

ΦΥΣΙΚΗ

**Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών**

**Γ΄ τάξη
Γενικού Λυκείου**

ΤΟΜΟΣ 7ος

Σημείωση: Στο Ευρετήριο Όρων τα γράμματα Α, Β, Γ,..., Θ δηλώνουν αντίστοιχα τον 1ο, 2ο, 3ο,...,9ο τόμο.

**ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ, ΕΡΕΥΝΑΣ
ΚΑΙ ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ
ΙΝΣΤΙΤΟΥΤΟ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΗΣ
ΠΟΛΙΤΙΚΗΣ**

**Α. ΙΩΑΝΝΟΥ - Γ. ΝΤΑΝΟΣ
Α. ΠΗΤΤΑΣ - Σ. ΡΑΠΤΗΣ**

**Η συγγραφή και η επιστημονική επι-
μέλεια του βιβλίου πραγματοποιήθη-
κε υπό την αιγίδα του Παιδαγωγικού
Ινστιτούτου**

ΦΥΣΙΚΗ

**Ομάδας Προσανατολισμού
Θετικών Σπουδών**

**Γ' τάξη
Γενικού Λυκείου**

ΤΟΜΟΣ 7ος

Ι. Τ. Υ. Ε. «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ»

— ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΑΡΧΙΚΗΣ ΕΚΔΟΣΗΣ —

Συγγραφείς:

**Αλέκος Ιωάννου, Γιάννης Ντάνος
Άγγελος Πήττας, Σταύρος Ράπτης**

Κριτές:

**Αντωνίου Νικόλαος, καθηγητής Πα-
νεπιστημίου Αθηνών, ως πρόεδρος
Ευθυμιόπουλος Θωμάς, Αν. Καθη-
γητής Πανεπιστημίου Κρήτης**

**Αρναουτάκης Ιωάννης, Σχολικός
Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Καρανίκας Ιωάννης, Σχολικός
Σύμβουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Πρίντζας Γεώργιος, Σχολικός Σύμ-
βουλος ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης**

**Κοτρόζου Αικατερίνη, Φυσικός,
M.Sc. Καθηγήτρια Δ/θμιας Εκ/σης**

**Φωτάκης Ιωάννης, Καθηγητής
ΠΕ04 Δ/θμιας Εκ/σης».**

Ε.Π.Ε.Α.Ε.Κ.

**Υποπρόγραμμα 1: ΓΕΝΙΚΗ ΚΑΙ ΤΕ-
ΧΝΙΚΗ ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ**

**Μέτρο 1.1: ΑΝΑΜΟΡΦΩΣΗ ΠΡΟ-
ΓΡΑΜΜΑΤΩΝ ΓΕΝΙΚΗΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥ-
ΣΗΣ**

Ενέργεια 1.1α: Προγράμματα-βιβλία

**ΕΡΓΟ: ΑΝΑΔΙΑΤΥΠΩΣΗ ΚΑΙ ΕΚΣΥΓ-
ΧΡΟΝΙΣΜΟΣ ΤΩΝ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ-
ΤΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ ΤΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙ-
ΣΤΗΜΩΝ ΜΕ ΣΥΓΧΡΟΝΗ ΠΑΡΑΓΩ-
ΓΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟΥ ΥΛΙΚΟΥ**

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΕΠΑΝΕΚΔΟΣΗΣ

Η επανέκδοση του παρόντος βιβλίου πραγματοποιήθηκε από το Ινστιτούτο Τεχνολογίας Υπολογιστών & Εκδόσεων «Διόφαντος» μέσω ψηφιακής μακέτας, η οποία δημιουργήθηκε με χρηματοδότηση από το ΕΣΠΑ / ΕΠ «Εκπαίδευση & Διά Βίου Μάθηση» / Πράξη «ΣΤΗΡΙΖΩ».



Ευρωπαϊκή Ένωση
Ευρωπαϊκό Κοινωνικό Ταμείο



ΕΠΙΧΕΙΡΗΣΙΑΚΟ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ
ΕΚΠΑΙΔΕΥΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑ ΒΙΟΥ ΜΑΘΗΣΗ
επένδυση στην κοινωνία της γνώσης

ΥΠΟΥΡΓΕΙΟ ΠΑΙΔΕΙΑΣ & ΘΡΗΣΚΕΥΜΑΤΩΝ, ΠΟΛΙΤΙΣΜΟΥ & ΑΘΛΗΤΙΣΜΟΥ
ΕΙΔΙΚΗ ΥΠΗΡΕΣΙΑ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ

Με τη συγχρηματοδότηση της Ελλάδας και της Ευρωπαϊκής Ένωσης



ΕΣΠΑ
2007-2013
Πρόγραμμα για τη γνώση
ΕΥΡΩΠΑΪΚΟ ΚΟΙΝΩΝΙΚΟ ΤΑΜΕΙΟ

Οι διορθώσεις πραγματοποιήθηκαν κατόπιν έγκρισης του Δ.Σ. του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής

Η αξιολόγηση, η κρίση των προσαρμογών και η επιστημονική επιμέλεια του προσαρμοσμένου βιβλίου πραγματοποιείται από τη Μονάδα Ειδικής Αγωγής του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.

Η προσαρμογή του βιβλίου για μαθητές με μειωμένη όραση από το ΙΤΥΕ – ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ πραγματοποιείται με βάση τις προδιαγραφές που έχουν αναπτυχθεί από ειδικούς εμπειρογνώμονες για το ΙΕΠ.

**ΠΡΟΣΑΡΜΟΓΗ ΤΟΥ ΒΙΒΛΙΟΥ
ΓΙΑ ΜΑΘΗΤΕΣ
ΜΕ ΜΕΙΩΜΕΝΗ ΟΡΑΣΗ**

ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ

(5 ΚΡΟΥΣΕΙΣ ΚΑΙ ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΚΙΝΗΣΕΙΣ)



Κρούσεις

**Αδρανειακά
συστήματα**

**Σχετικές
κινήσεις**

**Κέντρο
μάζας**

**Φαινόμενο
Doppler**

Σύνοψη

Ασκήσεις

(5.1.) Εισαγωγή

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση των σωμάτων, καθώς και τα μεγέθη που ορίζονται με βάση αυτά, όπως η κινητική ενέργεια και η ορμή, ανήκουν στην κατηγορία των μεγεθών που δεν έχουν μια μόνο τιμή. Η τιμή τους εξαρτάται από το πού βρίσκεται εκείνος που τα μετράει. Έτσι, ο επιβάτης του τρένου νομίζει ότι ο συνεπιβάτης του είναι ακίνητος, όμως ένας παρατηρητής στην αποβάθρα του σταθμού τον βλέπει να κινείται με την ταχύτητα του τρένου. Όταν αναφερόμαστε στα μεγέθη αυτά, χωρίς άλλη διευκρίνιση, θα εννοούμε τις τιμές που βρίσκει ένας παρατηρητής ακίνητος πάνω στη Γη.

Οι παρατηρητές, που περιγράφουν με διαφορετικό τρόπο την κίνηση

των σωμάτων, πρέπει να συνεννοούνται μεταξύ τους. Σ' αυτή την ανάγκη ανταποκρίθηκε ο Γαλιλαίος με τους μετασχηματισμούς του, που επιτρέπουν να μετατρέψουμε τα δεδομένα της κίνησης σε ένα σύστημα αναφοράς σε δεδομένα για ένα άλλο σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα ως προς το πρώτο (αδρανειακό σύστημα).

Στη μελέτη των προβλημάτων μας μπορούμε να επιλέξουμε το σύστημα αναφοράς της κίνησης, με στόχο να κάνουμε τους υπολογισμούς μας όσο γίνεται απλούστερους. Συχνά, ως σύστημα αναφοράς παίρνουμε αυτό που συνδέεται με το κέντρο μάζας του συστήματος. Ένα τέτοιο σύστημα αναφοράς, λ.χ. θα διευκόλυνε τη μελέτη της κίνησης των πυραύλων, που χωρίς αυτούς οι

γνώσεις μας για το ηλιακό σύστημα θα ήταν πολύ φτωχότερες.

Τέλος, όχι μόνο η ταχύτητα των σωμάτων αλλά και η ταχύτητα των κυμάτων εξαρτάται από τη σχετική κίνηση πηγής - παρατηρητή. Αυτό σημαίνει ότι διαφορετικοί παρατηρητές αντιλαμβάνονται με διαφορετικό τρόπο το ίδιο κύμα. Το φαινόμενο Doppler, όπως είναι γνωστό, το αξιοποιούν για τη μέτρηση της ταχύτητας των αυτοκινήτων ή των αεροπλάνων με το ραντάρ, οι αστρονόμοι για να παρακολουθήσουν την κίνηση πολύ μακρινών ουράνιων σωμάτων, αλλά και οι γιατροί για να παρακολουθήσουν τη ροή του αίματος.



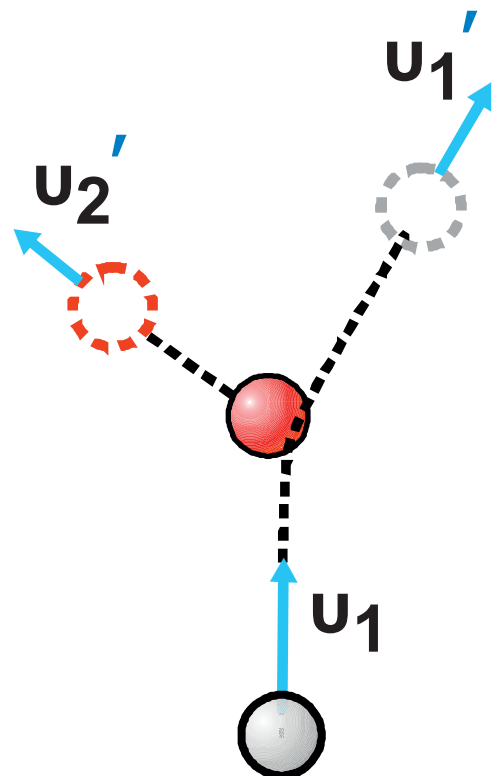
**Εκτόξευση διαστημικού λεωφορεί-
ου.**

Εικόνα 5-1.

(5.2.) Κρούσεις

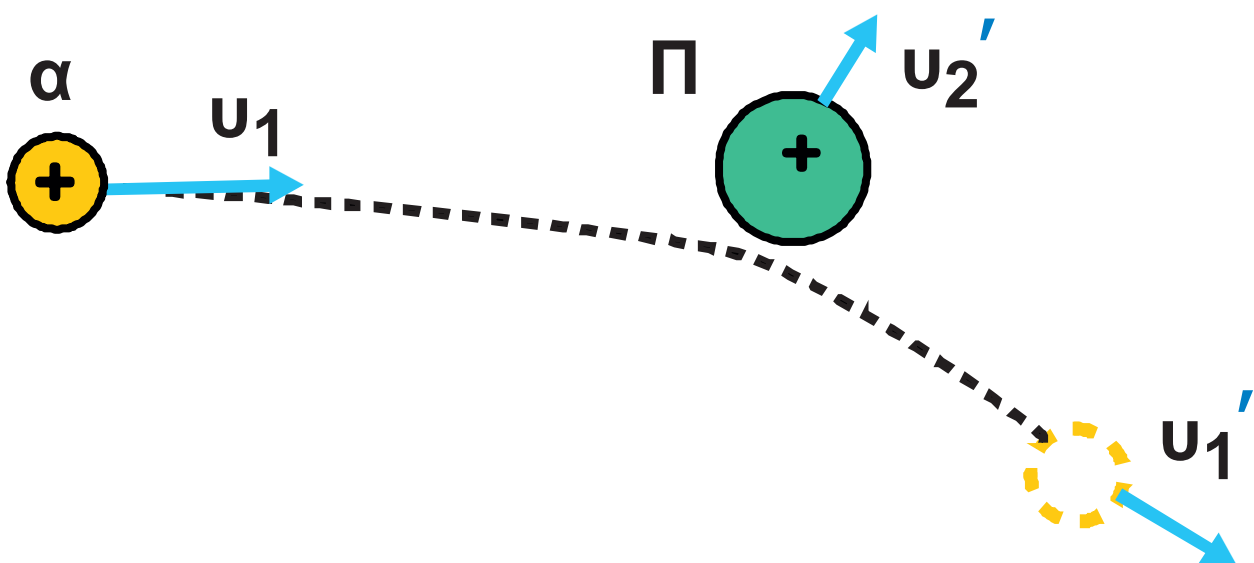
Όταν δύο σώματα συγκρούονται, για παράδειγμα όταν χτυπάνε δύο μπάλες του μπιλιάρδου (σχ. 5.1), η κινητική κατάστασή τους ή τουλάχιστον ενός από αυτά μεταβάλλεται απότομα. Οι απότομες αυτές αλλαγές της κίνησης προκαλούνται από τις ισχυρές δυνάμεις που αναπτύσσονται ανάμεσα στα σώματα που συγκρούονται, κατά τη διάρκεια της επαφής τους.

Κρούση
ανάμεσα
σε δύο
μπάλες
μπιλιάρδου.
Σχήμα 5-1.



Η έννοια της κρούσης έχει επεκταθεί και στο μικρόκοσμο όπου συμπεριλαμβάνει και φαινόμενα όπου τα «συγκρουόμενα» σωματίδια δεν έρχονται σε επαφή. Για παράδειγμα όταν ένα σωματίδιο α (πυρήνας He) κινείται προς ένα άλλο πυρήνα (Π), οι αλληλεπιδράσεις τους, που είναι πολύ ασθενείς όταν βρίσκονται μακριά, γίνονται πολύ ισχυρές όταν τα σωματίδια πλησιάσουν με αποτέλεσμα την απότομη αλλαγή στην κινητική τους κατάσταση. Η χρονική διάρκεια μεταβολής της κινητικής τους κατάστασης είναι πολύ μικρή. Αν μπορούσαμε να κινηματογραφήσουμε το φαινόμενο θα βλέπαμε ότι μοιάζει με τη σύγκρουση δύο σωμάτων, μόνο που εδώ τα σώματα δεν έρχονται σε επαφή. Ονομάζουμε, λοιπόν, κρούση και κάθε φαινόμενο

του μικρόκοσμου, στο οποίο τα «συγκρουόμενα» σωματίδια, αλληλεπιδρούν με σχετικά μεγάλες δυνάμεις για πολύ μικρό χρόνο. Το φαινόμενο αυτό στη σύγχρονη φυσική ονομάζεται και **σκέδαση** (σχ. 5.2).

