίση (σχήμα 19(β)), δηλαδή $y = \alpha + \beta x$, $\beta < 0$
- $r = 0$, τότε δεν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών. Οι μεταβλητές δηλαδή X , Y είναι γραμμικά ασυσχέτιστες (σχήμα 19(ζ)).









Διαγράμματα διασποράς και συντελεστές συσχέτισης για διάφορα ζεύγη παρατηρήσεων (x_i, y_i) .

Αποδεικνύεται ότι ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r δίνεται ισοδύναμα και από τον παρακάτω τύπο, η χρήση του οποίου διευκολύνει συχνά τους υπολογισμούς κυρίως στην περίπτωση που οι \bar{x}, \bar{y}

δεν είναι ακέραιοι:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^v x_i y_i - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right) \left(\sum_{i=1}^v y_i \right)}{\sqrt{\sum_{i=1}^v x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v x_i \right)^2} \sqrt{\sum_{i=1}^v y_i^2 - \left(\sum_{i=1}^v y_i \right)^2}}$$

(2)

Συσχέτιση και Παλινδρόμηση

Η παλινδρόμηση και η συσχέτιση, όπως τις εξετάσαμε έως τώρα, είναι δύο διαδικασίες μελέτης διμεταβλητών πληθυσμών. Η παλινδρόμηση προσδιορίζει τη σχέση εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών, ενώ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δίνει ένα μέτρο του μεγέθους της

γραμμικής συσχέτισης μεταξύ δύο μεταβλητών. Επομένως, οι δύο διαδικασίες δεν είναι άσχετες μεταξύ τους.

Όταν δεν έχουμε πειραματικά δεδομένα, να προκαθορίζονται δηλαδή οι τιμές της μιας μεταβλητής, τότε μπορεί να μελετηθεί είτε η εξάρτηση της Y από τη X είτε η εξάρτηση της X από την Y . Το πόσο έντονη είναι η σχέση εξάρτησης μεταξύ των δύο μεταβλητών μας το δίνει ο συντελεστής συσχέτισης. Όσο το r πλησιάζει στο $+1$ τόσο τα σημεία του διαγράμματος διασποράς τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με συντελεστή διεύθυνσης $\hat{\beta} > 0$. Όσο το r πλησιάζει στο -1 τόσο τα σημεία τείνουν να βρίσκονται σε μια ευθεία με $\hat{\beta} < 0$. Όταν $r \approx 0$, τότε $\hat{\beta} \approx 0$.

Συνήθως στις εφαρμογές εξετάζεται η συσχέτιση και η παλινδρόμηση μαζί, οπότε έχουμε πληρέστερη και πιο ολοκληρωμένη εξέταση των δύο μεταβλητών.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να υπολογιστεί και να ερμηνευτεί ο συντελεστής συσχέτισης r μεταξύ των μεταβλητών X και Y με βάση τις παρακάτω τιμές:

x	10	13	17	21	25	28	30
y	21	24	29	25	36	33	40

ΛΥΣΗ

Για τον υπολογισμό του συντελεστή συσχέτισης μεταξύ των X και Y διευκολύνει ο παρακάτω πίνακας:

x	y	x^2	
10	21	100	
13	24	169	
17	29	289	
21	25	441	
25	36	625	
28	33	784	
30	40	900	
$\Sigma x = 144$	$\Sigma y = 208$	$\Sigma x^2 = 3308$	

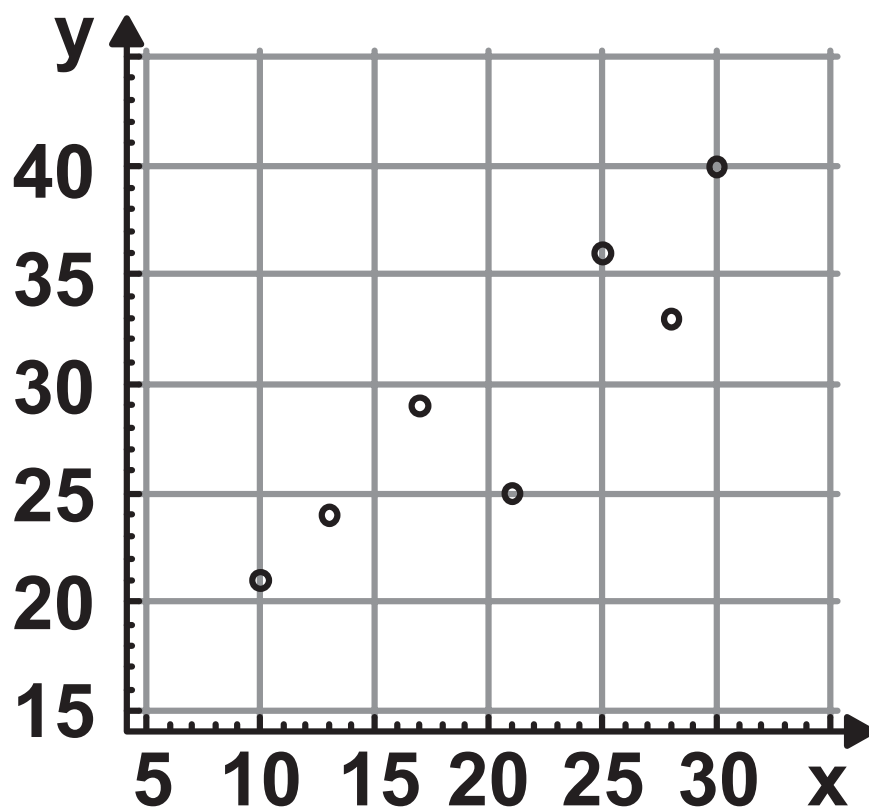
	y^2	xy
	441	210
	576	312
	841	493
	625	525
	1296	900
	1089	924
	1600	1200
	$\Sigma y^2 = 6468$	$\Sigma xy = 4564$

$v = 7$

Ο συντελεστής συσχέτισης υπολογίζεται από τη σχέση:

$$r = \frac{n \sum xy - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n \sum x^2 - (\sum x)^2} \sqrt{n \sum y^2 - (\sum y)^2}} =$$
$$= \frac{7(4564) - (144)(208)}{\sqrt{7(3308) - (144)^2} \sqrt{7(6468) - (208)^2}} \approx$$
$$\approx 0,9.$$

Η υψηλή τιμή του r μας δείχνει ότι υπάρχει πολύ έντονη θετική γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y , όπως εξάλλου μπορούμε να το διαπιστώσουμε και από το αντίστοιχο διάγραμμα διασποράς.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

1. Να διατάξετε τις παρακάτω τιμές του r σε αύξουσα τάξη του βαθμού γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών: $-0,6$, $0,9$, $-0,7$, $0,2$, 0 , -1 .

2. Από τα διαγράμματα διασποράς των παρακάτω ζευγών (x_i, y_i) να εκτιμήσετε (χωρίς πράξεις) εάν η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών X και Y είναι θετική ή αρνητική και επιπλέον αν είναι μικρή, μέτρια ή μεγάλη:

α)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	-2	0	1	3	5	6	8	10

β)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	4	5	1	6	4	3	8	10

γ)

x	1	3	5	7	9	10	12	13
y	10	8	3	4	6	3	2	5

$$\delta) \begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ \hline y & 10 & 8 & 3 & 4 & 1 & 6 & 5 & 12 \end{array}$$

$$\epsilon) \begin{array}{c|cccccccc} x & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 10 & 12 & 13 \\ \hline y & 6 & 8 & 6 & 3 & 5 & 7 & 8 & 9 \end{array}$$

3. Να υπολογίσετε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα ζεύγη τιμών (x_i, y_i) της προηγούμενης άσκησης και να τους συγκρίνετε με τις αντίστοιχες εκτιμήσεις σας.

4. Να βρείτε τους συντελεστές γραμμικής συσχέτισης για τα παρακάτω ζεύγη τιμών και να σχολιάσετε τα αποτελέσματα.

α)

x	1	2	3	4	5
y	4	2	0	-2	-4

β)

x	1	2	3	4	5
y	-4	-2	0	2	4

5. Για τέσσερα ζεύγη παρατηρήσεων (x_i, y_i) έχουμε:

$$\bar{x} = 7, \quad \bar{y} = 4,5,$$

$$\sum x_i^2 = 210, \quad \sum y_i^2 = 92,$$

$$\sum x_i y_i = 138.$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης.

6. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα και να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης ($x, y > 0$):

x	y	$(x - \bar{x})^2$	$(y - \bar{y})^2$	$(x - \bar{x})(y - \bar{y})$
1	3			
2	6	9	1	3
-	1			
6	-			
8	8			
9	13			

Β' ΟΜΑΔΑΣ

1. Η κατά άτομο κατανάλωση (σε γαλόνια) άπαχου (Υ) και πλήρους (Χ) γάλακτος για τα έτη 1982-87 στις ΗΠΑ δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

	1982	1983	1984	1985	1986	1987
Πλήρες γάλα, x	15,6	15,2	14,7	14,3	13,4	12,8
Άπαχο γάλα, y	10,8	11,1	11,5	12,1	12,8	13,2

Πλήρες

γάλα, x

Άπαχο

γάλα, y

α) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης.

β) Αν μετατραπούν οι ποσότητες γάλακτος σε λίτρα, ποια θα είναι η τιμή του συντελεστή συσχέτισης; (1 γαλόνι \approx 3,8 λίτρα)

**2. Τα παρακάτω δεδομένα περι-
στάνουν τους δείκτες ευφυΐας
(I.Q.) 10 μητέρων (X) και των
θυγατέρων τους (Y):**

I.Q. μητέ- ρας	I.Q. θυγατέ- ρας	I.Q. μητέ- ρας	I.Q. θυγατέ- ρας
85	90	115	110
90	100	120	125
95	90	120	110
100	105	130	130
110	120	135	120

- α) Να κατασκευάσετε το διά-
γραμμα διασποράς**
- β) Από το διάγραμμα διασπο-
ράς να εκτιμήσετε το συντε-
λεστή συσχέτισης**

γ) Να υπολογίσετε και να ερμηνεύσετε το συντελεστή συσχέτισης

3. α) Να δείξετε ότι

$$\sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum_{i=1}^v x_i y_i - v\bar{x}\bar{y}.$$

β) Για επτά ζεύγη παρατηρήσεων (x_i, y_i) έχουμε

$$\sum (x_i - \bar{x})^2 = 28,$$

$$\sum (y_i - \bar{y})^2 = 112,$$

$$\sum x_i y_i = 308, \quad \bar{x} = 4, \quad \bar{y} = 9.$$

Να υπολογίσετε το συντελεστή συσχέτισης.

4. Σε μια εξέταση στα Μαθηματικά οκτώ μαθητών η βαθμολογία δύο εξεταστών Α, Β ήταν ως ακολούθως:

		Μαθητής							
		1	2	3	4	5	6	7	8
Εξεταστής	A	55	62	71	66	63	56	72	51
Εξεταστής	B	54	56	61	66	63	61	73	54

Να εξετάσετε εάν υπάρχει γραμμική συσχέτιση μεταξύ της βαθμολογίας των δύο εξεταστών.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Ο αριθμός των παιδιών σε ένα δείγμα 80 οικογενειών μιας πόλης δίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Αριθμός Παιδιών	0	1	2	3	4	5	6
Οικογένειες	10	25	20	12	6	5	2

- α) Να βρείτε τη μέση τιμή, τη διάμεση τιμή, την επικρατούσα τιμή και την τυπική απόκλιση του αριθμού των παιδιών.
- β) Να κατασκευάσετε το διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων και το πολύγωνο

**αθροιστικών σχετικών συ-
χνοτήτων.**

**γ) Από το πολύγωνο αθροιστι-
κών σχετικών συχνοτήτων
να εκτιμήσετε τα τρία τεταρ-
τημόρια.**

**2. Ο αριθμός των τυπογραφικών
λαθών που βρέθηκαν στις 60
σελίδες ενός κειμένου στην
πρώτη του διόρθωση ήταν:**

3	4	5	2	6	7	2	2	3	4
5	6	7	4	0	6	4	0	0	2
3	1	1	4	5	4	3	3	7	6
4	3	2	1	0	1	2	3	3	3
4	4	5	6	8	3	9	3	1	0
4	4	5	5	6	6	7	8	9	5

- α) Να ομαδοποιήσετε τα δεδομένα σε πέντε ισοπλατείς κλάσεις πλάτους δύο και να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.**
- β) Να κατασκευάσετε τα ιστογράμματα συχνοτήτων και αθροιστικών συχνοτήτων και τα αντίστοιχα πολύγωνα συχνοτήτων.**
- γ) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή, τη διάμεσο, την κορυφή και την τυπική απόκλιση.**