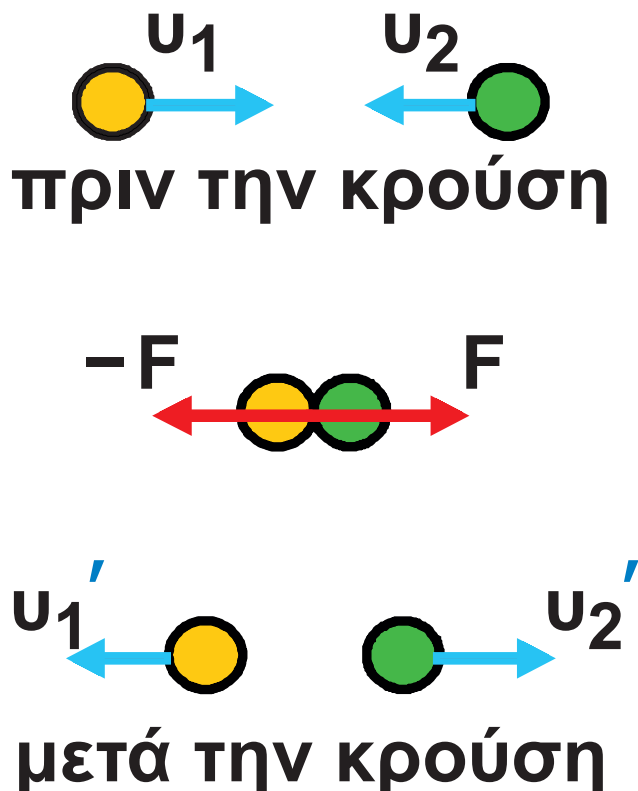


Κρούση ενός σωματίου α , με αρχικά ακίνητο πυρήνα.

Σχήμα 5-2.

Ανάλογα με τη διεύθυνση που κινούνται τα σώματα πριν συγκρουστούν οι κρούσεις διακρίνονται σε κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες.

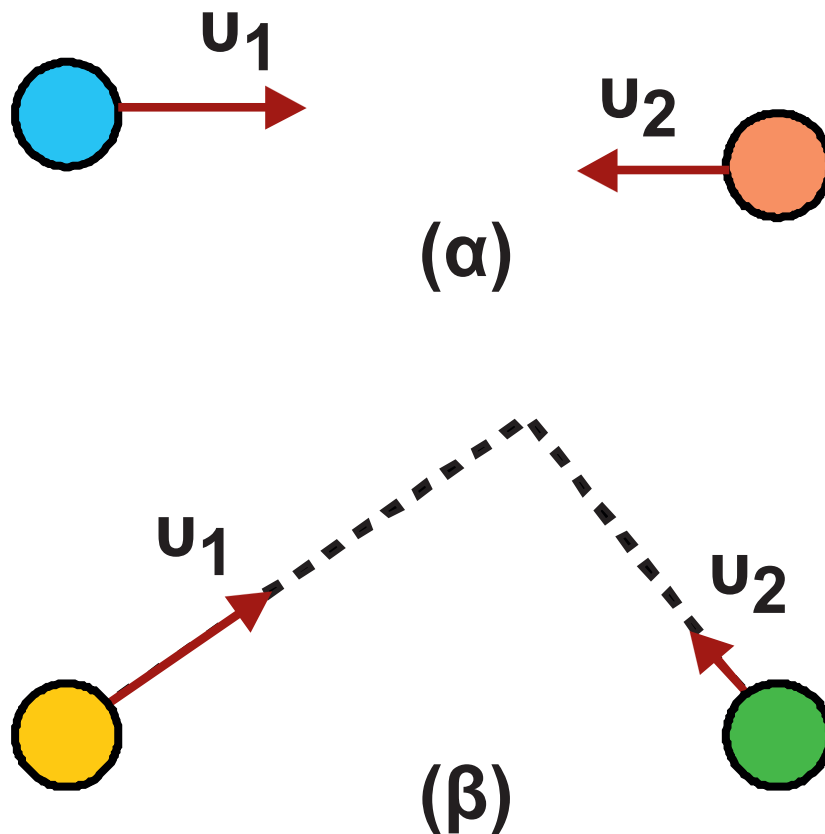
Κεντρική, (ή μετωπική) ονομάζεται η κρούση κατά την οποία τα διανύσματα των ταχυτήτων των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται βρίσκονται πάνω στην ίδια ευθεία. Αν τα σώματα που συγκρούονται είναι σφαίρες και η κρούση τους είναι κεντρική, οι ταχύτητές τους μετά την κρούση θα βρίσκονται επίσης στην ίδια (αρχική) διεύθυνση (σχ. 5.3).



Κεντρική κρούση μεταξύ δύο σφαιρών.
Σχήμα 5-3.

Έκκεντρη, ονομάζεται η κρούση στην οποία οι ταχύτητες των κέντρων μάζας των σωμάτων που συγκρούονται είναι παράλληλες (σχ. 5.4α).

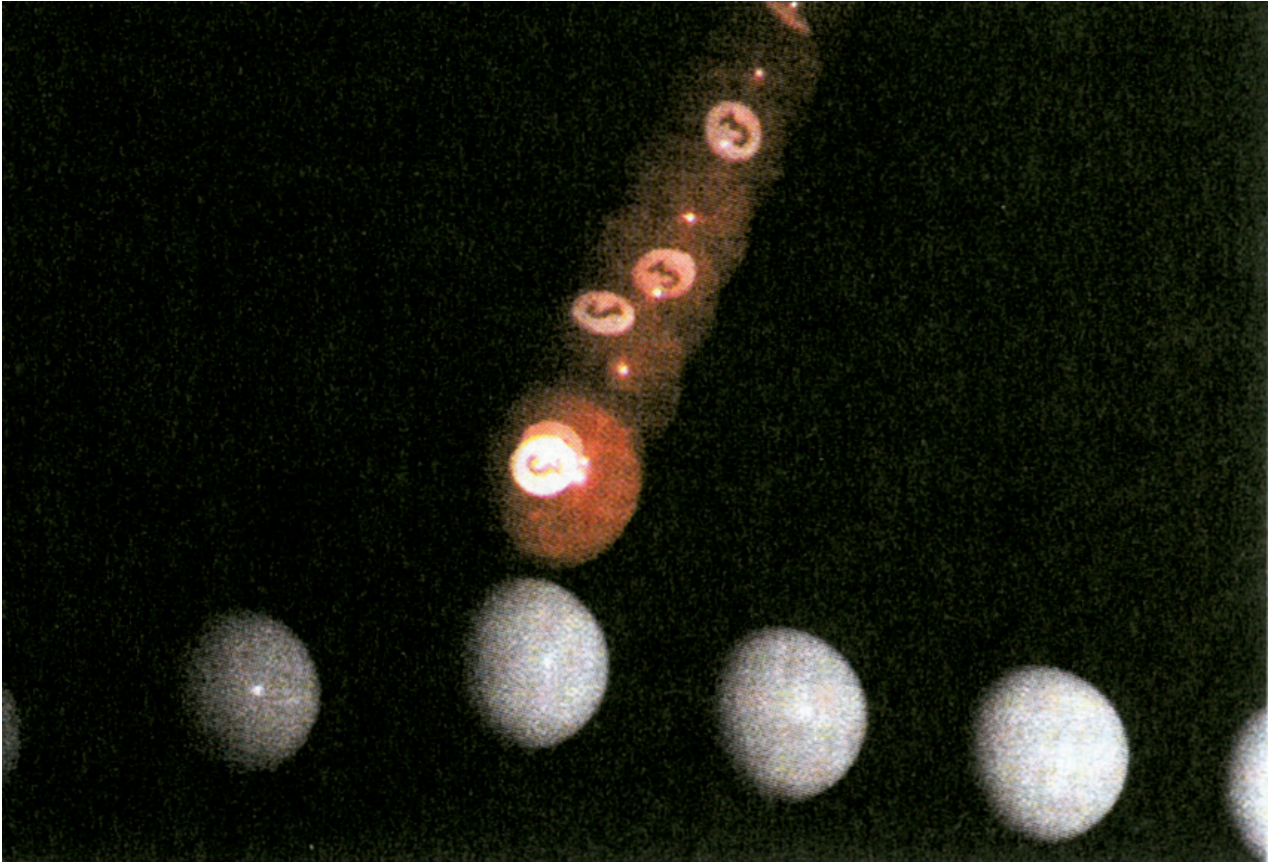
Πλάγια ονομάζεται η κρούση αν οι ταχύτητες των σωμάτων βρίσκονται σε τυχαίες διευθύνσεις (σχ. 5.4β).



(α) έκκεντρη κρούση.

(β) πλάγια κρούση.

Σχήμα 5-4.



Πλάγια κρούση
Εικόνα 5-2.

Η διατήρηση της ορμής στις κρούσεις

Επειδή η κρούση είναι ένα φαινόμενο που διαρκεί πολύ λίγο χρόνο, οι ωθήσεις των εξωτερικών δυνάμεων – αν υπάρχουν – είναι αμελητέες κατά τη διάρκεια της κρούσης.

Το σύστημα των σωμάτων που συγκρούονται μπορεί να θεωρηθεί μονωμένο, για τη χρονική διάρκεια της κρούσης, επομένως η ορμή του συστήματος διατηρείται.

Η ορμή ενός συστήματος σωμάτων, κατά τη διάρκεια της κρούσης, διατηρείται.

Αν $p_{\text{πριν}}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $p_{\text{μετά}}$ η ορμή του συστήματος αμέσως μετά την κρούση, ισχύει:

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}}$$



Δύο σωμάτια
α συγκρού-
ονται. Το
ένα, πριν
την κρούση,
ήταν πρακτι-
κά ακίνητο.
Εικόνα 5-3.

Η ενέργεια στις κρούσεις

Κατά τη σύγκρουση δύο σωμά-
των ένα μέρος της μηχανικής τους
ενέργειας μετατρέπεται σε θερμότη-
τα. Στην ιδανική περίπτωση που η
μηχανική ενέργεια των σωμάτων δε
μεταβάλλεται με την κρούση, η κρού-
ση ονομάζεται ελαστική. Επειδή η
κρούση είναι ένα φαινόμενο αμελη-
τέας χρονικής διάρκειας, η δυναμική

ενέργεια των σωμάτων – που εξαρτάται από τη θέση τους στο χώρο – δε μεταβάλλεται. Επομένως:

Ελαστική είναι η κρούση στην οποία διατηρείται η κινητική ενέργεια του συστήματος των συγκρουόμενων σωμάτων.

Στο μακρόκοσμο η ελαστική κρούση αποτελεί μια εξιδανίκευση. Προσεγγιστικά ελαστική μπορεί να θεωρηθεί η κρούση ανάμεσα σε δύο πολύ σκληρά σώματα, όπως ανάμεσα σε δύο μπάλες του μπιλιάρδου. Στο μικρόκοσμο όμως έχουμε κρούσεις απολύτως ελαστικές όπως αυτή που περιγράψαμε προηγουμένως ανάμεσα στο σωματίο α και τον πυρήνα.

Ανελαστική, ονομάζεται η κρούση στην οποία ένα μέρος της αρχικής κινητικής ενέργειας των

σωμάτων μετατρέπεται σε θερμότητα.

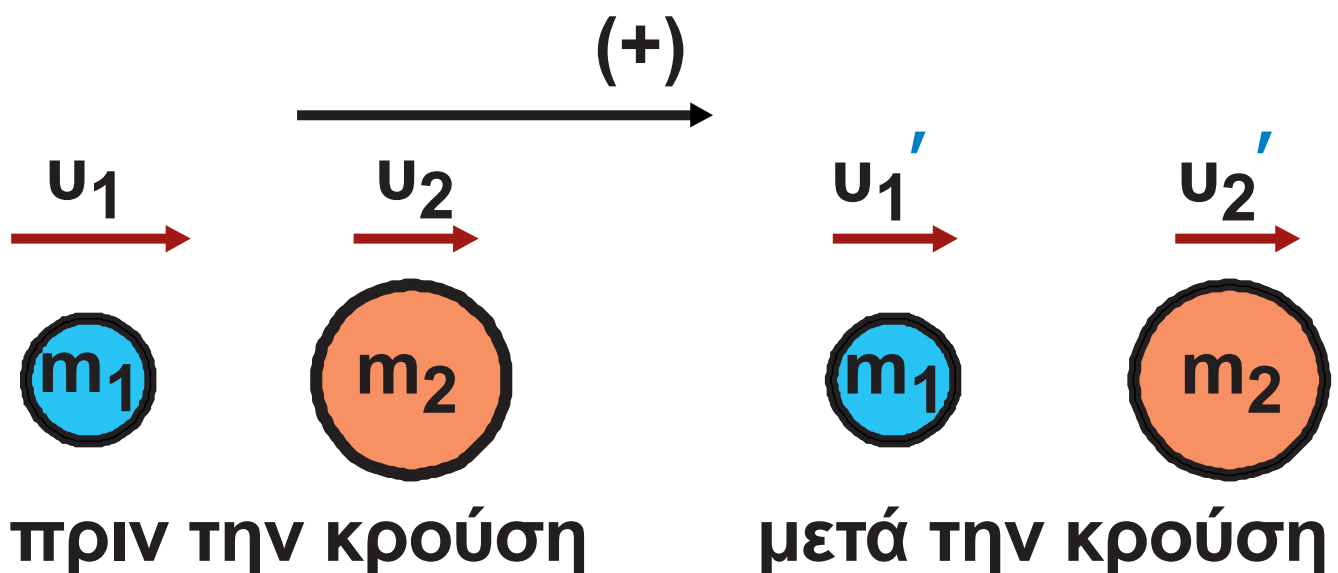
Μια ειδική περίπτωση ανελαστικής κρούσης είναι εκείνη που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων - στη δημιουργία συσσωματώματος. Αυτή η κρούση ονομάζεται **πλαστική**.



Η κρούση ανάμεσα στα αυτοκίνητα της εικόνας είναι σχεδόν πλαστική.
Εικόνα 5-4.