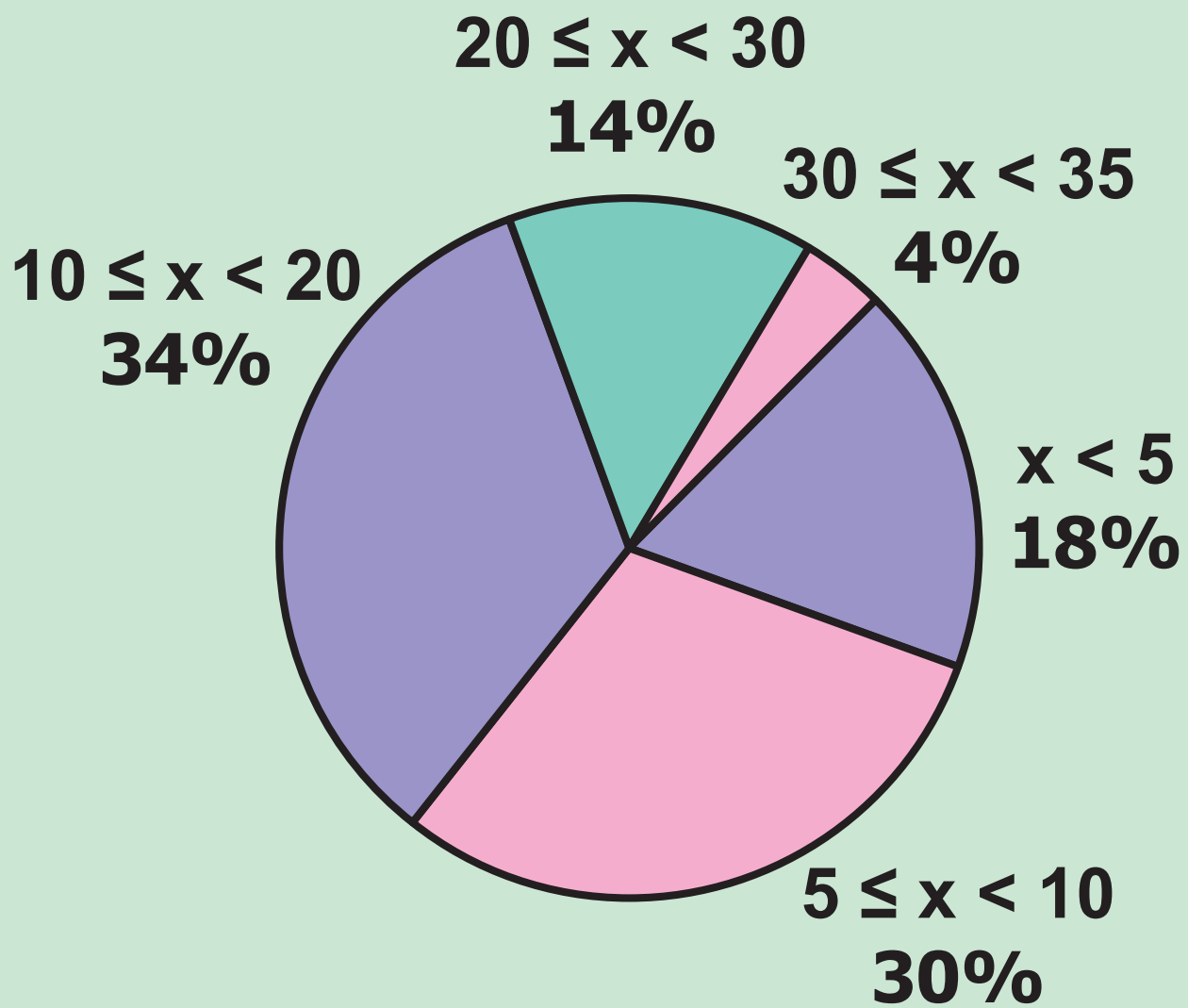
3. Σε μια εταιρεία συνολικά εργάζονται 200 άτομα. Όπως προέκυψε από ένα τυχαίο δείγμα υπαλλήλων, ο συνολικός χρόνος υπηρεσίας τους δίνεται στο παρακάτω κυκλικό διάγραμμα.

α) Να κατασκευάσετε τον πίνακα συχνοτήτων.

β) Να υπολογίσετε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση.

**γ) Πόσοι συνολικά υπάλληλοι αναμένονται να συνταξιοδοτηθούν (συμπληρώνοντας 35-ετία) μέσα στα επόμενα
i) 5 χρόνια, ii) 10 χρόνια;**

δ) Να κατασκευάσετε το ιστόγραμμα σχετικών συχνοτήτων.



43 / 126

4. Τα εργατικά ατυχήματα που συνέβησαν το 1990 και το 1994 δίνονται στον παρακάτω πίνακα (Στοιχεία Υπουργείου Εργασίας).

- α) Να απεικονίσετε τα δεδομένα σε ένα ραβδόγραμμα συχνοτήτων.**
- β) Πόσα ατυχήματα συνέβησαν κατά μέσο όρο για τα έτη 1990 και 1994;**
- γ) Το 1,4% των ατυχημάτων του 1990 και το 2,1% του 1994 ήταν θανατηφόρα. Πόσα ατυχήματα ήταν θανατηφόρα για τα αντίστοιχα έτη; Ποιο είναι το συμπέρασμά σας;**

Μήνες	1990	1994
Ιαν.-Φεβρ.	1057	692
Μαρ.-Απρ.	927	716
Μάιος-Ιούν.	1114	829
Ιούλ.-Αυγ.	1020	783
Σεπτ.-Οκτ.	941	809
Νοέμ.-Δεκ.	775	636
Σύνολο	5834	4465

5. Ο παρακάτω πίνακας δίνει τη διάρκεια ζωής δύο τύπων ηλεκτρικών συσκευών A και B σε χιλιάδες ώρες. Μια ηλεκτρική συσκευή τύπου A στοιχίζει 230 ευρώ.

A	B
12	12
14	13
23	16
30	22
36	32

α) Ποιου τύπου ηλεκτρική συσκευή θα προτιμήσετε, αν η μία ηλεκτρική συσκευή τύπου B στοιχίζει:

i) 180 ευρώ ii) 190 ευρώ
iii) 200 ευρώ.

Να αιτιολογήσετε σε κάθε περίπτωση την απάντησή σας.

β) Ποιου τύπου οι ηλεκτρικές συσκευές παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια ως προς τη διάρκεια λειτουργίας τους;

6. Σε δειγματοληπτική έρευνα που έγινε στις 15 χώρες της Ευρωπαϊκής Ένωσης (Ε.Ε.) μία βδομάδα πριν και μία βδομάδα μετά το Συμβούλιο Κορυφής, (Σ.Κ.) που έγινε το Μάιο του 1998, τα ποσοστά των ατόμων που αισθάνονταν πολύ

**καλά πληροφορημένα για το
ενιαίο νόμισμα (ευρώ) δίνονται
στον παρακάτω πίνακα:**

Χώρα	Πριν το Σ.Κ.	Μετά το Σ.Κ.
Αυστρία	50	47
Βέλγιο	55	55
Βρετανία	40	35
Γαλλία	61	72
Γερμανία	44	48
Δανία	51	53
Ελλάδα	26	22
Ιρλανδία	41	29
Ισπανία	30	39
Ιταλία	49	39

Χώρα	Πριν το Σ.Κ.	Μετά το Σ.Κ.
Λουξεμβούργο	56	62
Ολλανδία	56	55
Πορτογαλία	18	20
Σουηδία	40	38
Φινλανδία	45	45

- α) Να παραστήσετε τα δεδομένα σε μορφή ραβδογράμματος.
- β) Να βρεθεί το μέσο ποσοστό των πολύ καλά ενημερωμένων για τις 15 χώρες της Ε.Ε. πριν και μετά το Σ.Κ., υπολογίζοντας
- i) τον αριθμητικό μέσο και
 - ii) το σταθμικό μέσο ποσοστό με βάρη τους πληθυσμούς των 15 χωρών μελών της Ε.Ε.

Ποιος από τους δύο μέσους είναι ο αντιπροσωπευτικότερος;

7. Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι χρόνοι (σε λεπτά και δευτερόλεπτα) των νικητών των Ολυμπιακών αγώνων στην κολύμβηση στα 400 μέτρα ελευθέρως (freestyle) ανδρών και γυναικών. Να δώσετε (για κάθε φύλο χωριστά) το χρονογράμμα των δεδομένων αυτών. Τι συμπεράσματα βγάζετε;

Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών
1904	6:16.2	—
1908	5:36.8	—
1912	5:24.4	—
1920	5:26.8	—
1924	5:04.2	6:02.2
1928	5:01.6	5:42.8
1932	4:48.4	5:28.5
1936	4:44.5	5:26.4
1948	4:41.0	5:17.8
1952	4:30.7	5:12.1
1956	4:27.3	4:54.6
1960	4:18.3	4:50.6

Έτος	Χρόνος Ανδρών	Χρόνος Γυναικών
1964	4:12.2	4:43.3
1968	4:09.0	4:31.8
1972	4:00.3	4:19.4
1976	3:51.9	4:09.9
1980	3:51.3	4:08.8
1984	3:51.2	4:07.1
1988	3:47.0	4:03.9
1992	3:45.0	4:07.2

Πηγή: The World Almanac and Book of Facts, 1994.

8. Οι κάτοικοι ανά km^2 από το 1960 έως και το 1974 στην Ελλάδα ήταν:

Κάτοι- κοι, Y	63	64	64	64	66	65	65	66
Έτος, X	1960	61	62	63	64	65	66	67
Κάτοι- κοι, Y	66	67	67	67	67	68	68	
Έτος, X	68	69	1970	71	72	73	74	

- α) Να εκτιμήσετε την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X , και να την παραστήσετε στο διάγραμμα διασποράς.
- β) Το 1976 είχαμε 69,5 κατοίκους/ km^2 . Είναι αυτό αναμενόμενο; (Υπόδειξη: Θεωρούμε ως έτος αναφοράς το 1960 με τιμή $x = 1$).

9. Ο συντελεστής γενικής θνησιμότητας (Σ.Γ.Θ.) της Ελλάδας για τα χρόνια 1931-1964 παρουσίασε την παρακάτω πορεία.

Έτος, X	1931	1936	1940
Σ.Γ.Θ.%, Y	17,7	15,1	12,8

- α) Να χαράξετε “με το μάτι” την ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης $y = \alpha + \beta x$ στο διάγραμμα διασποράς και από την ευθεία αυτή να εκτιμήσετε το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965.**
- β) Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των δύο σημείων να υπολογίσετε την εξίσωση της ευθείας παλινδρόμησης και στη συνέχεια να εκτιμήσετε πάλι**

1950	1956	1961	1964
7,9	7,4	7,6	8,2

το Σ.Γ.Θ. για το έτος 1965. Συγκρίνετε με το προηγούμενο αποτέλεσμα.

γ) Να επαναλάβετε το ίδιο χρησιμοποιώντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων.

(Υπόδειξη: Για την ανεξάρτητη μεταβλητή X να θέσετε για το έτος 1931 ως τιμή το 1, οπότε για το 1936 το $x = 6$ και για το 1965 το 35).

10. Ο παρακάτω πίνακας δίνει το ημερήσιο εισόδημα X και τις αντίστοιχες δαπάνες διατροφής Y πέντε υπαλλήλων, που πάρθηκαν τυχαία από μια εταιρεία.

Εισόδημα, (δεκάδες ευρώ),	X	3,5	3,7	4,2	4,3	6,9
Δαπάνες διατροφής (δεκάδες ευρώ),	Y	1,1	1,5	1,8	1,5	2,5

α) Με τη μέθοδο των “ελαχίστων τετραγώνων” να βρείτε την εξίσωση της ευθείας γραμμικής παλινδρόμησης των εξόδων διατροφής (πάνω) στο

εισόδημα.

β) Μια υπάλληλος της εταιρείας έχει ημερήσιο εισόδημα 50 ευρώ.

Πόσο εκτιμάτε εσείς ότι θα ξοδεύει για διατροφή την ημέρα;

γ) Αν γνωρίζετε ότι μια υπάλληλος ξοδεύει 30 ευρώ για διατροφή μπορείτε, με βάση τα παραπάνω, να προβλέψετε το ημερήσιο εισόδημά της;

11. Η ποσότητα

$$s_{xy} = \frac{1}{v} \sum_{i=1}^v (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) \text{ καλεί-}$$

ται συνδιακύμανση των μεταβλητών X και Y . Αν καλέσουμε με s_x^2 , s_y^2 τις διακυμάνσεις των X και Y αντίστοιχα, να δείξετε ότι ισχύουν οι σχέσεις:

$$\alpha) \hat{\beta} = \frac{s_{xy}}{s_x^2} \quad \beta) r = \hat{\beta} \frac{s_x}{s_y}$$

12. Ένας μαθητής γνώριζε ότι η σχέση που συνδέει τους βαθμούς Φαρενάιτ ($^{\circ}\text{F}$) με τους βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$) είναι γραμμική, δηλαδή

$F = \alpha + \beta C$. Επειδή όμως δε θυμότανε τις σταθερές α , β , μέτρησε τη θερμοκρασία του δωματίου του σε πέντε διαφορετικές ώρες με δύο θερμοόμετρα με κλίμακα σε $^{\circ}F$ και $^{\circ}C$, αντίστοιχα, και πήρε τα παρακάτω ζεύγη τιμών:

$^{\circ}C$	15	20	25	30	35
$^{\circ}F$	59	68	77	86	95

Να βρείτε τη σχέση $\hat{F} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}C$ που συνδέει τις δύο κλίμακες θερμοκρασίας.