(5.3.) Κεντρική Ελαστική Κρούση Δύο Σφαιρών

Δύο σφαίρες Σ_1 και Σ_2 με μάζες m_1 και m_2 κινούνται με ταχύτητες u_1 και u_2 , όπως στο **σχήμα 5.5**. Οι σφαίρες συγκρούονται κεντρικά και ελαστικά και μετά την κρούση έχουν ταχύτητες u'_1 και u'_2 . Εάν γνωρίζουμε τις ταχύτητες των σφαιρών πριν την κρούση και τις μάζες τους μπορούμε να υπολογίσουμε τις ταχύτητές τους μετά την κρούση.



Σχήμα 5-5.

Για την κρούση ισχύουν:

$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 u_1' + m_2 u_2' \quad (5.1)$$

(διατήρηση της ορμής)

$$\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 u_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2'^2$$

(διατήρηση της
κινητικής ενέργειας) (5.2)

η (5.1) γράφεται και

$$m_1 (u_1 - u_1') = m_2 (u_2' - u_2) \quad (5.3)$$

ενώ η (5.2) γράφεται

$$m_1 (u_1^2 - u_1'^2) = m_2 (u_2'^2 - u_2^2) \quad (5.4)$$

Διαιρούμε τις (5.4) και (5.3) κατά μέλη και βρίσκουμε

$$u_1 + u_1' = u_2' + u_2 \quad (5.5)$$

Επιλύοντας το σύστημα των (5.1) και (5.5) ως προς u_1' και u_2' βρίσκουμε

$$u_1' = \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad (5.6)$$

και

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 \quad (5.7)$$

Στην περίπτωση όπου $m_1 = m_2$ οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$$u_1' = u_2 \quad \text{και} \quad u_2' = u_1$$

Δηλαδή οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

Στην περίπτωση που η Σ_2 ήταν ακίνητη πριν την κρούση ($u_2=0$) οι (5.6) και (5.7) γίνονται

$$u_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 \quad (5.8)$$

και

$$u_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \quad (5.9)$$

Σημείωση: Κατά τον υπολογισμό των ταχυτήτων των σφαιρών υποθέσαμε ότι οι σφαίρες μετά την κρούση συνεχίζουν να κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση. Αν μετά τις πράξεις προκύψει αρνητική τιμή για την u_1' θα συμπεράνουμε ότι η Σ_1 άλλαξε φορά κίνησης μετά την κρούση.

(5.4.) Ελαστική Κρούση Σώματος με άλλο Ακίνητο Πολύ Μεγάλης Μάζας

Αν η σφαίρα Σ_2 της προηγούμενης παραγράφου έχει πολύ μεγαλύτερη μάζα από τη Σ_1 και είναι ακίνητη πριν την κρούση οι σχέσεις (5.8) και (5.9) δίνουν

$$u'_1 = -u_1$$

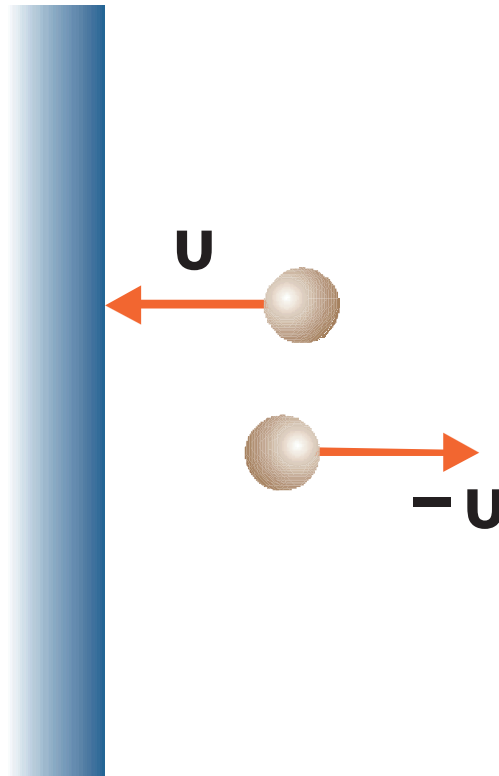
και

$$u'_2 = 0$$

Δηλαδή η σφαίρα μικρής μάζας ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς από αυτήν που είχε πριν την κρούση. Το σώμα μεγάλης μάζας παραμένει πρακτικά ακίνητο.

Σύμφωνα με τα παραπάνω όταν μια σφαίρα μικρής μάζας προσκρούει ελαστικά και κάθετα στην επιφάνεια

ενός τοίχου ή στο δάπεδο ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και αντίθετης φοράς (σχ. 5.6).

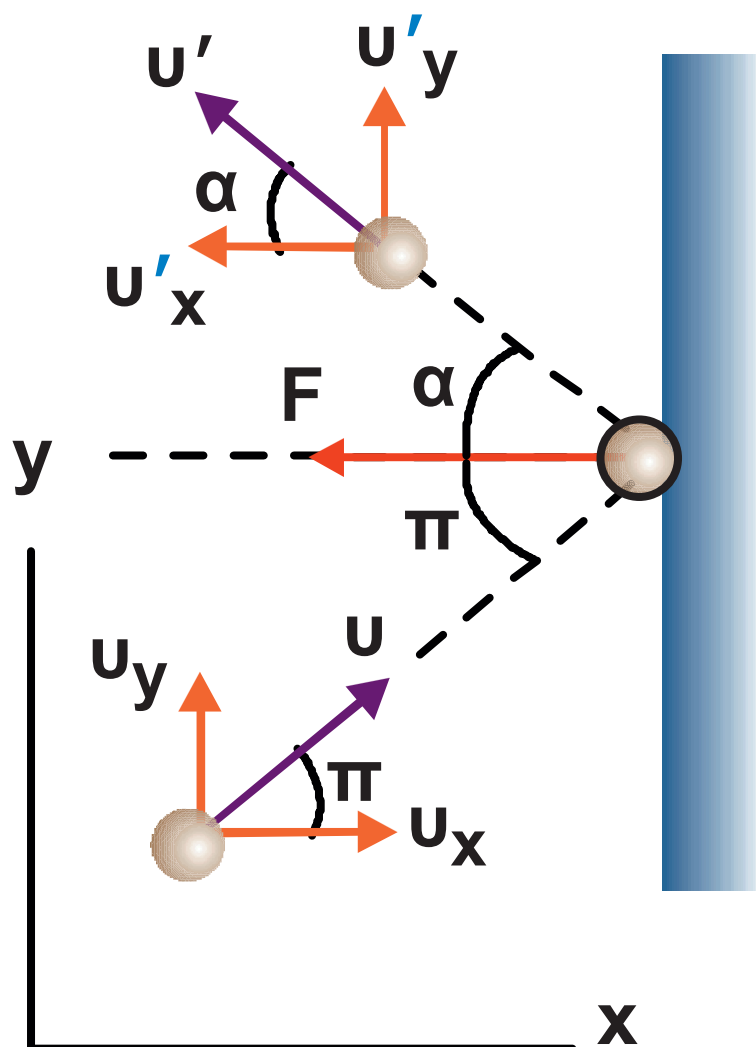


Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου.

Σχήμα 5-6.

Στην περίπτωση που η σφαίρα προσκρούει ελαστικά και πλάγια σε έναν τοίχο αναλύουμε την ταχύτητά της σε δύο συνιστώσες, τη μία (u_x)

κάθετη στον τοίχο και την άλλη (u_y) παράλληλη με αυτόν (σχ. 5.7).



Αν η κρούση είναι ελαστική η σφαίρα ανακλάται με ταχύτητα ίδιου μέτρου και η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Σχήμα 5-7.

Σύμφωνα με τα παραπάνω η κάθετη στον τοίχο συνιστώσα της ταχύτητας θα αλλάξει φορά και θα διατηρήσει το μέτρο της ($u'_x = -u_x$).

Η δύναμη που ασκείται στη σφαίρα κατά την κρούση είναι κάθετη στον τοίχο, άρα η y συνιστώσα της ταχύτητας δε μεταβάλλεται ($u'_y = u_y$).

Το μέτρο της ταχύτητας μετά την κρούση είναι

$$u' = \sqrt{u'^2_x + u'^2_y} = \sqrt{u^2_x + u^2_y} = u$$

δηλαδή το μέτρο της ταχύτητας της σφαίρας δε μεταβάλλεται.

Αν π και α οι γωνίες που σχηματίζουν η u και η u' , αντίστοιχα, με την κάθετη στον τοίχο ισχύει

$$\eta_{\mu\pi} = \frac{u_y}{u} \quad \text{και} \quad \eta_{\mu\alpha} = \frac{u'_y}{u'}$$

όμως $u_y = u'_y$ και $u = u'$
οπότε $\eta_{μπ} = \eta_{μα}$ και $\pi = \alpha$

Δηλαδή η γωνία πρόσπτωσης της σφαίρας είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης.

Παράδειγμα 5.1

Βλήμα μάζας $m = 0,02 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u = 200 \text{ m/s}$ και σφηνώνεται σε ακίνητο ξύλο μάζας $M = 0,98 \text{ kg}$ που βρίσκεται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Να βρεθεί α) η ταχύτητα του συσσωματώματος μετά την κρούση, β) η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση, γ) το διάστημα που θα διανύσει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Ο συντελεστής τριβής του συσσωματώματος με το οριζόντιο επίπεδο είναι $\mu_k = 0,5$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Απάντηση:

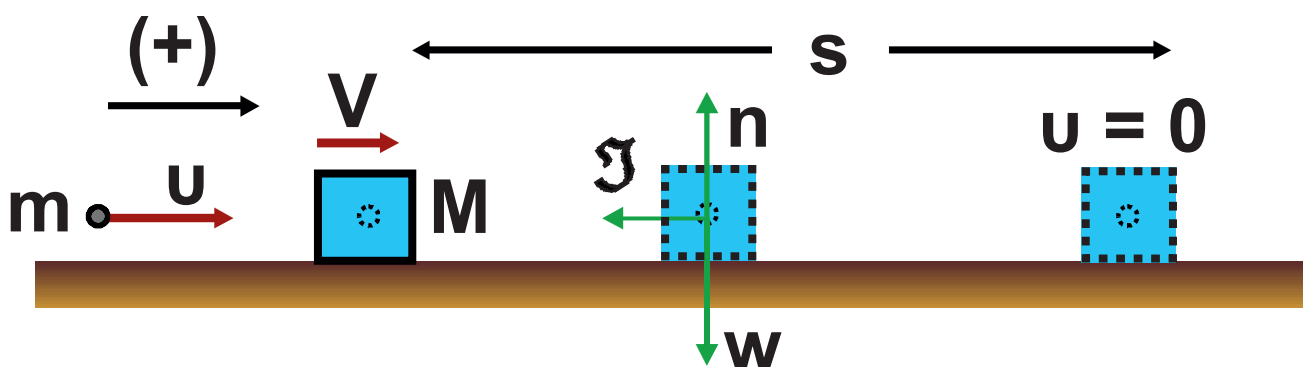
α) Έστω V η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση.

Συμβολίζουμε με $p_{\text{πριν}}$ την ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και με $p_{\text{μετά}}$ την ορμή αμέσως μετά την κρούση.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}}$$

Επιλέγοντας θετική κατεύθυνση προς τα δεξιά (σχ. 5.8), η αρχή διατήρησης της ορμής γράφεται αλγεβρικά:

$$mu = (M + m)V \text{ \u0391\u03c1\u03b1 } V = \frac{mu}{M + m} = 4 \text{ m/s}$$



Σχήμα 5-8.

β) Η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση είναι

$$K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}} =$$

$$= \frac{1}{2} m u^2 - \frac{1}{2} (M + m) v^2 = 392 \text{ J}$$

γ) Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου – ενέργειας για το συσσωμάτωμα έχουμε

$$K_{\text{αρχ}} + W_w + W_n + W_J = K_{\text{τελ}}$$

$$\text{ή } \frac{1}{2} (M + m) v^2 - \mu_k (M + m) g s = 0$$

$$\text{άρα } s = \frac{v^2}{2\mu_k g} = 1,6 \text{ m}$$

Παράδειγμα 5.2

Δύο σώματα με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$ κινούνται σε κάθετες διευθύνσεις με ταχύτητες $u_1 = 10 \text{ m/s}$ και $u_2 = 5 \text{ m/s}$ και κάποια στιγμή συγκρούονται πλαστικά. Να βρεθεί η ταχύτητα του συσσωματώματος που δημιουργείται από την πλαστική κρούση των δύο σωμάτων.

Απάντηση :

Έστω V η ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση. Αν $p_{\text{πριν}}$ η ορμή του συστήματος αμέσως πριν την κρούση και $p_{\text{μετα}}$ η ορμή αμέσως μετά την κρούση θα είναι

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετα}}$$

Αναλύουμε το διάνυσμα V σε δύο συνιστώσες τη V_x κατά την διεύθυνση x και τη V_y κατά τη διεύθυνση y

(σχ. 5.8). Όταν δύο διανύσματα είναι ίσα, είναι ίσες και οι συνιστώσες τους, επομένως

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}}$$

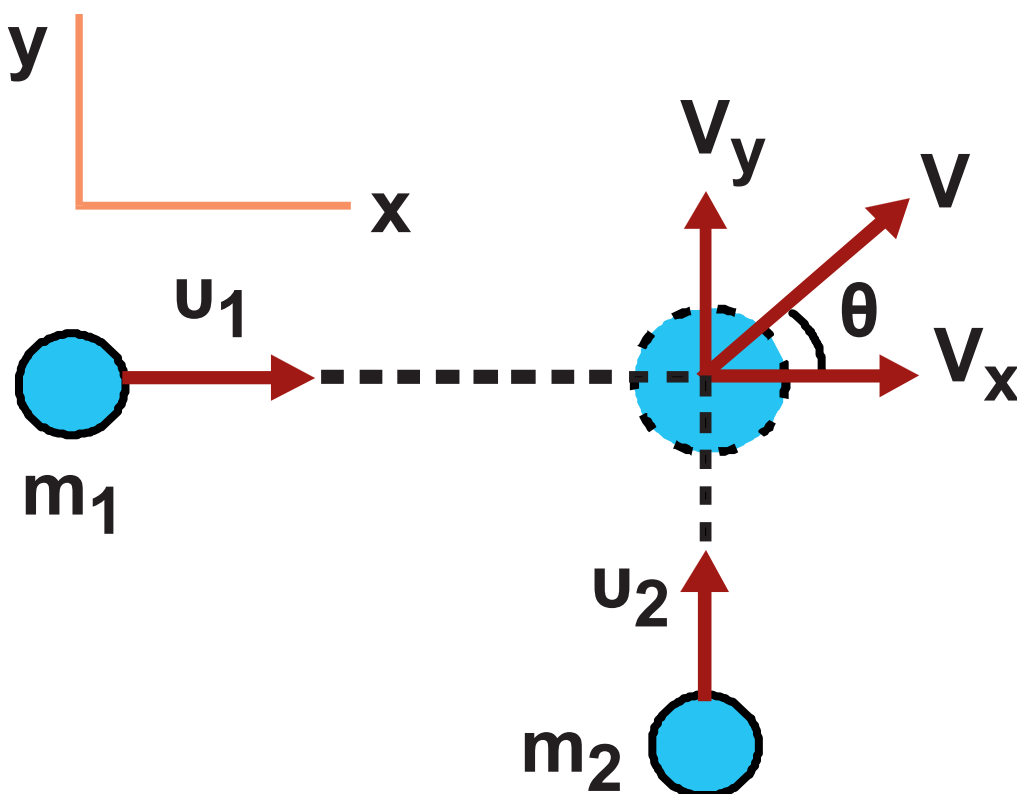
$$p_x^{\text{πριν}} = p_x^{\text{μετά}}$$

ή

$$m_1 u_1 = (m_1 + m_2) V_x$$

$$p_y^{\text{πριν}} = p_y^{\text{μετά}}$$

$$m_2 u_2 = (m_1 + m_2) V_y$$



Σχήμα 5-8.

από όπου βρίσκουμε

$$V_x = \frac{m_1 u_1}{m_1 + m_2} = 4 \text{ m/s}$$

και

$$V_y = \frac{m_2 u_2}{m_1 + m_2} = 3 \text{ m/s}$$

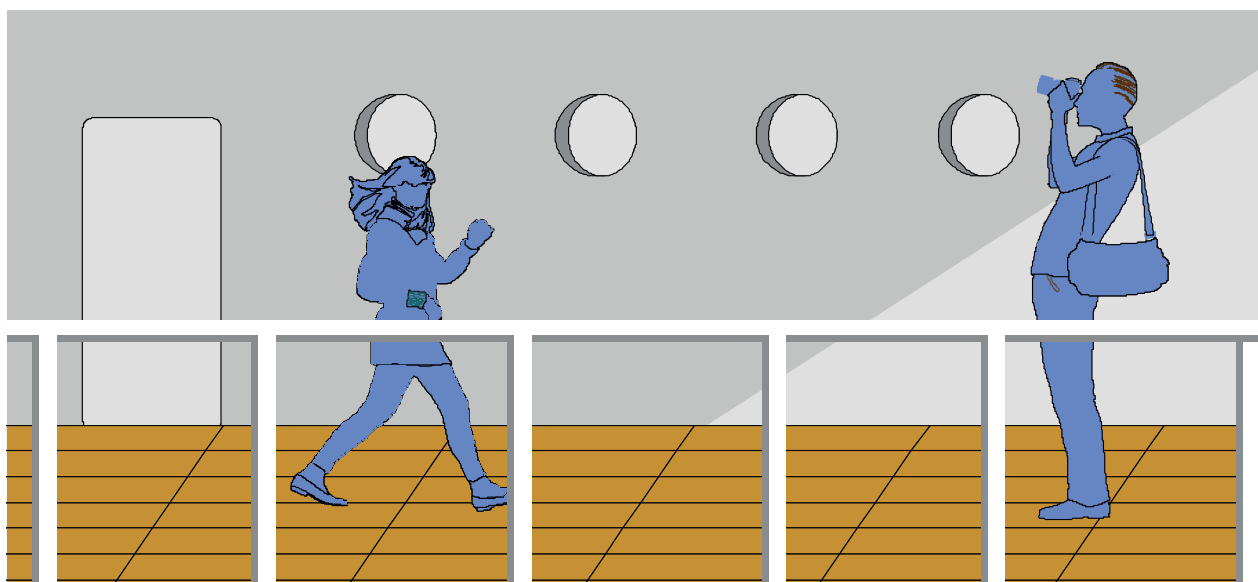
$$\text{και } V = \sqrt{(V_x)^2 + (V_y)^2} = 5 \text{ m/s}$$

$$\text{και } \varepsilon\varphi\theta = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3}{4}$$

(5.5.) Αδρανειακά και Μη Αδρανειακά Συστήματα

Η κίνηση ενός ανθρώπου ο οποίος μετακινείται πάνω σε ένα πλοίο που πλέει κατά μήκος της ακτής δε γίνεται αντιληπτή με τον ίδιο τρόπο από ένα παρατηρητή που κάθεται στο κατάστρωμα του πλοίου και από ένα παρατηρητή που κάθεται στην ακτή.

Στη φύση τα πάντα βρίσκονται σε κίνηση. Όταν βρισκόμαστε μέσα σε ένα αυτοκίνητο που κινείται, συνηθίζουμε να αντιμετωπίζουμε το δρόμο ως ακίνητο. Όμως δεν είναι ακίνητος. Ολόκληρη η Γη περιστρέφεται, γύρω από τον εαυτό της και γύρω από τον Ήλιο. Ούτε και ο Ήλιος είναι ακίνητος, κινείται στο διάστημα.



Η κίνηση ενός ανθρώπου στο κατάστρωμα δε γίνεται με τον ίδιο τρόπο αντιληπτή από κάποιον που βρίσκεται στο πλοίο και από κάποιον που βρίσκεται στην ακτή.

Σχήμα 5-9.

Προκειμένου να περιγράψουμε την κίνηση ενός σώματος, θεωρούμε αυθαίρετα ένα χώρο ακίνητο και μελετάμε την κίνηση ως προς το χώρο αυτό. Έτσι όταν αναφερόμαστε στην κίνηση ενός αυτοκινήτου θεωρούμε τη Γη ακίνητη. Όταν μελετάμε

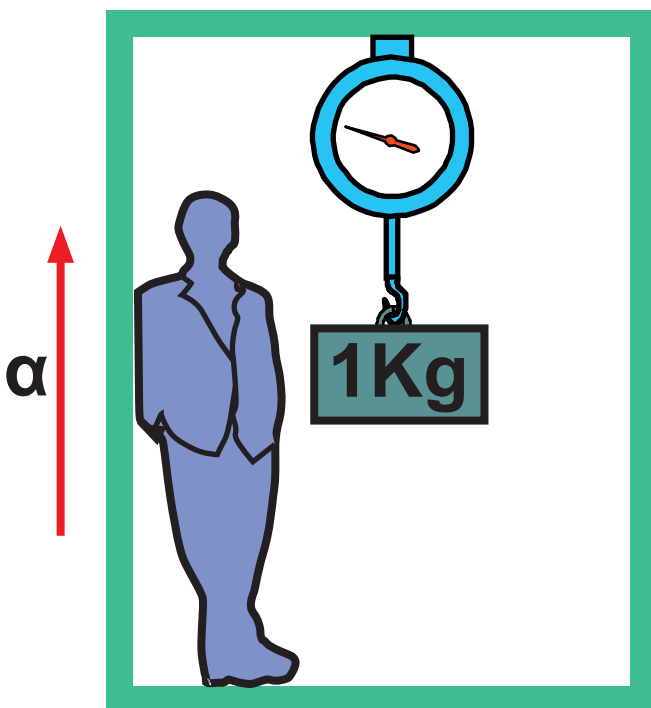
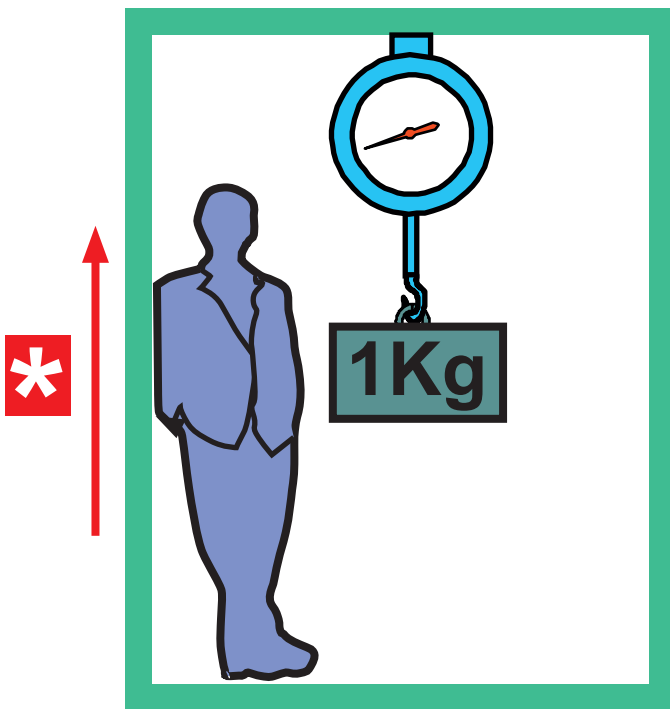
την κίνηση των πλανητών, θεωρούμε τον Ήλιο ακίνητο. Ο χώρος που κάθε φορά θεωρείται ακίνητος κατά τη μελέτη μιας κίνησης, ονομάζεται **σύστημα αναφοράς**.

Προκύπτει εύλογα το ερώτημα, ποιο σύστημα αναφοράς πρέπει να διαλέγουμε κάθε φορά για να μελετήσουμε μια κίνηση;

Η πρώτη απάντηση ενός ρομαντικού θα ήταν ότι οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς και να διαλέξουμε θα ήταν το ίδιο μια και αν οι φυσικοί μας νόμοι είναι σωστοί πρέπει να ισχύουν σε οποιοδήποτε σύστημα.

Στην πράξη όμως, κάποια συστήματα αναφοράς είναι πιο βολικά από κάποια άλλα στη μελέτη των φαινομένων.

***** $υ = \text{σταθ.}$



Στη δεύτερη περίπτωση που το ασανσέρ επιταχύνεται ζυγαριά βρίσκει το σώμα βαρύτερο από όσο είναι στην πραγματικότητα. Ο παρατηρητής που βρίσκεται μέσα στο ασανσέρ αδυνατεί να δώσει εξήγηση. **Σχήμα 5-10.**

Ας υποθέσουμε ότι καθώς ταξιδεύουμε με ένα πολυτελές τρένο ευθύγραμμο ομαλά παίζουμε μπιλιάρδο.

Ο παίκτης μπορεί να προβλέψει το πώς θα κινηθούν οι μπάλες μετά από ένα κτύπημα το ίδιο καλά όπως αν το τρένο ήταν ακίνητο. Αν όμως κατά τη διάρκεια του παιχνιδιού το τρένο μεταβάλει την ταχύτητά του ο παίκτης θα βρεθεί προ εκπλήξεως γιατί οι μπάλες θα κινούνται με έναν απροσδόκητο τρόπο τον οποίο μάλλον δεν θα μπορεί να ερμηνεύσει εύκολα μια και δεν υπάρχουν προφανείς δυνάμεις μέσα στο σύστημά του που να συνδέονται με την κίνηση των σφαιρών.

Ο παίκτης, αν γνωρίζει φυσική, θα αναρωτηθεί μήπως δεν ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton (**νόμος της αδράνειας**) σύμφωνα με τον οποίο **ένα σώμα πάνω στο οποίο δεν ασκούνται δυνάμεις είτε ηρεμεί είτε κινείται ισοταχώς**. Όμως ένας

παρατηρητής που είναι ακίνητος έξω από το τρένο μπορεί να ερμηνεύσει μια χαρά την κίνηση των σφαιρών βλέποντας ότι το τραπέζι του μπιλιάρδου στρίβει μαζί με το τρένο και ότι οι σφαίρες συνεχίζουν να κινούνται ευθύγραμμα ομαλά, όπως ορίζει ο πρώτος νόμος του Newton.

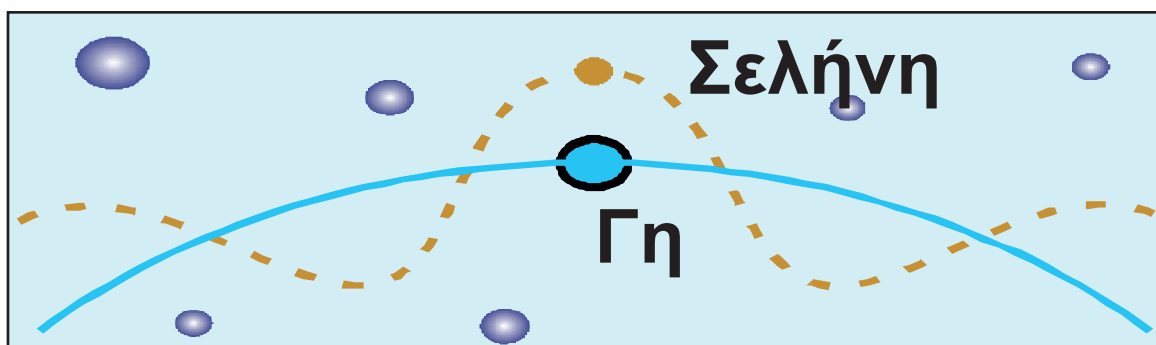
Φαίνεται λοιπόν ότι ένα ακίνητο τρένο, ή ένα τρένο που κινείται με σταθερή ταχύτητα είναι βολικά συστήματα αναφοράς, σε αντίθεση με ένα τρένο που η ταχύτητά του μεταβάλλεται, γιατί στις δυο πρώτες περιπτώσεις η κινητική συμπεριφορά των σωμάτων ερμηνεύεται απλά με τη χρήση των βασικών νόμων της μηχανικής.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται αδρανειακά συστήματα.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι και αυτό αδρανειακό σύστημα.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται μη αδρανειακά συστήματα.

Ένα σύστημα αναφοράς που επιταχύνεται σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι μη αδρανειακό σύστημα.



Ενώ από τη Γη η Σελήνη φαίνεται να κινείται κυκλικά, από το διάστημα η κίνησή της θα μπορούσε να φαίνεται όπως στο σχήμα.