13. Δίνεται δείγμα n ζευγών $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ δύο μεταβλητών X και Y και έστω $r(X, Y)$ ο συντελεστής συσχέτισης. Εάν $Z = \lambda Y$ όπου λ θετική σταθερά, να δείξετε ότι ισχύει:

$$r(X, Z) = r(X, Y).$$

Τι γίνεται, εάν $\lambda < 0$;

14. Ο αριθμός των διαζυγίων που εκδόθηκαν στην Κύπρο από το 1974 έως το 1994 δίνεται παρακάτω (Πηγή: Τμήμα Στατιστικής και Ερευνών Κύπρου).

Έτος	x	Αριθμός Διαζυγίων y
1974	1	140
1975	2	121
1976	3	110
1977	4	136
1978	5	158
1979	6	161
1980	7	164
1981	8	175
1982	9	216
1983	10	262
1984	11	250
1985	12	258
1986	13	276
1987	14	326

Έτος	x	Αριθμός Διαζυγίων y
1988	15	312
1989	16	335
1990	17	348
1991	18	304
1992	19	433
1993	20	504
1994	21	555
<p>Δίνονται:</p> <p>$v = 21$</p> <p>$\Sigma x^2 = 3.311$</p> <p>$\Sigma x = 231$</p> <p>$\Sigma y^2 = 17.726.800$</p> <p>$\Sigma y = 5.544$ $\Sigma xy = 75.512$</p>		

Να βρείτε την ευθεία “ελαχίστων τετραγώνων” και να εκτιμήσετε τον αριθμό των διαζυγίων για τα έτη 1995, 2000.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Στις ερωτήσεις 1-10 να βάλετε σε κύκλο το Σ (Σωστό) ή το Λ (Λάθος).

1. Πάντοτε ένα μεγαλύτερο δείγμα δίνει πιο αξιόπιστα αποτελέσματα από ένα μικρότερο δείγμα.

Σ Λ

2. Όταν έχουμε συμμετρική κατανομή, η μέση τιμή συμπίπτει με τη διάμεσο.

Σ Λ

3. Όταν έχουμε ακραίες παρατηρήσεις, είναι προτιμότερο να

χρησιμοποιούμε τη μέση τιμή
αντί της διαμέσου.

Σ Λ

4. Ο λόγος της μέσης τιμής προς
την τυπική απόκλιση καλείται
συντελεστής μεταβολής και εί-
ναι καθαρός αριθμός.

Σ Λ

5. Όταν προσθέσουμε μια σταθε-
ρά στις παρατηρήσεις μιας με-
ταβλητής τότε η μέση τιμή και
η τυπική απόκλιση αυξάνουν
κατά τη σταθερά αυτή.

Σ Λ

6. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η μέση τιμή πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά.

Σ Λ

7. Όταν πολλαπλασιάσουμε τις τιμές μιας μεταβλητής επί μια σταθερά, τότε η τυπική απόκλιση πολλαπλασιάζεται επί την ίδια σταθερά.

Σ Λ

8. Η διάμεσος και το δεύτερο τεταρτημόριο έχουν πάντα την ίδια τιμή.

Σ Λ

9. Το βάρος της ζάχαρης που βάζουμε στους καφέδες είναι ποιοτική μεταβλητή, γιατί χαρακτηρίζει τον καφέ σκέτο, μέτριο ή γλυκό.

Σ Λ

10. Η σχετική συχνότητα μπορεί να πάρει και αρνητικές τιμές.

Σ Λ

11. Για την ανεξάρτητη μεταβλητή οι παρατηρήσεις είτε προκαθορίζονται είτε λαμβάνονται χωρίς να υπεισέρχεται σφάλμα μέτρησης.

Σ Λ

12. Η $\hat{\beta}$ παριστάνει την αύξηση της εξαρτημένης μεταβλητής, όταν η ανεξάρτητη μεταβλητή αυξηθεί κατά μία μονάδα.

Σ Λ

13. Ένας συντελεστής συσχέτισης $r = +0,6$ δείχνει μεγαλύτερη γραμμική συσχέτιση μεταξύ δύο μεταβλητών παρά ο $r = -0,9$.

Σ Λ

14. Όταν $r(X, Y) > 0$, τότε συνεπάγεται ότι οι μεταβλητές X, Y είναι θετικά συσχετισμένες.

Σ Λ

Στις ερωτήσεις 15-24 να βάλετε σε κύκλο τη σωστή απάντηση.

- 15.** Ένα μέτρο που χρησιμοποιείται τόσο για ποιοτικά όσο και για ποσοτικά δεδομένα είναι:
- A.** η μέση τιμή
 - B.** η επικρατούσα τιμή
 - Γ.** η τυπική απόκλιση
 - Δ.** κανένα από τα παραπάνω.

16. Η διακύμανση των παρατηρήσεων x_1, x_2, \dots, x_v δίνεται από τον τύπο:

$$\text{A. } s^2 = \frac{1}{v} \sum (x_i - \bar{x})$$

$$\text{B. } s^2 = v \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2$$

$$\text{Γ. } s^2 = \frac{1}{v} \left\{ \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 \right\}$$

$$\text{Δ. } s^2 = \frac{v \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}{v^2}$$

17. Εάν οι συντελεστές μεταβολής δύο συνόλων δεδομένων A και B είναι 15% και 20% αντιστοίχως, τότε:

A: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μεγαλύτερη ομοιογένεια από τα B

B: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μικρότερη ομοιογένεια από τα B

Γ: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μεγαλύτερη διασπορά από τα B

Δ: τα δεδομένα A παρουσιάζουν μικρότερη διασπορά από τα B

18. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = -10 + 3,25x$ η προβλεπόμενη τιμή \hat{y} για $x = 10$ είναι:

A. 3,25

B. -10

Γ. 22,5

Δ. Δεν μπορούμε να ξέρουμε.

19. Με βάση την ευθεία παλινδρόμησης $\hat{y} = 2 - 3x$ ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης των X, Y είναι:

A. -3

B. Θετικός

Γ. Αρνητικός

Δ. $-\frac{3}{2}$.

20. Εάν ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης δύο μεταβλητών X, Y είναι $r = +1$, τότε η ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης της Y στη X μπορεί να διέρχεται από τα σημεία:

A. $(0, 0)$ και $(1, -1)$

B. $(-1, 1)$ και $(1, 0)$

Γ. $(-1, -1)$ και $(1, 1)$

Δ. $(0, 1)$ και $(1, 0)$.

- 21.** Ο συντελεστής γραμμικής συσχέτισης r και ο συντελεστής $\hat{\beta}$ στην ευθεία γραμμικής παλινδρόμησης $\hat{y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x$ έχουν:
- A.** πάντα το ίδιο πρόσημο
 - B.** πάντα διαφορετικό πρόσημο
 - Γ.** άλλοτε το ίδιο πρόσημο και άλλοτε διαφορετικό
 - Δ.** δεν έχουν καμιά σχέση ως προς το πρόσημό τους.

22. Εάν $r(X, Y) = 0$, τότε οι X, Y είναι:

A. ασυσχέτιστες

B. γραμμικά ασυσχέτιστες

Γ. τέλεια θετικά συσχετισμένες

Δ. τέλεια αρνητικά συσχετισμένες.

23. Στην παλινδρόμηση με \hat{y} συμβολίζουμε:

A. τις πραγματικές τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής

B. τις τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής

Γ. τις προβλεπόμενες τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής, που προκύπτουν από την εξίσωση γραμμικής παλινδρόμησης

Δ. κανένα από τα παραπάνω.

24. Οι μεταβλητές X, Y έχουν συντελεστή συσχέτισης $r_1 = +0,9$, ενώ οι Z, W έχουν συντελεστή συσχέτισης $r_2 = +0,3$.

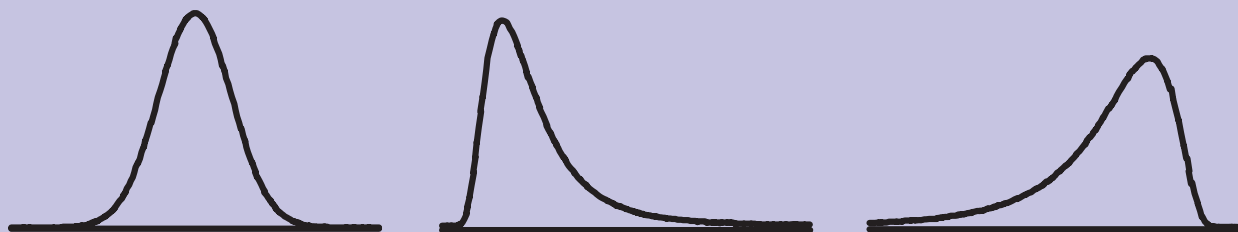
A. Οι X, Y είναι τριπλάσια συσχετισμένες από τις Z, W

B. Οι X, Y είναι περισσότερο (σε μεγαλύτερο βαθμό) συσχετισμένες από τις Z, W

Γ. Δεν μπορούμε να συγκρίνουμε διαφορετικές μεταβλητές.

Στις ερωτήσεις 25-35 να γίνει αντιστοίχιση των (α) , (β) ... με τα (i), (ii), ..., όπου αυτή είναι δυνατή.

25.



(α)

(β)

(γ)

•

•

•

•

•

•

i) $\bar{x} = \delta$

ii) $\bar{x} < \delta$

iii) $\bar{x} > \delta$

26.

$\alpha)$ 1 2 10
18 19

• •

i) $\bar{x} = 10,$
 $s \approx 7,5$

$\beta)$ 18 19 20
21 22

• •

ii) $\bar{x} = 20,$
 $s \approx 7,5$

$\gamma)$ 8 9 10
11 12

• •

iii) $\bar{x} = 10,$
 $s \approx 1,4$

•

iv) $\bar{x} = 20,$
 $s \approx 1,4$

•

v) $\bar{x} = 15,$
 $s \approx \sqrt{2}.$

27.

α) διάμεσος •

**β) επικρα-
τούσα • •
τιμή** **i) μέτρο
θέσης**

**γ) τυπική
απόκλι-
ση •**

δ) εύρος • • **ii) μέτρο
διασποράς**

**ε) διακύ-
μανση •**

**στ) μέση
τιμή •**

28.

$\alpha)$ 5 7 8 10 \cdot \cdot i) $\bar{x} = 9$
13 24

$\beta)$ 1 2 8 9 \cdot \cdot ii) $\bar{\delta} = 9$
9 25

$\gamma)$ 1 2 9 12 \cdot \cdot iii) $M_0 = 9$
12 18

29.

**$\alpha)$ 10 11 12
13 14**

• •

i) $\bar{x} < \delta$

**$\beta)$ 10 11 12
13 24**

•

**$\gamma)$ 1 11 12
13 14**

• •

ii) $\bar{x} = \delta$

**$\delta)$ 20 21 22
23 24**

•

**$\epsilon)$ 30 33 36
39 42**

• •

iii) $\bar{x} > \delta$

30. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (δ) τεσσάρων μεταβλητών (i) έως (iv) από μια μελέτη που έγινε σε κάποια πόλη.

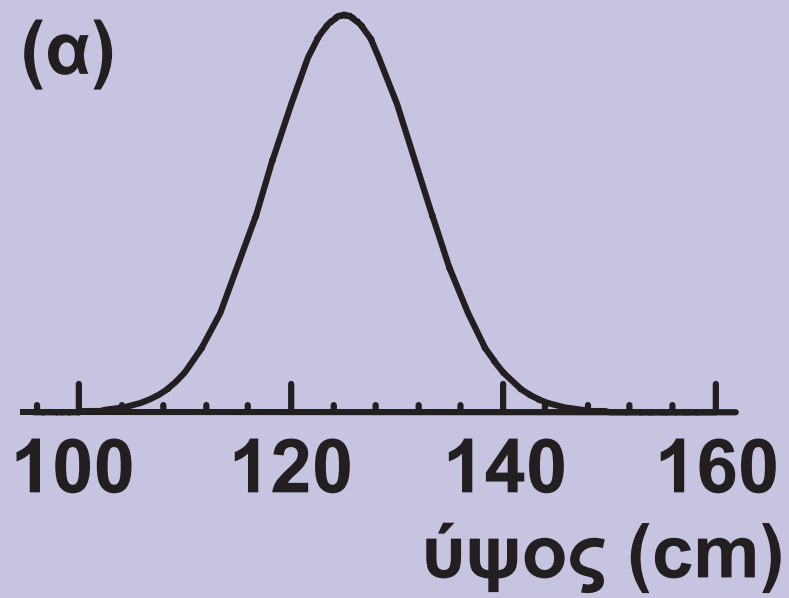
i) Ύψος των μελών των νοικοκυριών στα οποία οι γονείς είναι και οι δύο κάτω των 24 ετών.

ii) Ύψος των παντρεμένων ζευγαριών.