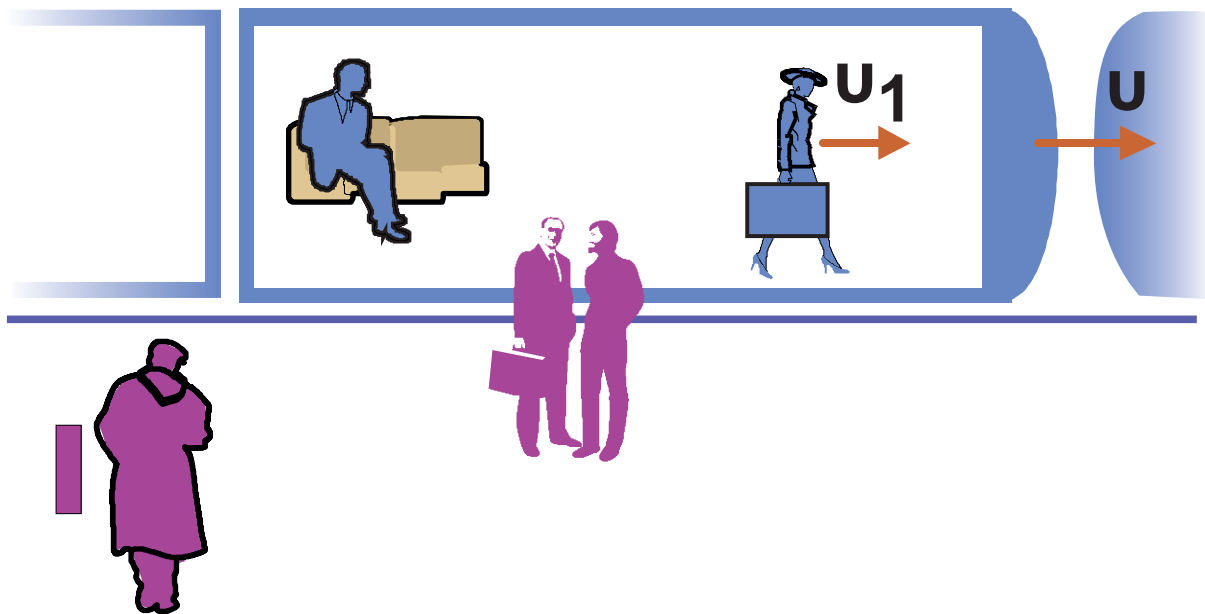
Σχήμα 5-11.

(5.6.) Σχετική Ταχύτητα σε Αδρανειακά Συστήματα

Η ταχύτητα ενός κινούμενου σώματος δε γίνεται με τον ίδιο τρόπο αντιληπτή από όλους τους παρατηρητές.

Ένας άνθρωπος καθιστός μέσα σε ένα τρένο που κινείται με ταχύτητα u θεωρείται ότι είναι ακίνητος ως προς το τρένο αλλά κινείται με ταχύτητα u ως προς ένα παρατηρητή που είναι ακίνητος στο σιδηροδρομικό σταθμό και παρακολουθεί το τρένο.

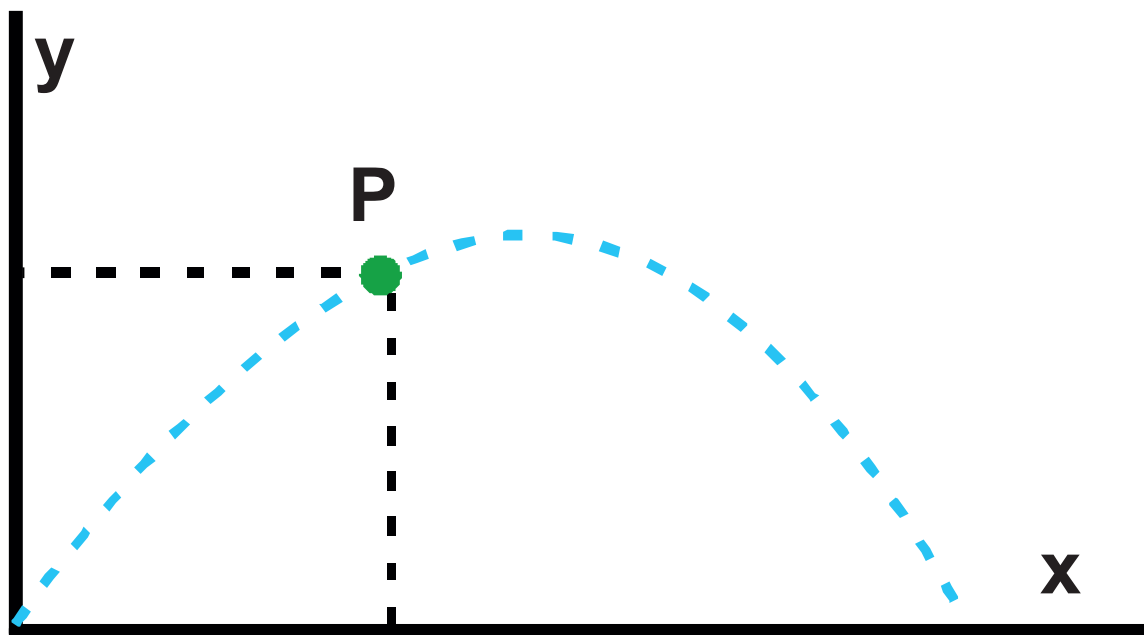
Εάν πάλι ο επιβάτης του τρένου περπατάει με ταχύτητα u_1 μέσα στο τρένο στη φορά κίνησης του τρένου έχει ταχύτητα u_1 , ως προς το τρένο, αλλά ταχύτητα $u + u_1$ για τον ακίνητο παρατηρητή στον σταθμό.



Η ταχύτητα ενός επιβάτη του τρένου, γίνεται αντιληπτή με διαφορετικό τρόπο από ένα παρατηρητή **A** που βρίσκεται ακίνητος μέσα στο τρένο και από κάποιο παρατηρητή **B** που είναι ακίνητος στο σταθμό.
Σχήμα 5-12.

Για τη μελέτη της κίνησης είναι απαραίτητος ο καθορισμός της θέσης του σώματος κάθε στιγμή. Η θέση ενός σώματος στο χώρο προσδιορίζεται από τις συντεταγμένες του (x, y, z) σε ένα τρισσορθόγωνιο

σύστημα αξόνων. Στην περίπτωση που η κίνηση του σώματος γίνεται πάνω σε επίπεδο αρκούν δύο συντεταγμένες. Εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με τέτοιες περιπτώσεις. Τα συμπεράσματα που θα βγουν εύκολα γενικεύονται και στον τρισδιάστατο χώρο.



Η θέση ενός σώματος που εκτελεί πλάγια βολή προσδιορίζεται κάθε στιγμή από τις συντεταγμένες του x και y .

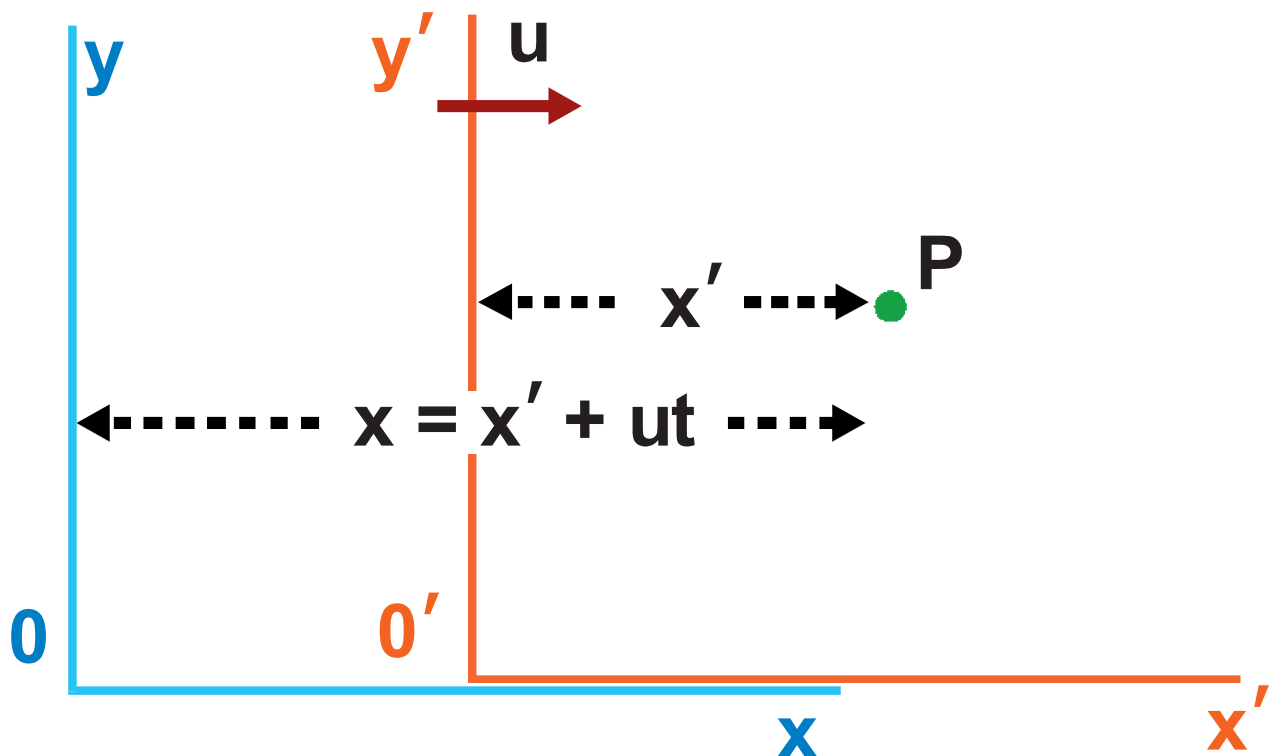
Σχήμα 5-13.

Επειδή η μελέτη μιας κίνησης σχετίζεται πάντα με κάποιο σύστημα αναφοράς, είναι απαραίτητο να βρεθεί κάποιος τρόπος ώστε δυο άνθρωποι (παρατηρητές) που παρατηρούν το ίδιο φαινόμενο από διαφορετικά συστήματα αναφοράς να μπορούν να συνεννοηθούν. Αυτό γίνεται με τη βοήθεια σχέσεων μετασχηματισμού της θέσης, της ταχύτητας και κάθε άλλου μεγέθους που πιθανόν γίνεται αντιληπτό με διαφορετικό τρόπο από διάφορα συστήματα αναφοράς.

Αν και υπάρχουν συστήματα αναφοράς με ιδιαίτερα μεγάλο ενδιαφέρον, όπως το σύστημα που στρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα (τέτοιο σύστημα είναι η Γη), εμείς θα ασχοληθούμε μόνο με **μετασχηματισμούς ανάμεσα σε αδρανειακά συστήματα**. Κάθε τέτοιο σύστημα

θα το φανταζόμαστε εφοδιασμένο με ένα σύστημα αξόνων ως προς το οποίο γίνονται οι μετρήσεις.

Έστω ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς Σ και ένα άλλο Σ' κινούμενο με σταθερή ταχύτητα u ως προς το Σ . Για λόγους απλούστευσης ας δεχτούμε ότι τα δύο συστήματα αναφοράς ταυτίζονταν τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ότι η u είναι παράλληλη με τον άξονα Ox του Σ (σχ. 5.14).



Σχήμα 5-14.

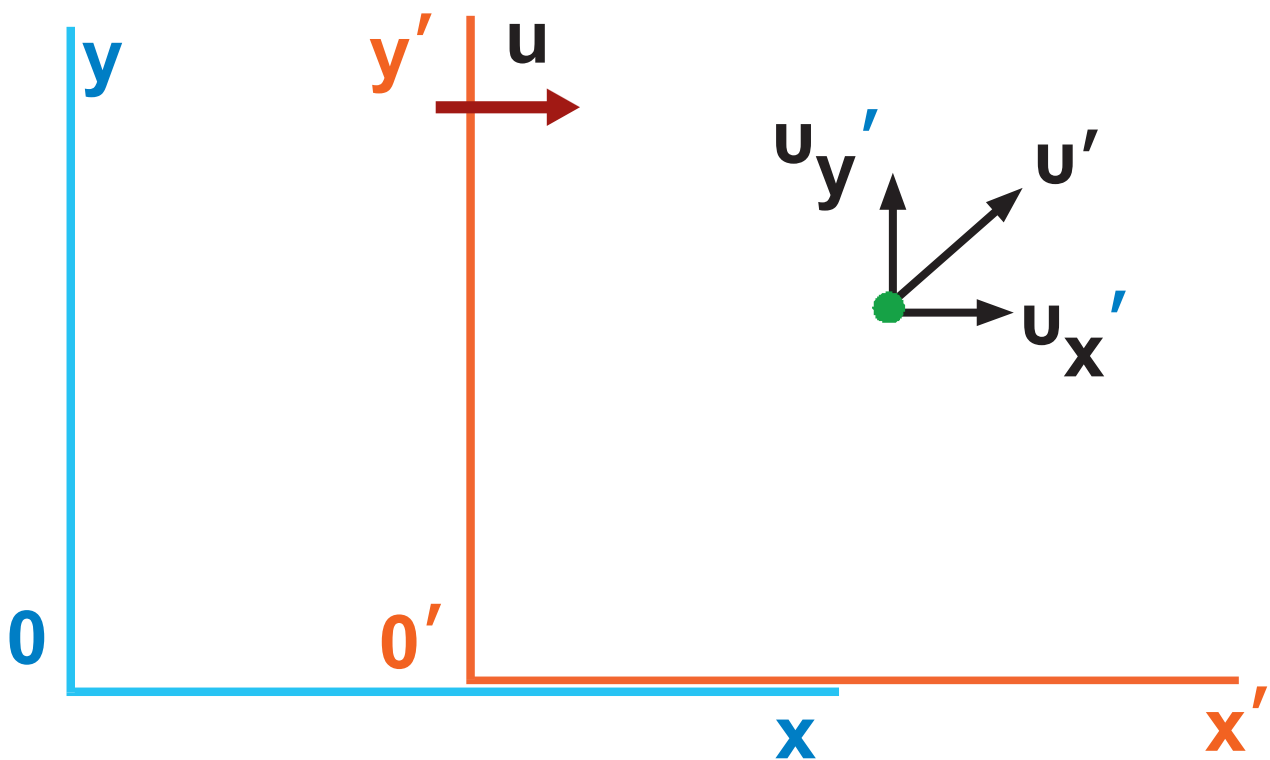
Η θέση ενός υλικού σημείου **P** στο σύστημα **Σ'** τη χρονική στιγμή **t**, δίνεται από τις συντεταγμένες **x'**, **y'**.