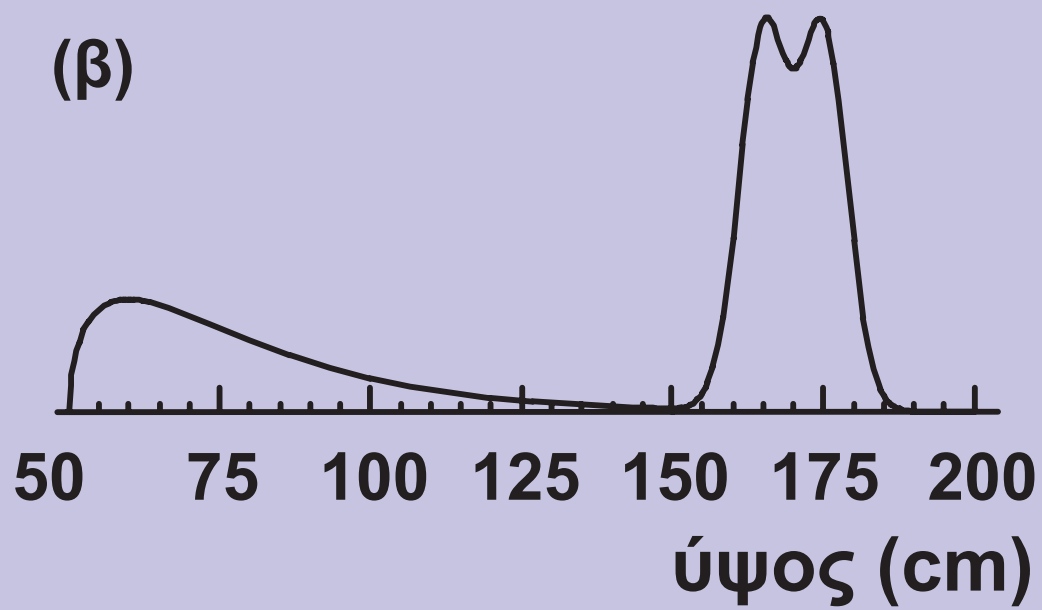
iii) Ύψος όλων των ατόμων.

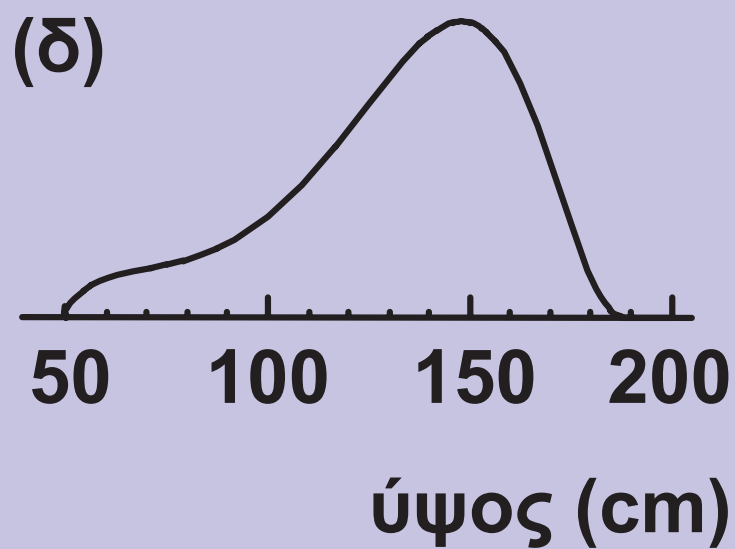
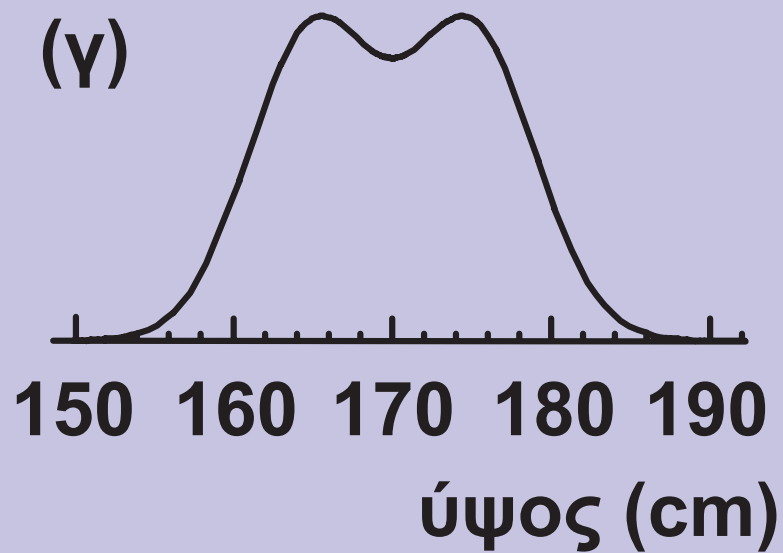
iv) Ύψος όλων των αυτοκινήτων.

(α)



(β)



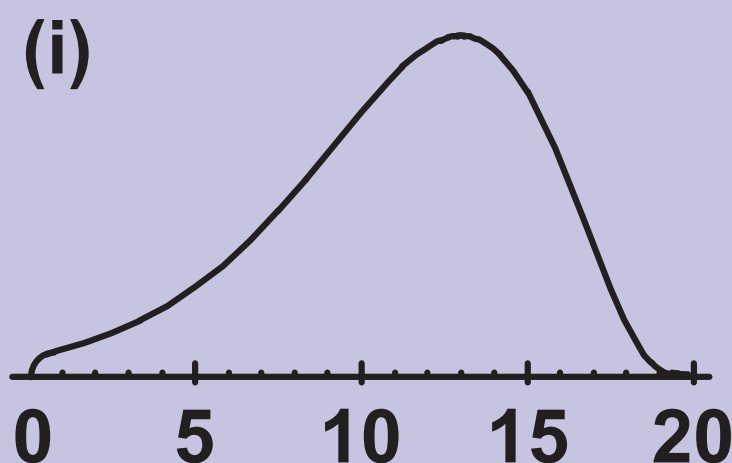


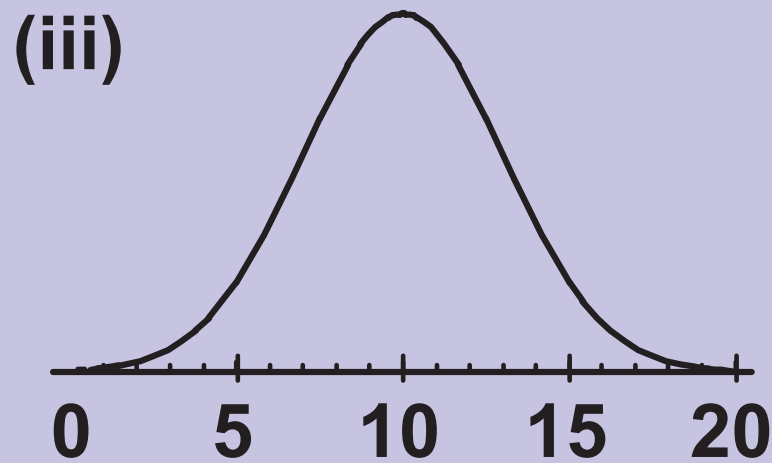
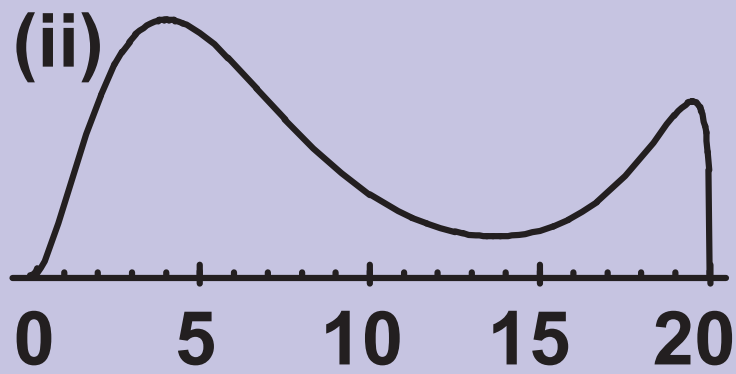
31. Παρακάτω δίνονται οι καμπύλες σχετικών συχνοτήτων ((i) έως (iii)) της βαθμολογίας τριών τμημάτων σε ένα διαγώνισμα, κατά το οποίο

α) στο πρώτο τμήμα πέρασε το 50%

β) Στο δεύτερο τμήμα πέρασε ποσοστό άνω του 50%

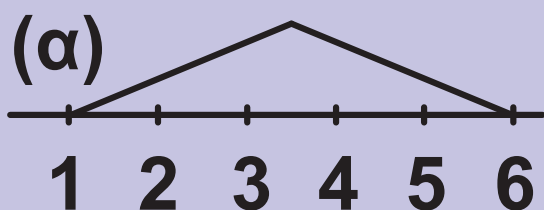
γ) Στο τρίτο τμήμα πέρασε ποσοστό κάτω του 50%.



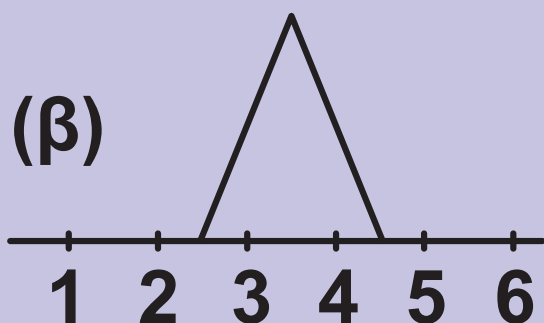


32. Παρακάτω δίνονται κατά προσέγγιση οι καμπύλες συχνοτήτων (α) έως (γ) τριών διαφορετικών συνόλων δεδομένων και διάφορες τιμές (i) έως (iv) της μέσης τιμής

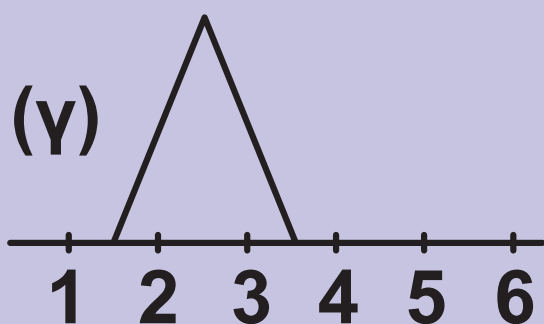
και της τυπικής απόκλισης:



(i) $\bar{x} \approx 3,5,$
 $s \approx 1$



(ii) $\bar{x} \approx 3,5,$
 $s \approx 2$

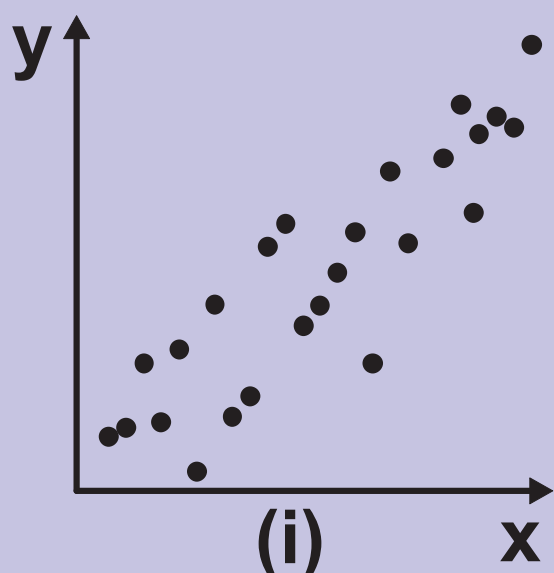


(iii) $\bar{x} \approx 2,5,$
 $s \approx 1$

(iv) $\bar{x} \approx 2,5,$
 $s \approx 2.$

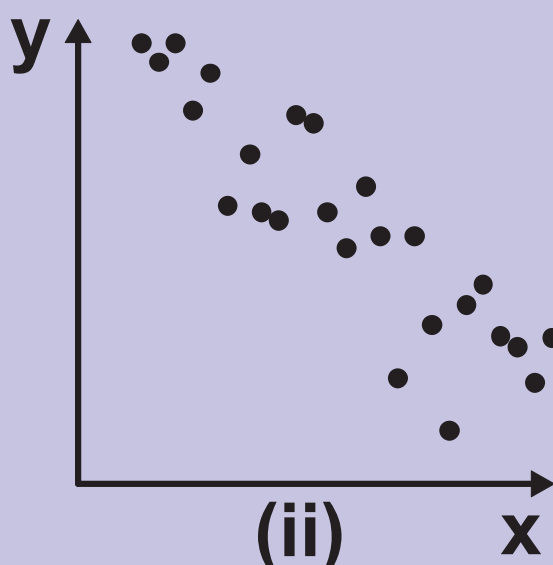
33.

(α) $r \approx 0$



(i)

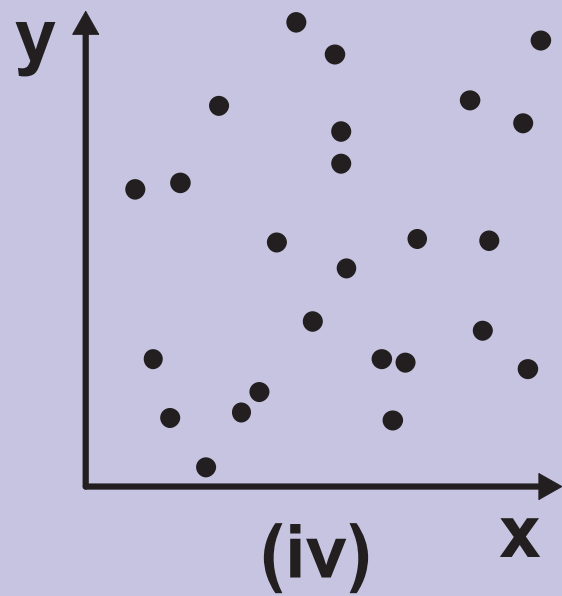
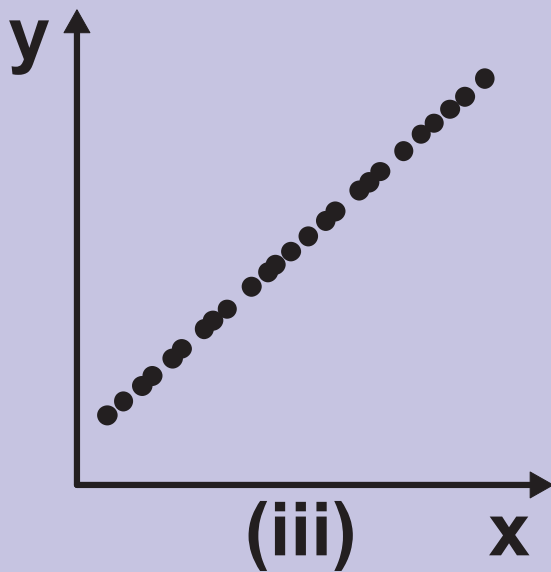
(β) $r \approx 0,8$



(ii)

(γ) $r = +1$

(δ) $r \approx -0,8$



34.

$r = 0$ • • $\hat{\beta} = 0$

$r > 0$ • • $\hat{\beta} < 0$

$r < 0$ • • $\hat{\beta} > 0.$

35. Για την ευθεία γραμμικής πα-
λινδρόμησης $\hat{y} = 2x$ ισχύει:

$\hat{\alpha} = 0$ •

$r > 0$ • • Σωστό

$\hat{\beta} = 2$ • • Λάθος

$r = \hat{\beta}$ • • Δεν μπορούμε να
ξέρουμε.

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

Εισαγωγή

Υπάρχει σε πολλούς η εντύπωση ότι το κύριο κίνητρο για την ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων προήλθε από το ενδιαφέρον του ανθρώπου για τα τυχερά παιχνίδια. Σημαντική μάλιστα ώθηση στην ανάπτυξη του κλάδου αυτού των Μαθηματικών αποτέλεσε η γόνιμη αλληλογραφία που αναπτύχθηκε ανάμεσα στους Pascal και Fermat το 17ο αιώνα με αφορμή διάφορα προβλήματα που προέκυψαν από την ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια.

Μολονότι όμως τα τυχερά παιχνίδια ήταν ευρέως διαδεδομένα και στους Αρχαίους Έλληνες και στους Ρωμαίους, η Θεωρία των Πιθανοτήτων δεν αναπτύχθηκε κατά την αρχαιότητα, όπως συνέβη με άλλους κλάδους των Μαθηματικών, αλλά πολύ αργότερα, το 16ο και 17ο αιώνα μ.Χ. Γι' αυτό πολλοί απορρίπτουν την άποψη ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων οφείλει τη γένεσή της στην ενασχόληση του ανθρώπου με τα τυχερά παιχνίδια και την αποδίδουν στις ανάγκες να λυθούν προβλήματα που παρουσιάστηκαν με την ανάπτυξη του εμπορίου, των ασφαλίσσεων, της συλλογής εσόδων του κράτους κτλ. Η ανάπτυξη της Θεωρίας των Πιθανοτήτων οφείλεται

επίσης και στις ανάγκες των Φυσικών Επιστημών όπως η εφαρμογή της Θεωρίας Σφαλμάτων σε αστρονομικές παρατηρήσεις.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων αναπτύχθηκε ακόμα περισσότερο το 18ο αιώνα με τις αξιοσημείωτες εργασίες των μαθηματικών Bernoulli, De Moivre, Laplace και Gauss. Ιδιαίτερα ο Laplace με τις εργασίες του άνοιξε μια καινούργια εποχή για τη Θεωρία Πιθανοτήτων. Γιατί ο Laplace δεν περιορίζεται μόνο στη μαθηματική ανάλυση των τυχερών παιγνιδιών, αλλά εφαρμόζει τα συμπεράσματά του και σε ένα πλήθος από επιστημονικά και πρακτικά προβλήματα. Έτσι, με αφορμή τη

μελέτη των σφαλμάτων που προκύπτουν στις επαναλαμβανόμενες μετρήσεις του ίδιου αστρονομικού μεγέθους ανακαλύπτεται η περίφημη κανονική κατανομή του Gauss. Κατόπιν αποδεικνύεται ότι η κανονική κατανομή απεικονίζει όχι μόνο την κατανομή των σφαλμάτων των αστρονομικών παρατηρήσεων αλλά και την κατανομή πολλών βιολογικών, κοινωνικών και φυσικών φαινομένων. Έτσι, στη διάρκεια του 19ου αιώνα γεννιούνται νέοι κλάδοι των εφαρμοσμένων μαθηματικών, όπως είναι η Θεωρία των Σφαλμάτων, τα Ασφαλιστικά Μαθηματικά και η Στατιστική Μηχανική.

Στις μέρες μας η Θεωρία των Πιθανοτήτων με τις εργασίες πολλών

διάσημων μαθηματικών, όπως είναι οι Chebyshev, Markov, Von Mises, Kolmogorov κ.ά., έχει σημειώσει αλματώδη πρόοδο. Καινούργια θεωρητικά αποτελέσματα παρέχουν νέες δυνατότητες για τη χρησιμοποίηση των μεθόδων της Θεωρίας των Πιθανοτήτων. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι οι εφαρμογές των Πιθανοτήτων αναφέρονται σε ένα ευρύτατο φάσμα επιστημών όπως η Φυσική, η Χημεία, η Γενετική, η Ψυχολογία, η Οικονομολογία, η Τηλεπικοινωνία, η Μετεωρολογία κτλ.

Η Θεωρία των Πιθανοτήτων ανήκει στους κλάδους των Μαθηματικών που συμβαδίζουν με την ανάπτυξη των φυσικών επιστημών και της τεχνολογίας. Αυτό δε σημαίνει βέβαια

ότι η Θεωρία των Πιθανοτήτων είναι απλώς ένα βοηθητικό εργαλείο για τη λύση πρακτικών προβλημάτων των άλλων επιστημών. Απεναντίας έχει μετασχηματιστεί σε έναν αυτοτελή κλάδο των καθαρών Μαθηματικών, που έχει δικά του προβλήματα και δικές του μεθόδους.

3.1 ΔΕΙΓΜΑΤΙΚΟΣ ΧΩΡΟΣ - ΕΝΔΕΧΟΜΕΝΑ

Πείραμα Τύχης

Όπως γνωρίζουμε από τη Φυσική, αν θερμάνουμε αποσταγμένο νερό σε 100° Κελσίου στην επιφάνεια της

θάλασσας, δηλαδή σε ατμοσφαιρική πίεση 760 mm Hg, το νερό θα βράσει. Επίσης, αν αφήσουμε ένα σώμα να πέσει στο κενό υπό την επίδραση της βαρύτητας, μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια το διάστημα που θα διανύσει σε ορισμένο χρόνο t . Κάθε τέτοιο πείραμα κατά το οποίο η γνώση των συνθηκών κάτω από τις οποίες εκτελείται καθορίζει πλήρως το αποτέλεσμα λέγεται **αιτιοκρατικό (deterministic) πείραμα**.

Υπάρχουν όμως και πειράματα των οποίων δεν μπορούμε εκ των προτέρων να προβλέψουμε το αποτέλεσμα, μολονότι επαναλαμβάνονται (φαινομενικά τουλάχιστον) κάτω από τις ίδιες συνθήκες. Ένα τέτοιο πείραμα ονομάζεται **πείραμα τύχης**

(random experiment). Για παράδειγμα, δεν μπορούμε να προβλέψουμε με ακρίβεια τον αριθμό των τροχαίων ατυχημάτων που συμβαίνουν σε μια εβδομάδα σε ένα σημείο μιας εθνικής οδού, αφού ο αριθμός αυτός εξαρτάται από πολλούς απρόβλεπτους παράγοντες.

Πειράματα τύχης είναι και τα εξής:

1. Ρίχνεται ένα νόμισμα και καταγράφεται η άνω όψη του.
2. Ρίχνεται ένα ζάρι και καταγράφεται η ένδειξη της άνω έδρας του.
3. Διαλέγεται αυθαίρετα μια οικογένεια με δύο παιδιά και εξετάζεται ως προς το φύλο των παιδιών και τη σειρά γέννησής τους.
4. Ρίχνεται ένα νόμισμα ώσπου να φέρουμε “γράμματα” αλλά όχι περισσότερο από τρεις φορές.

- 5. Επιλέγεται τυχαία μια τηλεφωνική συνδιάλεξη και καταγράφεται η διάρκειά της.**
- 6. Γίνεται η κλήρωση του ΛΟΤΤΟ και καταγράφεται το αποτέλεσμα.**
- 7. Την παραμονή του Πάσχα, στις 5 μ.μ., μετριέται το μήκος της ουράς των αυτοκινήτων στα πρώτα διόδια της Εθνικής οδού Αθηνών-Λαμίας.**
- 8. Επιλέγεται τυχαία μια μέρα της εβδομάδος και μετριέται ο αριθμός των τηλεθεατών που παρακολούθησαν το απογευματινό δελτίο ειδήσεων στην ΕΤ1.**
- 9. Επιλέγεται τυχαία μια ραδιενεργός πηγή και καταγράφεται ο αριθμός των εκπεμπόμενων σωματιδίων σε συγκεκριμένο χρονικό διάστημα.**

Δειγματικός Χώρος

Όλα τα αποτελέσματα που μπορούν να εμφανιστούν σε ένα πείραμα τύχης λέγονται δυνατά αποτελέσματα ή δυνατές περιπτώσεις του πειράματος. Το σύνολο των δυνατών αποτελεσμάτων λέγεται **δειγματικός χώρος (sample space)** και συμβολίζεται συνήθως με το γράμμα Ω . Αν δηλαδή $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k$ είναι τα δυνατά αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης, τότε ο δειγματικός χώρος του πειράματος θα είναι το σύνολο:

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k\}.$$

Έτσι, στο πρώτο από τα παραπάνω πειράματα τύχης, αν με K συμβολίσουμε το αποτέλεσμα να φέρουμε “κεφαλή” και με Γ το αποτέλεσμα

να φέρουμε “γράμματα”, τότε ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{Κ, Γ\}$. Επίσης, στο δεύτερο από τα παραπάνω πειράματα τύχης η ένδειξη της άνω έδρας μπορεί να είναι ένας από τους αριθμούς 1, 2, 3, 4, 5, 6. Επομένως, ο δειγματικός χώρος είναι $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Ενδεχόμενα

Το σύνολο που έχει ως στοιχεία ένα ή περισσότερα αποτελέσματα ενός πειράματος τύχης λέγεται **ενδεχόμενο (event)** ή γεγονός. Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού τα σύνολα $A = \{2, 4, 6\}$, $B = \{1, 3, 5\}$ και $\Gamma = \{6\}$ είναι ενδεχόμενα. Το A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό, το B να φέρουμε περιττό