Η θέση του ίδιου σημείου στο σύστημα **Σ** δίνεται από τις συντεταγμένες **x**, **y**.

Οι σχέσεις μεταξύ των συντεταγμένων του **P** στο ένα σύστημα και στο άλλο είναι

$$\begin{aligned}x &= x' + ut \\ y &= y'\end{aligned}$$

Έστω ότι το σημείο **P** κινείται με σταθερή ταχύτητα **u'**, ως προς το σύστημα **Σ'**. Η **u'** αναλύεται στις **u'_x**, **u'_y** στο σύστημα **Σ'** (σχ. 5.15).



Σχήμα 5-15.

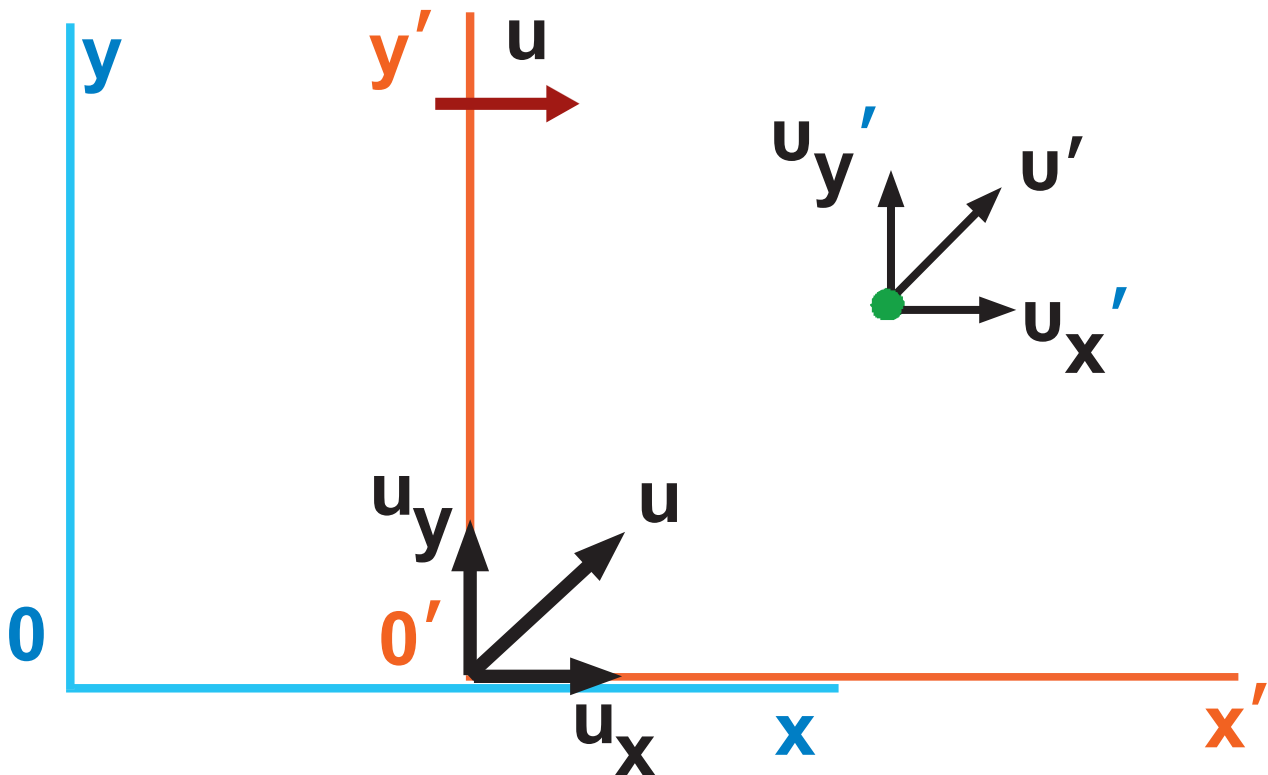
Από τους μετασχηματισμούς θέσης εύκολα προκύπτουν οι συνιστώσες της ταχύτητας του P όπως γίνεται αντιληπτή από το Σ .

$$x = x' + ut \quad \text{άρα} \quad \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'}{\Delta t} + u \frac{\Delta t}{\Delta t}$$

$$\text{οπότε} \quad u_x = u_{x'} + u$$

$$y = y' \quad \text{άρα} \quad \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta y'}{\Delta t} \quad \text{οπότε} \quad u_y = u_{y'}$$

Αν η ταχύτητα u με την οποία κινείται το Σ' ως προς το Σ δεν είναι παράλληλη στον Ox , αναλύουμε τη u στις συνιστώσες u_x, u_y (σχ. 5.16).



Σχήμα 5-16.

Οι μετασχηματισμοί θέσης και ταχύτητας παίρνουν τη μορφή

$$x = x' + u_x t \quad u_x = u_x' + u_x$$

$$y = y' + u_y t \quad u_y = u_y' + u_y$$

διανυσματικά για την ταχύτητα

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}$$

Οι παραπάνω μετασχηματισμοί είναι γνωστοί ως **μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου**.

Από την εξίσωση $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}$ προκύπτει

$$\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = \frac{\Delta \mathbf{u}'}{\Delta t} + \frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} \quad (5.10)$$

και επειδή η \mathbf{u} είναι σταθερή $\frac{\Delta \mathbf{u}}{\Delta t} = 0$

Από την (5.10) έχουμε ότι

$$\frac{\Delta u}{\Delta t} = \frac{\Delta u'}{\Delta t} \quad \text{ή} \quad \boxed{\alpha = \alpha'}$$

$F = ma$ και $F' = ma'$ οπότε $\boxed{F = F'}$

Όταν δηλαδή, ένα υλικό σημείο P δέχεται δύναμη και επιταχύνεται η δύναμη και η επιτάχυνση γίνονται αντιληπτές με τον ίδιο τρόπο και από τα δύο συστήματα αναφοράς, υπό τον όρο πάντα ότι τα Σ και Σ' είναι αδρανειακά, δηλαδή η u είναι σταθερή.

Τέλος, αν η ορμή ενός συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς το σύστημα αναφοράς Σ θα διατηρείται και ως προς το σύστημα αναφοράς Σ' . Το ίδιο ισχύει και με τη διατήρηση της ενέργειας.

Γενικά, οι νόμοι της φυσικής ισχύουν με τη μορφή που τους ξέρουμε στα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

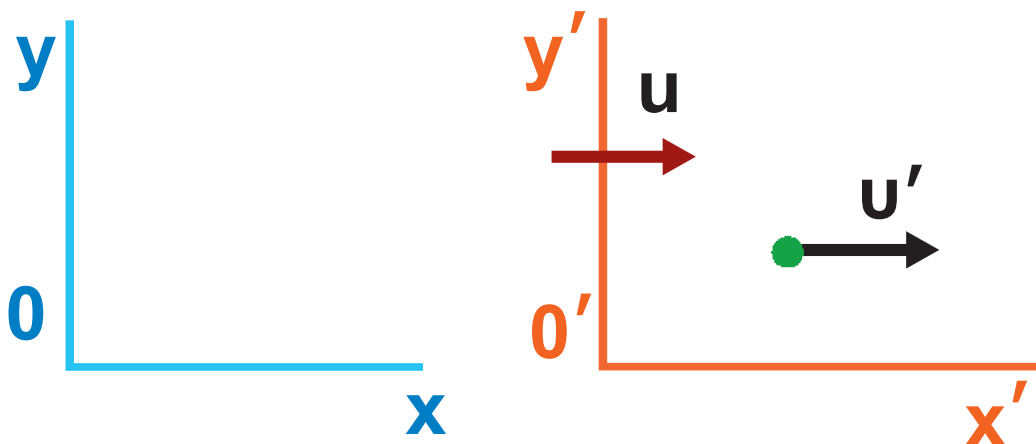


Γαλιλαίος (1564-1642) Ιταλία. Θεμελιωτής της σύγχρονης μηχανικής. Διώχθηκε για τις απόψεις του από την επίσημη εκκλησία της εποχής του.

Εικόνα 5-5.

Παράδειγμα 5.3

Το σύστημα Σ' κινείται με ταχύτητα u ως προς το Σ . Ένα σώμα κινείται με ταχύτητα u' στο Σ' (σχ. 5.17). Ποια είναι η ταχύτητα u του σώματος ως προς το Σ ;



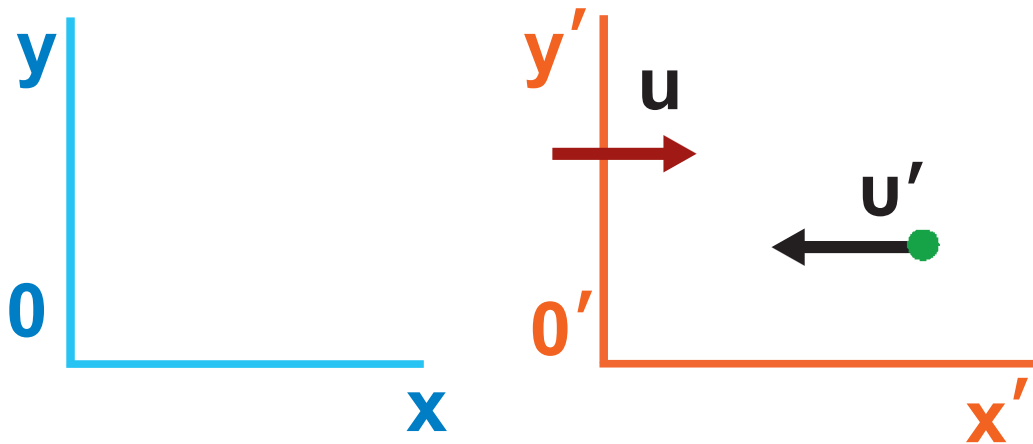
Σχήμα 5-17.

Απάντηση:

Ως προς το Σ σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα ισχύει $u = u' + u$. Μετατρέποντας τη σχέση αυτή σε αλγεβρική θα έχουμε $u = u' + u$.

Παράδειγμα 5.4

Στο προηγούμενο παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι η u' είναι αντίθετης φοράς και ότι όλα τα άλλα στοιχεία παραμένουν ίδια (σχ. 5.18). Ποια είναι τώρα η ταχύτητα του σώματος ως προς το Σ ;



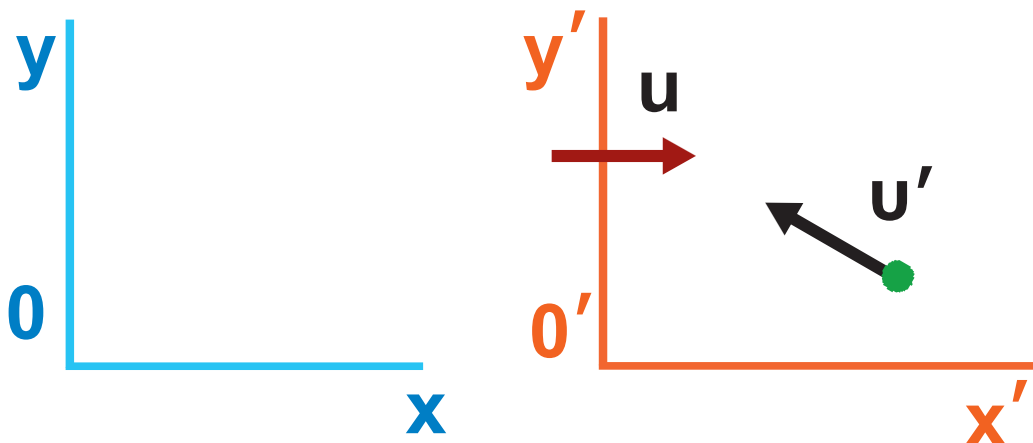
Σχήμα 5-18.

Απάντηση:

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου θα ισχύει $u = u' + u$ και αλγεβρικά θα έχουμε $u = -u' + u$.

Παράδειγμα 5.5

Να βρεθεί η ταχύτητα του σώματος ως προς το Σ αν η \mathbf{u}' έχει μια τυχαία διεύθυνση πάνω στο επίπεδο $x'O'y'$ όπως στο **σχήμα 5.19**.



Σχήμα 5-19.

Απάντηση :

Σύμφωνα με τον μετασχηματισμό του Γαλιλαίου η ταχύτητα με την οποία κινείται το σώμα ως προς το Σ θα είναι $\mathbf{u} = \mathbf{u}' + \mathbf{u}$ και αλγεβρικά θα

έχουμε $u = \sqrt{u'^2 + u^2 + 2uu' \cos \varphi}$

όπου φ η γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα \mathbf{u}' και \mathbf{u} .

(5.7.) Σύστημα Αναφοράς Κέντρου Μάζας

Σε περιπτώσεις όπου η ορμή διατηρείται, η εφαρμογή της αρχής διατήρησης της ορμής μπορεί να απλουστευτεί με τη χρησιμοποίηση της έννοιας του κέντρου μάζας.

Στο προηγούμενο κεφάλαιο μιλήσαμε για το κέντρο μάζας ενός σώματος. Εδώ θα μιλήσουμε για το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων.