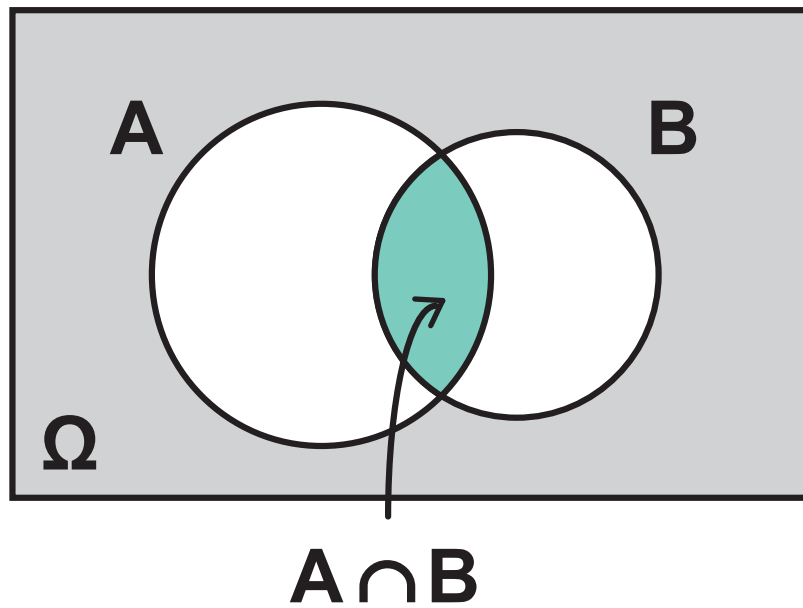
αριθμό και το Γ να φέρουμε 6. Είναι φανερό ότι ένα ενδεχόμενο είναι υποσύνολο του δειγματικού χώρου. Ένα ενδεχόμενο λέγεται απλό όταν έχει ένα μόνο στοιχείο και σύνθετο αν έχει περισσότερα στοιχεία. Για παράδειγμα, το Γ είναι ένα απλό ενδεχόμενο, ενώ τα A και B είναι σύνθετα ενδεχόμενα. Όταν το αποτέλεσμα ενός πειράματος, σε μια συγκεκριμένη εκτέλεσή του είναι στοιχείο ενός ενδεχομένου, τότε λέμε ότι το ενδεχόμενο αυτό πραγματοποιείται ή συμβαίνει. Γι'αυτό τα στοιχεία ενός ενδεχομένου λέγονται και ευνοϊκές περιπτώσεις για την πραγματοποίησή του. Έτσι, για παράδειγμα, το ενδεχόμενο $A = \{2, 4, 6\}$ έχει τρεις ευνοϊκές περιπτώσεις και πραγματοποιείται, όταν φέρουμε 2 ή 4 ή 6.

Ο ίδιος ο δειγματικός χώρος Ω ενός πειράματος θεωρείται ότι είναι ενδεχόμενο, το οποίο μάλιστα πραγματοποιείται πάντοτε, αφού όποιο και αν είναι το αποτέλεσμα του πειράματος θα ανήκει στο Ω . Γι' αυτό το Ω λέγεται **βέβαιο ενδεχόμενο**. Δεχόμαστε ακόμα ως ενδεχόμενο και το κενό σύνολο \emptyset που δεν πραγματοποιείται σε καμιά εκτέλεση του πειράματος τύχης. Γι' αυτό λέμε ότι το \emptyset είναι το **αδύνατο ενδεχόμενο**. Το πλήθος των στοιχείων ενός ενδεχομένου A θα το συμβολίζουμε με $N(A)$. Επομένως, αν $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ και $A = \{2, 4, 6\}$ έχουμε $N(A) = 3$, $N(\Omega) = 6$ και $N(\emptyset) = 0$.

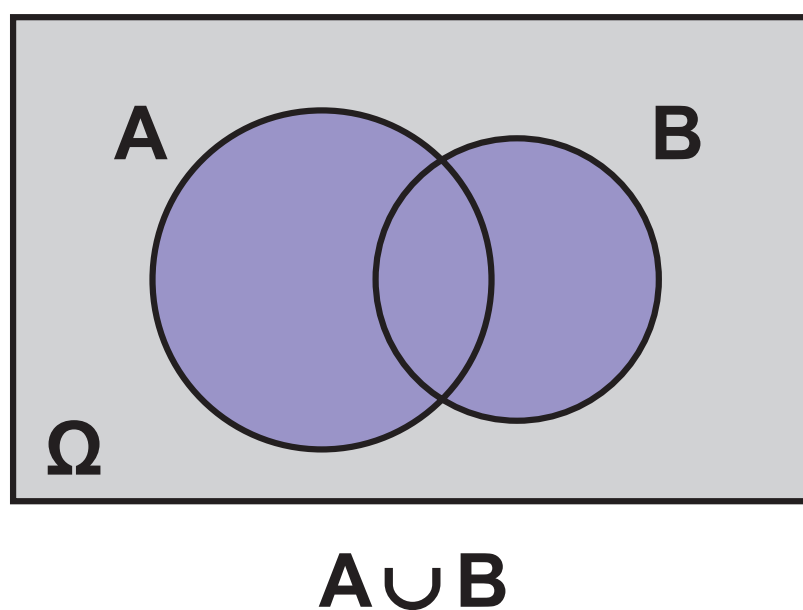
Πράξεις με Ενδεχόμενα

Όπως είδαμε, τα ενδεχόμενα είναι υποσύνολα του δειγματικού χώρου Ω . Επομένως, μεταξύ των ενδεχομένων ενός πειράματος μπορούν να οριστούν οι γνωστές πράξεις μεταξύ των συνόλων, από τις οποίες προκύπτουν νέα ενδεχόμενα. Έτσι, αν A και B είναι δύο ενδεχόμενα, έχουμε:

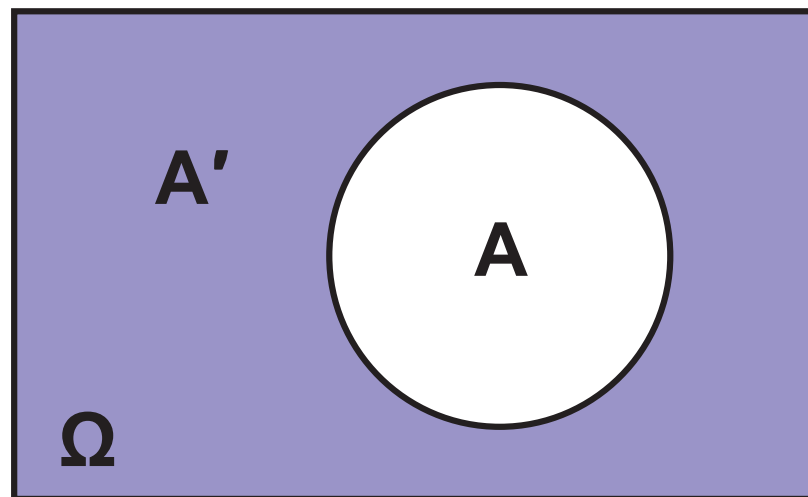
- Το ενδεχόμενο $A \cap B$, που διαβάζεται “ A τομή B ” ή “ A και B ” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιούνται συγχρόνως τα A και B .



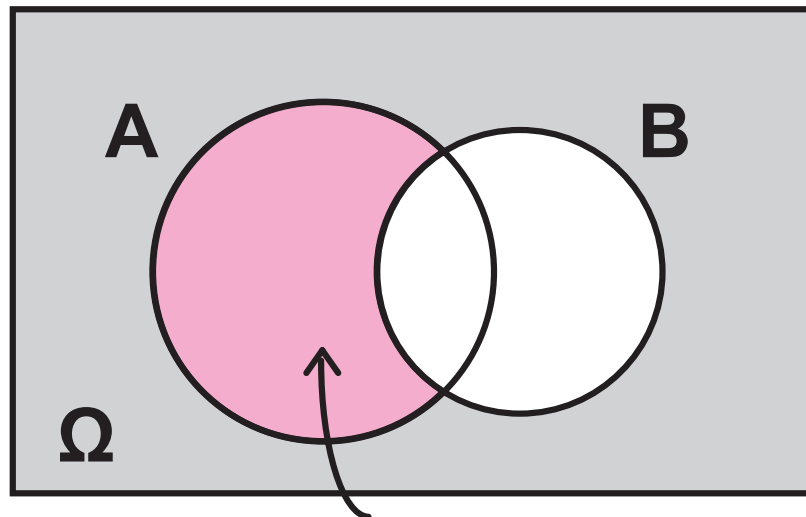
- Το ενδεχόμενο $A \cup B$, που διαβάζεται “A ένωση B” ή “A ή B” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται ένα τουλάχιστον από τα A, B.



- Το ενδεχόμενο A' , που διαβάζεται “όχι A ” ή “συμπληρωματικό του A ” και πραγματοποιείται, όταν δεν πραγματοποιείται το A . Το A' λέγεται και “αντίθετο του A ”.



- Το ενδεχόμενο $A - B$, που διαβάζεται “διαφορά του B από το A” και πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B. Είναι εύκολο να δούμε ότι $A - B = A \cap B'$.



$A - B$

Στον παρακάτω πίνακα τα A και B συμβολίζουν ενδεχόμενα ενός πειράματος και το ω ένα αποτέλεσμα του πειράματος αυτού. Στην αριστερή στήλη του πίνακα αναγράφονται διάφορες σχέσεις για τα A και B διατυπωμένες στην κοινή γλώσσα, και στη δεξιά στήλη αναγράφονται οι ίδιες σχέσεις αλλά διατυπωμένες στη γλώσσα των συνόλων.

Το ενδεχόμενο A πραγματοποιείται

Το ενδεχόμενο A δεν πραγματοποιείται

Ένα τουλάχιστον από τα A και B πραγματοποιείται

Πραγματοποιούνται αμφότερα τα A και B

Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B

Πραγματοποιείται μόνο το A

Η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B

$$\omega \in A$$

$$\omega \in A' \text{ (ή } \omega \notin A)$$

$$\omega \in A \cup B$$

$$\omega \in A \cap B$$

$$\omega \in (A \cup B)'$$

$$\omega \in A - B \text{ (ή } \omega \in A \cap B')$$

$$A \subseteq B$$

Για παράδειγμα, στη ρίψη ενός ζαριού έστω τα ενδεχόμενα $A = \{1, 2, 3, 4\}$ και $B = \{2, 4, 6\}$. Αν το αποτέλεσμα της ρίψης είναι ο αριθμός 1, τότε τα ενδεχόμενα A , $A \cup B$, $A - B$, B' πραγματοποιούνται, ενώ τα A' , B , $(A \cup B)'$, $(A - B)'$, $A \cap B$ δεν πραγματοποιούνται.

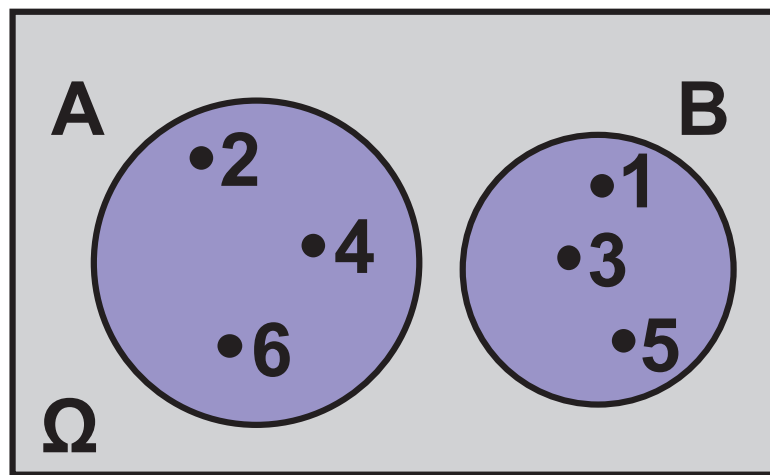
Ασυμβίβαστα Ενδεχόμενα

Στη ρίψη ενός ζαριού αν A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό και B το ενδεχόμενο να φέρουμε περιττό αριθμό, έχουμε $A = \{2, 4, 6\}$ και $B = \{1, 3, 5\}$. Παρατηρούμε ότι τα A και B δεν μπορούν να πραγματοποιηθούν συγχρόνως, αφού δεν έχουν κανένα κοινό στοιχείο. Στην περίπτωση αυτή τα A και B λέγονται

ασυμβίβαστα. Γενικά:

Δύο ενδεχόμενα A και B λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B = \emptyset$.