Πού βρίσκεται το κέντρο μάζας;

Αν το σύστημα αποτελείται από ένα αριθμό σωμάτων πολύ μικρών διαστάσεων με μάζες m_1, m_2, \dots . Αν x_i, y_i, z_i είναι οι συντεταγμένες του σώματος m_i , το κέντρο μάζας του συστήματος είναι στο σημείο με συντεταγμένες

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n} =$$

$$= \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

και

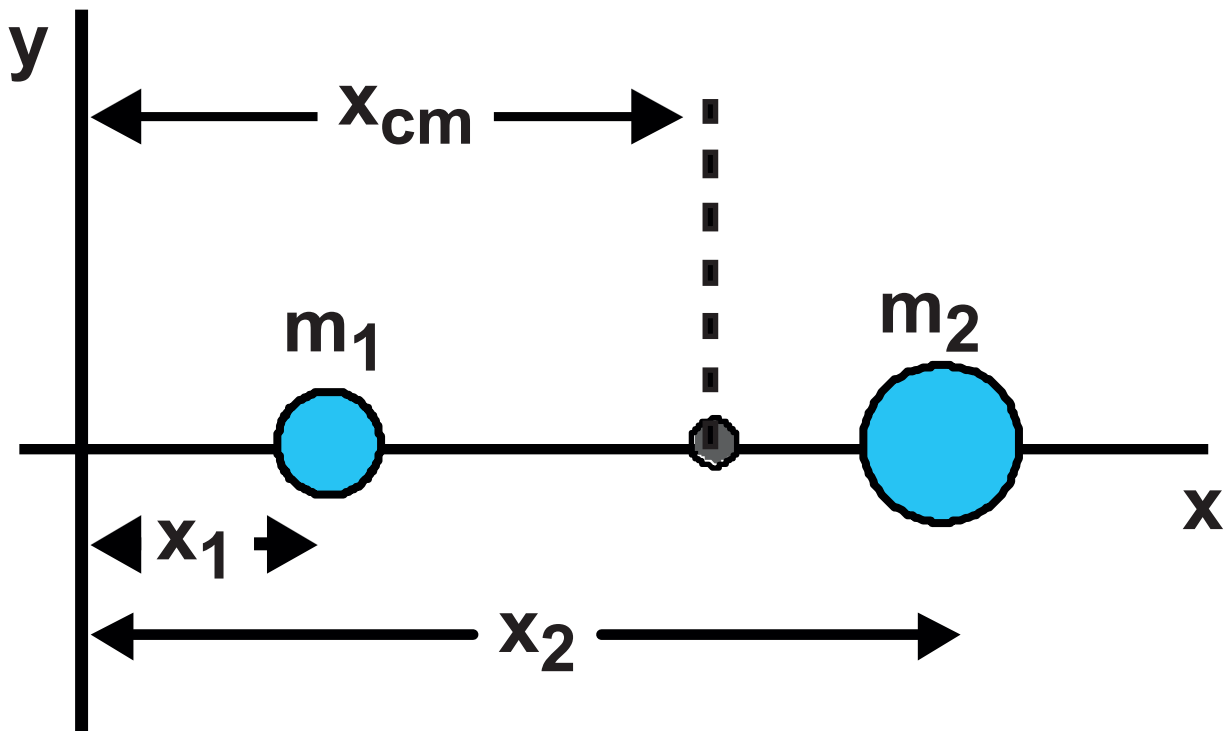
$$z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

όπου **M** η συνολική μάζα του συστήματος.

Για ένα σύστημα δύο σωμάτων μικρών διαστάσεων, που μπορούν να θεωρηθούν υλικά σημεία, η θέση του κέντρου μάζας βρίσκεται από τη σχέση

$$x_{cm} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$$

όπου x_1 και x_2 οι θέσεις των δύο μαζών σ' ένα σύστημα συντεταγμένων που σαν άξονα των x έχει την ευθεία που περνάει από τα δυο υλικά σημεία (σχ. 5.20).



Σχήμα 5-20.

Η κίνηση του κέντρου μάζας

Ο δεύτερος νόμος του Newton για ένα σύστημα σωμάτων έχει τη μορφή

$$\Sigma F_{\text{εξ}} = M a_{\text{cm}} = \frac{d p}{d t}$$

όπου $\Sigma F_{\text{εξ}}$ το διανυσματικό άθροισμα των εξωτερικών δυνάμεων στο σύστημα, M η μάζα του συστήματος, a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του συστήματος και p η ορμή του συστήματος.

Δηλαδή το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν ένα υποθετικό υλικό σημείο μάζας ίσης με τη συνολική μάζα του συστήματος αν θεωρήσουμε ότι όλες οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχεται το σύστημα ασκούνται σ' αυτό.

Από το δεύτερο νόμο προκύπτει ότι αν το σύστημα είναι μονωμένο

($\Sigma F_{εξ}$) η ορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή και το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Εφόσον το κέντρο μάζας του συστήματος σε αυτές τις περιπτώσεις κινείται με σταθερή ταχύτητα, ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το κέντρο μάζας είναι ακίνητο είναι ένα αδρανειακό σύστημα. Αυτό το σύστημα αναφοράς θα το ονομάζουμε **σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας**.

Αν για την αντιμετώπιση ενός προβλήματος στο οποίο η ορμή διατηρείται επιλέξουμε ως σύστημα αναφοράς το σύστημα του κέντρου μάζας το πρόβλημα απλοποιείται σημαντικά. Ως προς αυτό το σύστημα το κέντρο μάζας είναι ακίνητο και η συνολική ορμή του συστήματος μηδέν.

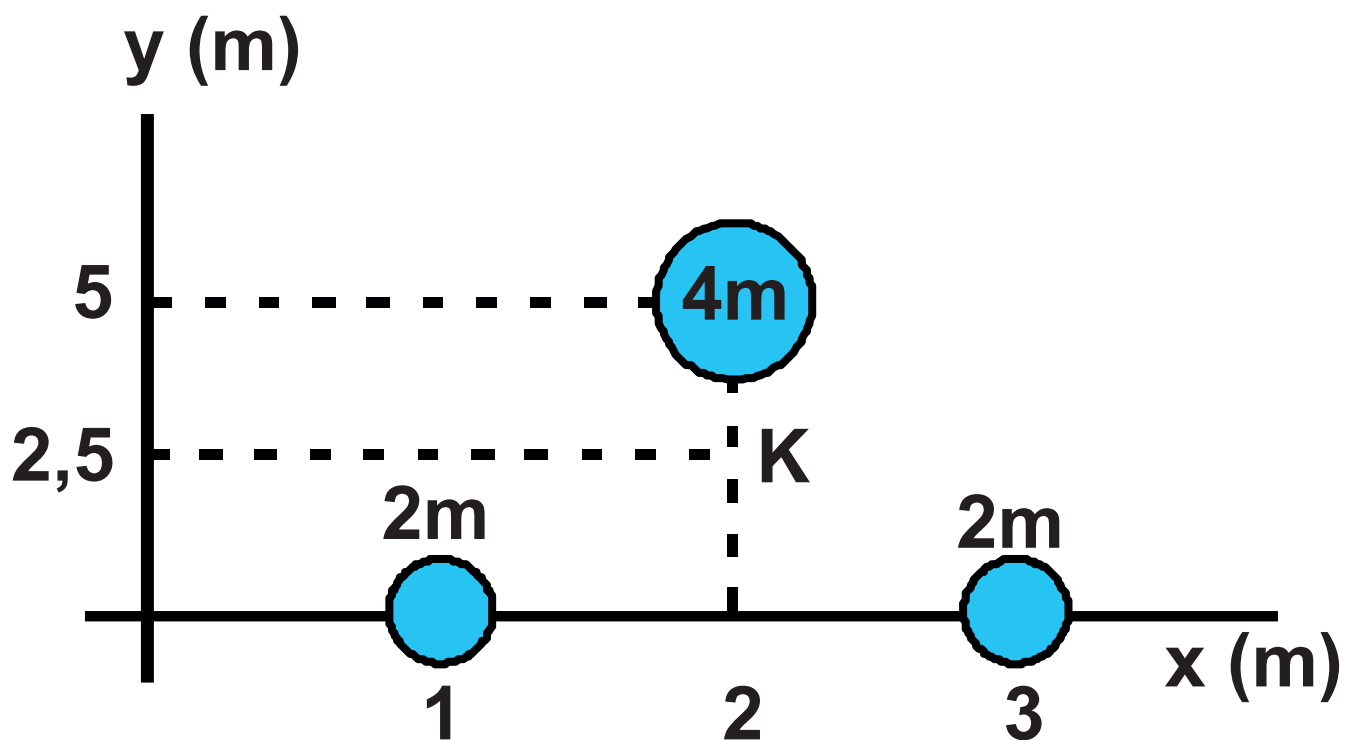


Τα θραύσματα κινούνται με τέτοιο τρόπο ώστε το κέντρο μάζας τους να ακολουθεί την τροχιά που θα ακολουθούσε και αν δεν είχε εκραγεί το πυροτέχνημα.

Εικόνα 5-6.

Παράδειγμα 5.6

Οι συντεταγμένες καθενός από τρία σώματα είναι $(1,0)$, $(3,0)$ και $(2,5)$ (σχ. 5.21). Οι μάζες των σωμάτων είναι $2m$, $2m$ και $4m$ αντίστοιχα. Να προσδιοριστεί η θέση του κέντρου μάζας του συστήματος.



Σχήμα 5-21.

Απάντηση:

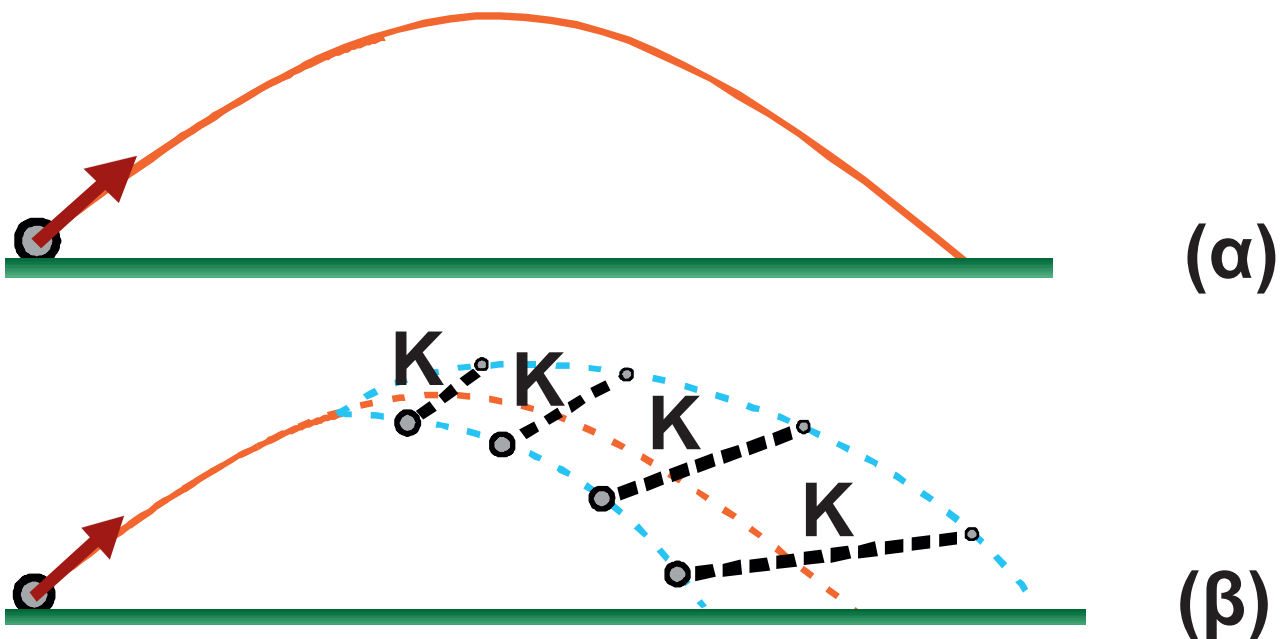
$$\begin{aligned}x_{cm} &= \frac{\sum m_i x_i}{M} = \\&= \frac{2m x_1 + 2m x_2 + 4m x_3}{2m + 2m + 4m} = \\&= \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 2}{8} m = \frac{16}{8} m = 2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{cm} &= \frac{\sum m_i y_i}{M} = \\&= \frac{2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 5}{8} m = \frac{20}{8} m = 2,5m\end{aligned}$$

Άρα το κέντρο μάζας **K** βρίσκεται στη θέση **(2, 2,5)**.

Παράδειγμα 5.7

Βλήμα βάλλεται με αρχική ταχύτητα u_0 υπό γωνία φ ως προς οριζόντιο επίπεδο. Υπό την επίδραση του βάρους του το βλήμα θα εκτελέσει παραβολική τροχιά και θα επιστρέψει στο οριζόντιο επίπεδο (σχ. 5.22α). Το βλήμα σε κάποιο σημείο της τροχιάς του εκρήγνυται και χωρίζεται σε δύο θραύσματα (σχ. 5.22β). Τι κίνηση θα κάνει το κέντρο μάζας του συστήματος των θραυσμάτων;



Σχήμα 5-22.

Απάντηση:

Η συνισταμένη δύναμη στο σύστημα των θραυσμάτων δηλαδή το διανυσματικό άθροισμα των βαρών τους είναι ίδια με το συνολικό βάρος του βλήματος. Η δύναμη λοιπόν που ασκείται στο κέντρο μάζας του συστήματος είναι ίδια πριν και μετά την έκρηξη, οπότε το κέντρο μάζας του συστήματος θα διαγράψει την ίδια τροχιά που θα διέγραφε και αν δεν είχε γίνει η έκρηξη.

Παράδειγμα 5.8

Κρατάμε δύο μικρές αντίθετα φορτισμένες σφαίρες ακίνητες σε απόσταση $\ell = 0,5 \text{ m}$ τη μία από την άλλη και στη συνέχεια τις αφήνουμε ελεύθερες να κινηθούν. Οι σφαίρες έχουν μάζες $m_1 = 0,001 \text{ kg}$ και $m_2 = 0,002 \text{ kg}$ και φορτία q και $-q$

αντίστοιχα. Αν στις σφαίρες δεν ασκούνται άλλες δυνάμεις εκτός από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις να βρεθεί σε πόση απόσταση από την αρχική θέση της m_1 θα συναντηθούν οι δύο σφαίρες.

Απάντηση:

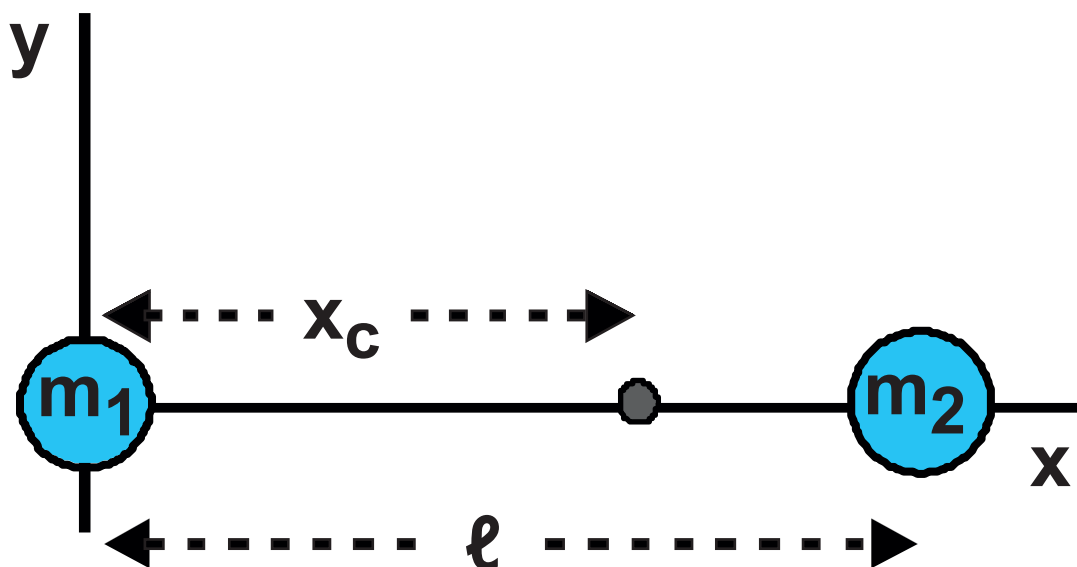
Επιλέγουμε σαν σύστημα συντεταγμένων αυτό του οποίου η αρχή ταυτίζεται με την αρχική θέση της m_1 και ο άξονας των x με τη διάκεντρο των δυο σφαιρών (σχ. 5.23). Η αρχική θέση της m_1 είναι στο $x_1 = 0$ και αυτή της m_2 στο $x_2 = \ell$.