Δύο ασυμβίβαστα ενδεχόμενα λέγονται επίσης ξένα μεταξύ τους ή αμοιβαίως αποκλειόμενα.



$$A \cap B = \emptyset$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Ρίχνουμε ένα νόμισμα τρεις διαδοχικές φορές.
 - i) Να γραφτεί ο δειγματικός χώρος Ω του πειράματος.
 - ii) Να παρασταθούν με αναγραφή τα ενδεχόμενα που προσδιορίζονται από την αντίστοιχη ιδιότητα:
 - A_1 : "Ο αριθμός των K υπερβαίνει τον αριθμό των Γ "
 - A_2 : "Ο αριθμός των K είναι ακριβώς 2"
 - A_3 : "Ο αριθμός των K είναι τουλάχιστον 2"
 - A_4 : "Ίδια όψη και στις τρεις ρίψεις"

A_5 : “Στην πρώτη ρίψη φέρνουμε K ”

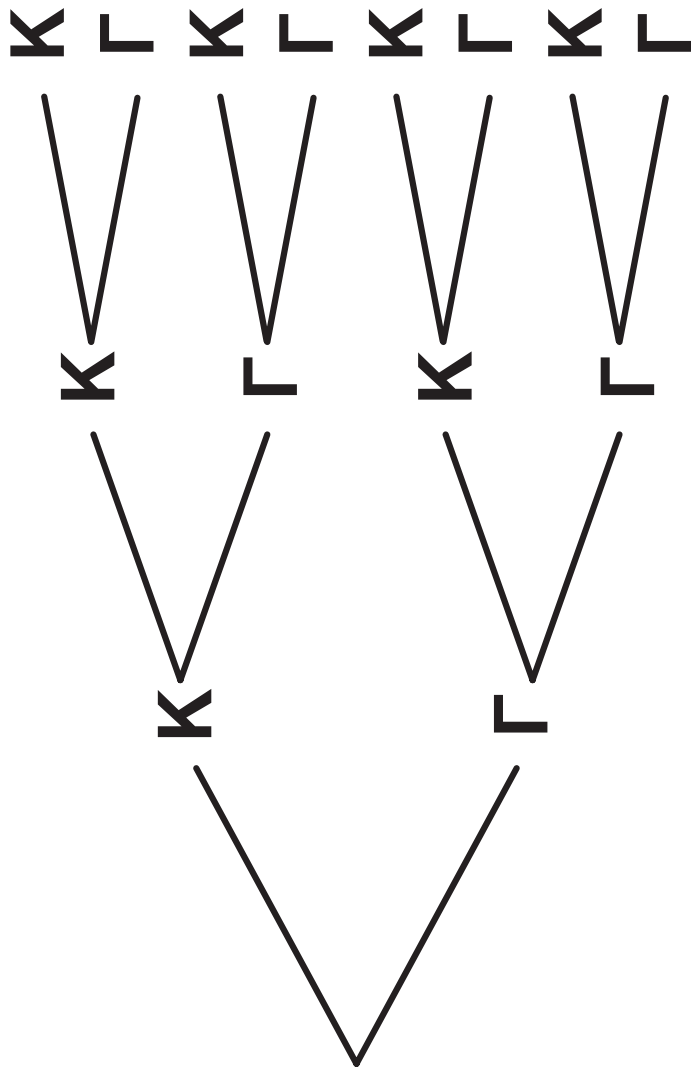
iii) Να βρεθούν τα ενδεχόμενα

A_3' , $A_5 \cap A_2$, $A_5 \cup A_4$.

ΛΥΣΗ

i) Για να προσδιορίσουμε το δειγματικό χώρο, θα χρησιμοποιήσουμε ένα δεντροδιάγραμμα:

1η ρίψη 2η ρίψη 3η ρίψη



Αποτέλεσμα

ΚΚΚ
ΚΚΓ
ΚΓΚ
ΚΓΓ
ΓΚΚ
ΓΚΓ
ΓΓΚ
ΓΓΓ

114 / 142

Άρα, ο δειγματικός χώρος του πειράματος αποτελείται από διατεταγμένες τριάδες με στοιχεία το Κ και το Γ και είναι

$$\Omega = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ, ΓΚΚ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}.$$

ii) Έχοντας υπόψη το δειγματικό χώρο Ω και την αντίστοιχη ιδιότητα έχουμε:

$$A_1 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$$

$$A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$$

$$A_3 = \{ΚΚΚ, ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΓΚΚ\}$$

(Παρατηρούμε ότι $A_3 = A_1$)

$$A_4 = \{ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$$

$$A_5 = \{ΚΚΚ, ΚΓΓ, ΚΓΚ, ΚΓΓ\}.$$

iii) Το A_3' περιέχει εκείνα τα στοιχεία του δειγματικού χώρου που δεν περιέχει το A_3 , περιέχει δηλαδή τα στοιχεία στα οποία ο αριθμός των K είναι μικρότερος από 2.

Επομένως, $A_3' = \{ΚΓΓ, ΓΚΓ, ΓΓΚ, ΓΓΓ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cap A_2$ περιέχει τα κοινά στοιχεία των A_5 και A_2 , δηλαδή τα στοιχεία με δύο ακριβώς K , εκ των οποίων το ένα στην πρώτη θέση. Επομένως, $A_5 \cap A_2 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ\}$.

Το ενδεχόμενο $A_5 \cup A_4$ περιέχει τα στοιχεία που στην πρώτη θέση έχουν K ή τα στοιχεία που έχουν ίδιες και τις τρεις ενδείξεις. Επομένως, $A_5 \cup A_4 = \{ΚΚΓ, ΚΓΚ, ΚΚΓ, ΚΚΚ, ΓΓΓ\}$.

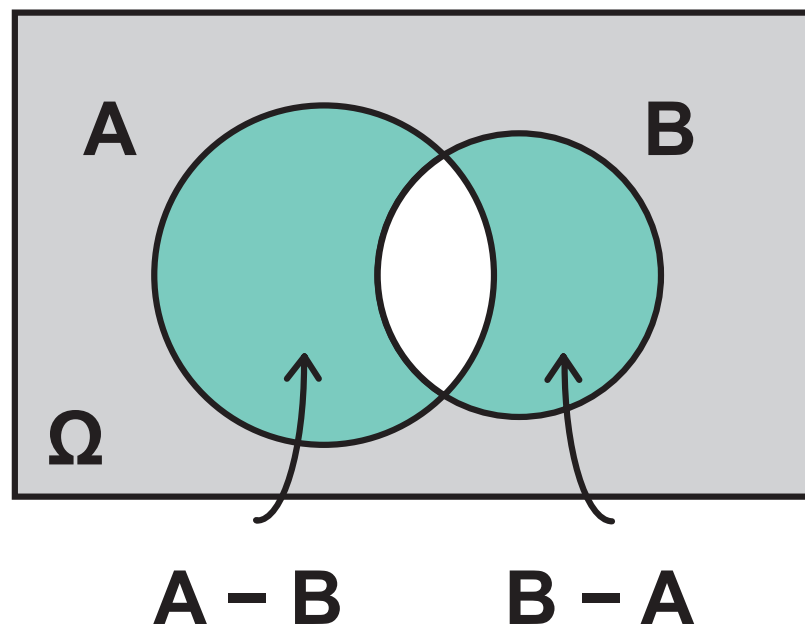
2. Δίνονται δύο ενδεχόμενα A και B ενός πειράματος με δειγματικό χώρο Ω . Να παρασταθούν με διαγράμματα Venn και να εκφραστούν με τη βοήθεια συνόλων τα ενδεχόμενα που ορίζονται με τις εκφράσεις:

- i) Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα A και B .**
- ii) Δεν πραγματοποιείται κανένα από τα A και B .**

ΛΥΣΗ

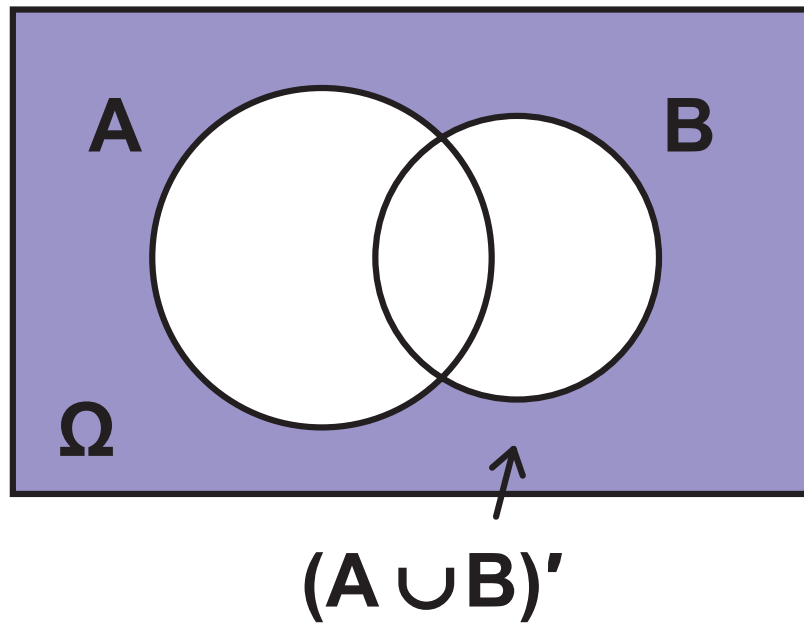
i) Επειδή θέλουμε να πραγματοποιείται μόνο το A ή μόνο το B , γραμμοσκιάζουμε τις επιφάνειες των A και B με εξαίρεση την τομή τους, δηλαδή την κοινή επιφάνειά τους. Παρατηρούμε ότι στην περίπτωση αυτή πραγματοποιείται ένα μόνο

από τα $A - B$ και $B - A$. Άρα, το ζητούμενο ενδεχόμενο είναι το $(A - B) \cup (B - A)$ ή ισοδύναμα το $(A \cap B') \cup (A' \cap B)$.



ii) Επειδή θέλουμε να μην πραγματοποιείται κανένα από τα A και B, γραμμοσκιάζουμε την επιφάνεια του Ω που είναι εκτός της ένωσης των A και B. Στην περίπτωση αυτή

παρατηρούμε ότι το ζητούμενο σύνολο είναι συμπληρωματικό του $A \cup B$, δηλαδή το $(A \cup B)'$.



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Α' ΟΜΑΔΑΣ

- 1.** Ένα κουτί έχει τρεις μπάλες, μια άσπρη, μια μαύρη και μια κόκκινη. Κάνουμε το εξής πείραμα: παίρνουμε από το κουτί μια μπάλα, καταγράφουμε το χρώμα της και την ξαναβάζουμε στο κουτί. Στη συνέχεια παίρνουμε μια δεύτερη μπάλα και καταγράφουμε επίσης το χρώμα της. (Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες με επανατοποθέτηση).
- i) Ποιος είναι ο δειγματικός χώρος του πειράματος;

ii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “η πρώτη μπάλα να είναι κόκκινη”;

iii) Ποιο είναι το ενδεχόμενο “να εξαχθεί και τις δυο φορές μπάλα με το ίδιο χρώμα”;

**2. Να επιλυθεί το προηγούμενο πρόβλημα, χωρίς όμως τώρα να γίνει επανατοποθέτηση της πρώτης μπάλας πριν την εξαγωγή της δεύτερης.
(Όπως λέμε παίρνουμε διαδοχικά δύο μπάλες χωρίς επανατοποθέτηση).**

3. Μια οικογένεια από την Αθήνα αποφασίζει να κάνει τις επόμενες διακοπές της στην Κύπρο ή στη Μακεδονία. Στην Κύπρο μπορεί να πάει με αεροπλάνο ή με πλοίο. Στη Μακεδονία μπορεί να πάει με το αυτοκίνητό της, με τρένο ή με αεροπλάνο. Αν ως αποτέλεσμα του πειράματος θεωρήσουμε τον τόπο διακοπών και το ταξιδιωτικό μέσο, τότε:

- i) Να γράψετε το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος**
- ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A : “Η οικογένεια θα πάει με αεροπλάνο στον τόπο των διακοπών της”.**

4. Ένα ξενοδοχείο προσφέρει γεύμα που αποτελείται από τρία πιάτα. Το κύριο πιάτο, το συνοδευτικό και το γλυκό. Οι δυνατές επιλογές δίνονται στον παρακάτω πίνακα:

Γεύμα	Επιλογές
Κύριο πιάτο	Κοτόπουλο ή φιλέτο
Συνοδευτικό	Μακαρόνια ή ρύζι ή χόρτα
Γλυκό	Παγωτό ή τούρτα ή ζελέ

Ένα άτομο πρόκειται να διαλέξει ένα είδος από κάθε πιάτο.

i) Να βρείτε το δειγματικό χώρο

του πειράματος

- ii) Να βρείτε το ενδεχόμενο A: “το άτομο επιλέγει παγωτό”
- iii) Να βρείτε το ενδεχόμενο B: “το άτομο επιλέγει κοτόπουλο”
- iv) Να βρείτε το ενδεχόμενο $A \cap B$
- v) Αν Γ το ενδεχόμενο: “το άτομο επιλέγει ρύζι”, να βρείτε το ενδεχόμενο $(A \cap B) \cap \Gamma$.

5. Η διεύθυνση ενός νοσοκομείου κωδικοποιεί τους ασθενείς σύμφωνα με το αν είναι ασφαλισμένοι ή όχι και σύμφωνα με την κατάσταση της υγείας τους, η οποία χαρακτηρίζεται ως καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Η διεύθυνση καταγράφει με 0 τον ανασφάλιστο

ασθενή και με 1 τον ασφαλισμένο, και στη συνέχεια δίπλα γράφει ένα από τα γράμματα α , β , γ ή δ , ανάλογα με το αν η κατάσταση του είναι καλή, μέτρια, σοβαρή ή κρίσιμη. Θεωρούμε το πείραμα της κωδικοποίησης ενός νέου ασθενούς. Να βρείτε:

- i) Το δειγματικό χώρο Ω του πειράματος.
- ii) Το ενδεχόμενο A : “η κατάσταση του ασθενούς είναι σοβαρή ή κρίσιμη και είναι ανασφάλιστος”.
- iii) Το ενδεχόμενο B : “η κατάσταση του ασθενούς είναι καλή ή μέτρια”.
- iv) Το ενδεχόμενο Γ : “ο ασθενής είναι ασφαλισμένος”.

6. Σε καθεμιά από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα A και B είναι ασυμβίβαστα:

- i) Ρίχνουμε ένα ζάρι. A είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε 3 και B είναι το ενδεχόμενο να φέρουμε άρτιο αριθμό.**
- ii) Επιλέγουμε ένα άτομο. A είναι το ενδεχόμενο να έχει γεννηθεί στην Ελλάδα και B το ενδεχόμενο να είναι καθολικός.**
- iii) Επιλέγουμε μια γυναίκα. A είναι το ενδεχόμενο να έχει ηλικία άνω των 30 και B το ενδεχόμενο να είναι παντρεμένη πάνω από 30 χρόνια.**

iv) Επιλέγουμε κάποιον με ένα αυτοκίνητο. A είναι το ενδεχόμενο το αυτοκίνητό του να είναι ευρωπαϊκό και B το ενδεχόμενο να είναι ασιατικό.

7. Μεταξύ των οικογενειών με τρία παιδιά επιλέγουμε τυχαία μια οικογένεια και εξετάζουμε τα παιδιά ως προς το φύλο και ως προς τη σειρά γέννησής τους. Να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.

Β' ΟΜΑΔΑΣ

- 1. Δύο παίκτες θα παίξουν σκάκι και συμφωνούν νικητής να είναι εκείνος που πρώτος θα κερδίσει δύο παιχνίδια. Αν α είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο πρώτος παίκτης ένα παιχνίδι και β είναι το αποτέλεσμα να κερδίσει ο δεύτερος παίκτης ένα παιχνίδι, να γράψετε το δειγματικό χώρο του πειράματος.**
- 2. Ρίχνουμε ένα ζάρι δύο φορές. Να βρείτε τα ενδεχόμενα:
Α: “Το αποτέλεσμα της 1ης ρίψης είναι μεγαλύτερο από το αποτέλεσμα της 2ης ρίψης”.**

B: “Το άθροισμα των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι άρτιος αριθμός”

Γ: “Το γινόμενο των ενδείξεων στις δύο ρίψεις είναι μικρότερο του 5”

Στη συνέχεια να βρείτε τα ενδεχόμενα $A \cap B$, $A \cap \Gamma$, $B \cap \Gamma$, $(A \cap B) \cap \Gamma$.

3. Αν A και B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω , να αποδείξετε ότι: $A \subseteq B$, τότε $B' \subseteq A'$.

4. Έστω A και B δύο ενδεχόμενα του ίδιου δειγματικού χώρου Ω . Να γράψετε το ενδεχόμενο $A \cup B$ ως ένωση τριών ξένων μεταξύ τους ενδεχομένων.

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ – ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

2 ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ

§ 2.5 Α' Ομάδας

1. 0, 0,2, -0,6, -0,7, 0,9, -1.
2. α) Θετική -μεγάλη, κτλ.
3. α) $r = 0,99$ β) $r = 0,59$ γ) $r = - 0,70$
δ) $r = -0,05$ ε) $r = 0,33$.
4. α) $r_1 = -1$ β) $r_2 = 1$.
5. $r = 0,97$.
6. $r = 0,74$.

§ 2.5 Β' Ομάδας

1. $\alpha) r \approx -1$ $\beta) r \approx -1$.

2. $r = 0,87$.

3. $r = 1$.

4. $r = 0,77$.

ΓΕΝΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. $\bar{x} = 2,025$, $\delta = 2$, $M_0 = 1$, $s = 1,49$.

2. $\alpha) v = 60$, $\kappa = 5$, $c = 2$

$\gamma) \bar{x} = 4,4$, $\delta = 4,3$, $M_0 \approx 4,25$,
 $s = 2,29$.

3. $v_1 = \frac{18}{100} \cdot 200 = 36$ κΤΛ.

β) $\bar{x} = 14,1$, $s = 7,4$ γ) i) 8, ii) 22

4. β) $\bar{x}_{1990} \approx 486$, $\bar{x}_{1994} \approx 372$

γ) 82, 94.

5. α) i) τις ηλ. συσκευές τύπου Β

ii) δεν έχουμε προτίμηση

iii) τις ηλ. συσκευές τύπου Α.

β) $cv_A = 39,8\%$, $cv_B = 38,8\%$.

6. α) Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 1(γ).

β) Ο σταθμικός μέσος.

7. Να εργαστείτε όπως στο σχήμα 5.

8. α) $\hat{y} = 63,1 + 0,34x$

β) 68,9 κάτοικοι/km²

9. γ) $\hat{y} = 16,53 - 0,3x$.

10. α) $\hat{y} = 0,06 + 0,36x$
β) 18,6 ευρώ
γ) Πρέπει να βρείτε την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων της X πάνω στην Y .

11. Δείτε και την άσκηση 7(α) Α΄ Ομάδας της §2.5.

12. $\hat{F} = 32 + 1,8C$.

13. $r(X, Y) = \begin{cases} r(X, Y), & \text{εάν } \lambda > 0 \\ -r(X, Y), & \text{εάν } \lambda < 0 \end{cases}$

14. $\hat{y} = 56,4 + 18,87x$
 $\hat{Y}_{1995} \approx 472$ διαζύγια
 $\hat{Y}_{2000} \approx 547$ διαζύγια.

3 ΠΙΘΑΝΟΤΗΤΕΣ

§ 3.1 Α' Ομάδας

- 1-5. Να χρησιμοποιήσετε δενδροδιαγράμματα.
6. i) Ασυμβίβαστα ii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iii) Δεν είναι ασυμβίβαστα iv) Ασυμβίβαστα.
7. {ααα, αακ, ακα, ακκ, καα, κακ, κκα, κκκ}.

§ 3.1 B' Ομάδας

1. $\Omega = \{αα, αβα, αββ, βαα, βαβ, ββ\}$.
2. Να βρείτε το δειγματικό χώρο και τα ενδεχόμενα με τη βοήθεια πίνακα διπλής εισόδου.
3. Αν $x \in B'$, τότε $x \notin B$ κτλ.
4. Να χρησιμοποιήσετε διαγράμματα Venn.

Ευρετήριο Όρων

Στο Ευρετήριο όρων τα γράμματα Α, Β, Γ, Δ και Ε δηλώνουν τον 1ο, 2ο, 3ο, 4ο και 5ο τόμο αντίστοιχα, ενώ οι αριθμοί αναφέρονται στην πρώτη από τις δύο ενδείξεις που αναγράφονται σε κάθε σελίδα.

αδύνατο ενδεχόμενο	Δ' 103
αθροιστικές συχνότητες	Β' 58
αθροιστικές σχετικές συχνότητες	Β' 59
ανεξάρτητα ενδεχόμενα	Ε' 84
ανεξάρτητη μεταβλητή	Α' 14, Γ' 95

αξιωματικός ορισμός πιθανότητας	E' 15
απλός προσθετικός νόμος	E' 20
απογραφή	B' 23
ασυμβίβαστα ενδεχόμενα	Δ' 111, E' 19
βασική αρχή απαρίθμησης	E' 46
βέβαιο ενδεχόμενο	Δ' 103
γραμμική συσχέτιση	Δ' 5, Δ' 18
γραφική παράσταση συνάρτησης	A' 18
δείγμα	B' 25
δειγματικός χώρος	Δ' 100
δειγματοληψία	B' 29

δειγματοληψία με επανατοποθέτηση	Δ' 120
δεντροδιάγραμμα	Ε' 44
δεσμευμένη πιθανότητα	Ε' 78
δεύτερη παράγωγος	Α' 79
δημοσκοπήση	Β' 14
διάγραμμα διασποράς	Γ' 100
διάγραμμα συχνοτήτων	Β' 76
διακριτή μεταβλητή	Β' 22
διακύμανση	Γ' 44
διαλογή	Β' 53, Β' 91
διάμεσος	Γ' 23

διάμεσος ομαδοποιημένης κατανομής	Γ' 26
διασπορά	Γ' 44
διατάξεις	Ε' 49
εκατοστημόριο	Γ' 28
εκθετική συνάρτηση	Α' 23
εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων	Γ' 112
ενδεχόμενο	Δ' 101
ενδοτεταρτημοριακό εύρος	Γ' 42
εξαρτημένα ενδεχόμενα	Ε' 85
εξαρτημένη μεταβλητή	Α' 14, Γ' 103
εξίσωση γραφικής παράστασης	Α' 19

επαγωγή	B' 12
επικρατούσα τιμή	Γ' 32
ευθεία παλινδρόμησης	Γ' 103
ευνοϊκές περιπτώσεις	Δ' 102, Ε' 14
εύρος	B' 90, Γ' 40
εφαπτομένη καμπύλης	A' 48
ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα	Ε' 13
ιστόγραμμα	B' 98
ιστόγραμμα αθροιστικών συχνοτήτων	B' 104
καμπύλη συχνοτήτων	B' 112
κανόνες παραγωγίσης	A' 89
κανονική κατανομή	B' 114

καμπύλη συνάρτησης	A' 18
κατανομή συχνοτήτων	B' 58
κατηγορική μεταβλητή	B' 21
κεντρική τιμή κλάσης	B' 88
κλάσεις	B' 87
κλάσεις ανίσου πλάτους	B' 106
κλάσεις ίσου πλάτους	B' 98
κλασικός ορισμός πιθανότητας	E' 18
κορυφή	Γ' 32
κριτήριο δεύτερης παραγώγου	A' 129
κριτήριο πρώτης παραγώγου	A' 117

κυκλικό διάγραμμα	B' 80
κύμανση	Γ' 40
λογαριθμική συνάρτηση	A' 24
μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων	Γ' 106
μέση τιμή	Γ' 12
μεταβλητή	B' 18
μεταθέσεις	E' 50
μέτρα ασυμμετρίας	Γ' 9
μέτρα διασποράς	Γ' 38
μέτρα θέσης	Γ' 11
μονοτονία	A' 26
ολικό ελάχιστο	A' 29

ολικό μέγιστο	A' 29
ομαδοποίηση παρατηρήσεων	B' 87
ομοιογένεια	Γ' 60
ομοιόμορφη κατανομή	B' 114
όρια κλάσης	B' 87
όριο συνάρτησης	A' 32
παλινδρόμηση	Γ' 94
παραβολή	A' 21
παραγοντικό	E' 51
παράγωγος συνάρτησης	A' 78
παράγωγος σύνθετης συνάρτησης	A' 94

παράγωγος της f στο x_0	A' 61
πείραμα τύχης	Δ' 96
περιγραφική στατιστική	B' 11
πίνακας συχνοτήτων	B' 58
πλάτος κλάσης	B' 89
πληθυσμός	B' 19
ποιοτική μεταβλητή	B' 21
πολλαπλασιαστικός νόμος	E' 82
πολύγωνο συχνοτήτων	B' 76, B' 100
ποσοτική μεταβλητή	B' 22
πράξεις με ενδεχόμενα	Δ' 104
πράξεις με συναρτήσεις	A' 16

προσθετικός νόμος	Ε' 23
ραβδόγραμμα	Β' 65
ρυθμός μεταβολής	Α' 64
σημειόγραμμα	Β' 83
σταθμικός μέσος	Γ' 20
στατιστική ομαλότητα	Ε' 11
στατιστικοί πίνακες	Β' 35
στιγμιαία ταχύτητα	Α' 52
συμπληρωματικά ενδεχόμενα	Ε' 21
συνάρτηση αύξουσα	Α' 28
συνάρτηση γνησίως μονότονη	Α' 28

συνάρτηση ημίτονο	A' 25
συνάρτηση πραγματική	A' 13
συνάρτηση συνεχής	A' 39
συνάρτηση συνημίτονο	A' 25
συνάρτηση φθίνουσα	A' 28
συνδυασμοί	E' 55
συνεχής μεταβλητή	B' 22
συντελεστής γραμμικής συσχέτισης	Δ' 10
συντελεστής μεταβολής	Γ' 57
συχνότητα	B' 52
συχνότητα κλάσης	B' 91
σχεδιασμός πειραμάτων	B' 11

σχετική συχνότητα	B' 56
τεταρτημόριο	Γ' 29
τοπικό ελάχιστο	A' 31
τοπικό μέγιστο	A' 31
τυπική απόκλιση	Γ' 51
υπερβολή	A' 22
χρονόγραμμα	B' 84

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ 4ου ΤΟΜΟΥ

Σελίδα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: Στατιστική

2.5 Γραμμική Συσχέτιση 5

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: Πιθανότητες

3.1 Δειγματικός Χώρος -
Ενδεχόμενα 96

ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ - ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ
ΑΣΚΗΣΕΩΝ 130

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.