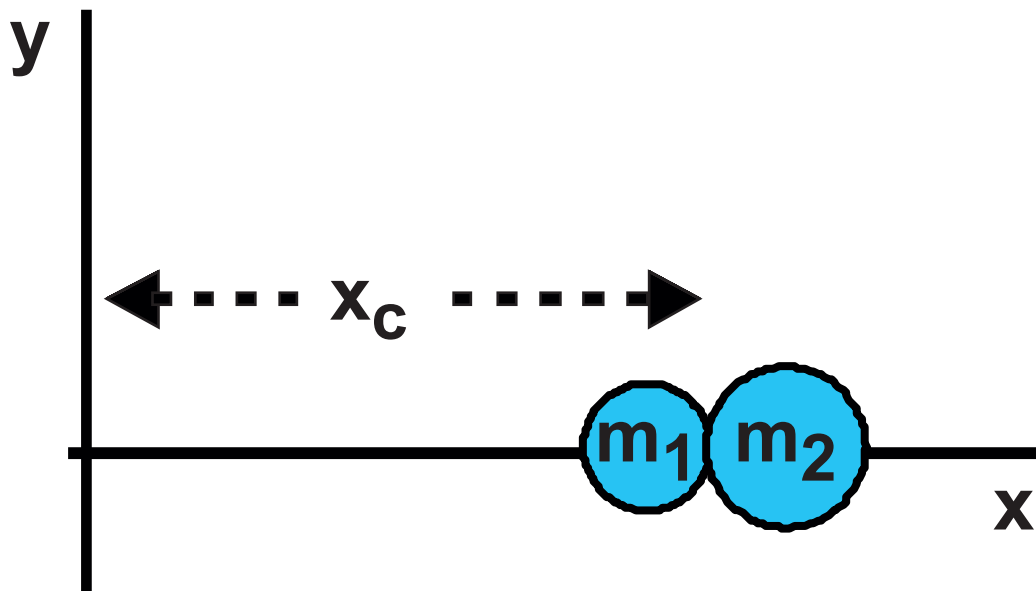
Το κέντρο μάζας των δύο σωμάτων βρίσκεται σε οριζόντια απόσταση από την αρχή των αξόνων

$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} = 0,33 m$$

Αρχικά τα σώματα είναι ακίνητα άρα και το κέντρο μάζας τους είναι ακίνητο.

Η συνισταμένη των δυνάμεων στο σύστημα είναι μηδέν, άρα η ορμή του πρέπει να διατηρείται και το κέντρο μάζας να διατηρεί την αρχική του κινητική κατάσταση δηλαδή να παραμένει ακίνητο σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης των σφαιρών. Οι σφαίρες θα συναντηθούν πάνω στο κέντρο μάζας τους, δηλαδή σε απόσταση **0,33 m** από την αρχική θέση της **m_1** .





Σχήμα 5-23.

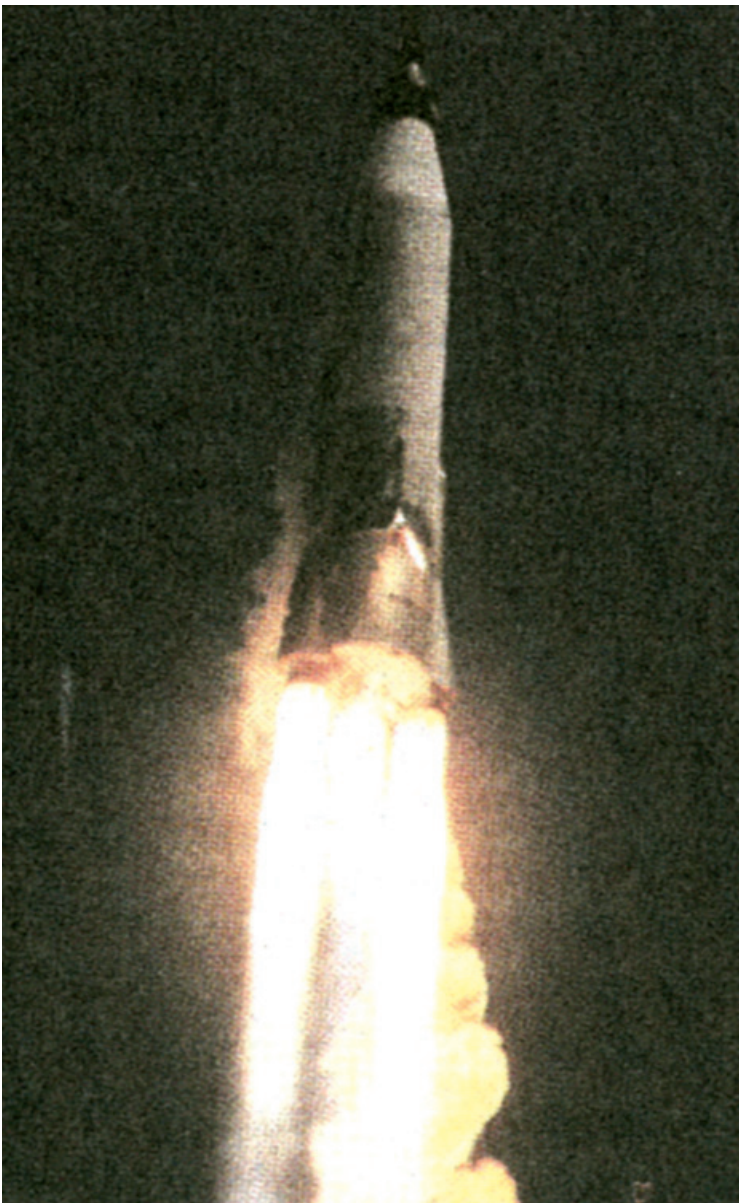
(5.8.) Προώθηση του Πυραύλου

Η προώθηση των πυραύλων στηρίζεται στην αρχή διατήρησης της ορμής.

Ο πύραυλος καίει τα καύσιμα που αρχικά βρίσκονται μέσα του και εκτοξεύει τα καυσαέρια προς τα πίσω. Τα καυσαέρια δέχονται μία δύναμη από τον πύραυλο και ασκούν αντίστοιχα μία αντίθετη δύναμη σ' αυτόν που

αποτελεί και την προωστική δύναμη του πυραύλου.

Ας υποθέσουμε ότι εξετάζουμε έναν πύραυλο που κινείται στο διάστημα (μακριά από κάθε βαρυτική έλξη).

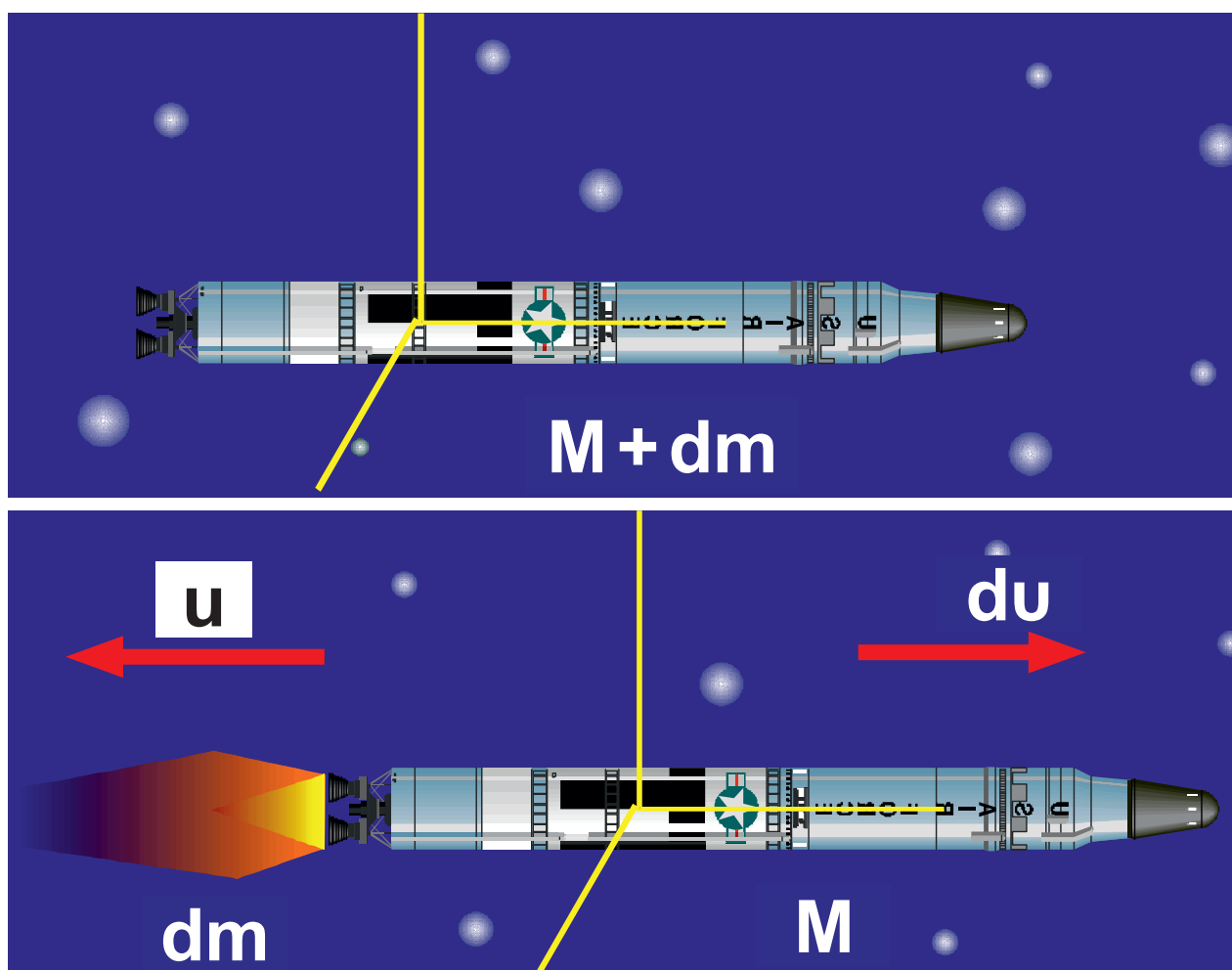


Ο πύραυλος προωθείται εκτοξεύοντας προς τα πίσω καυσαέρια.
Εικόνα 5-7.

Θα εφαρμόσουμε την ΑΔΟ ως προς το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Εφόσον δεν ασκούνται εξωτερικές δυνάμεις το κέντρο μάζας (άρα και το σύστημα αναφοράς μας) δε θα μεταβάλλει την κινητική του κατάσταση, ανεξάρτητα με οποιαδήποτε μεταβολή συμβεί στην κινητική κατάσταση των τμημάτων που απαρτίζουν το σύστημα. Επιλέγουμε τον άξονα x ώστε να ταυτίζεται με τη διεύθυνση κίνησης του πυραύλου.

Ο πύραυλος κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα $M + dm$ και μηδενική ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς που επιλέξαμε. Ο πύραυλος, σε ένα πολύ μικρό χρονικό διάστημα dt , εκτοξεύει προς τα πίσω μια ποσότητα καυσαερίων dm με ταχύτητα u ως προς το κέντρο μάζας.

Πρακτικά η ταχύτητα αυτή είναι και η ταχύτητα των καυσαερίων ως προς τον πύραυλο. Ο πύραυλος τώρα έχει αυξήσει την ταχύτητά του σε σχέση με πριν κατά du και η μάζα του έχει ελαττωθεί κατά dm . Ως προς το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται με du προς τα μπροστά. (Σχ. 5.24).



Σχήμα 5-24.

Εφόσον το σύστημα είναι μονωμένο εφαρμόζουμε την αρχή διατήρησης της ορμής με τις ταχύτητες να αναφέρονται όλες στο σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας.

$$p_{\text{πριν}} = p_{\text{μετά}} \quad \text{άρα} \quad 0 = -dmu + Mdu$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την προωστική δύναμη που δέχεται ο πύραυλος.

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει

$$Mdu = dm u$$

$$\text{και} \quad M \frac{du}{dt} = u \frac{dm}{dt} \quad \text{δηλαδή} \quad M a = u \frac{dm}{dt}$$

$$\text{και τελικά} \quad \boxed{F = u \frac{dm}{dt}}$$

όπου $\frac{dm}{dt}$ ο ρυθμός με τον οποίο εκτοξεύονται τα καυσάγια του πυραύλου.

(5.9.) Φαινόμενο Doppler

Εάν καθόμαστε ακίνητοι στην αποβάθρα ενός σταθμού την ώρα που πλησιάζει ένα τρένο κινούμενο με σταθερή ταχύτητα, ακούμε τον ήχο της σειρήνας του οξύτερο (μεγαλύτερης συχνότητας), από ό,τι όταν το τρένο απομακρύνεται από εμάς, αφού μας έχει προσπεράσει.

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός είναι σ' όλη τη διάρκεια της κίνησης σταθερή. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε όταν το τρένο μάς πλησιάζει είναι μεγαλύτερη από αυτήν που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός. Αντίθετα η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβανόμαστε όταν το τρένο απομακρύνεται είναι μικρότερη

από αυτήν που αντιλαμβάνεται ο μηχανοδηγός.

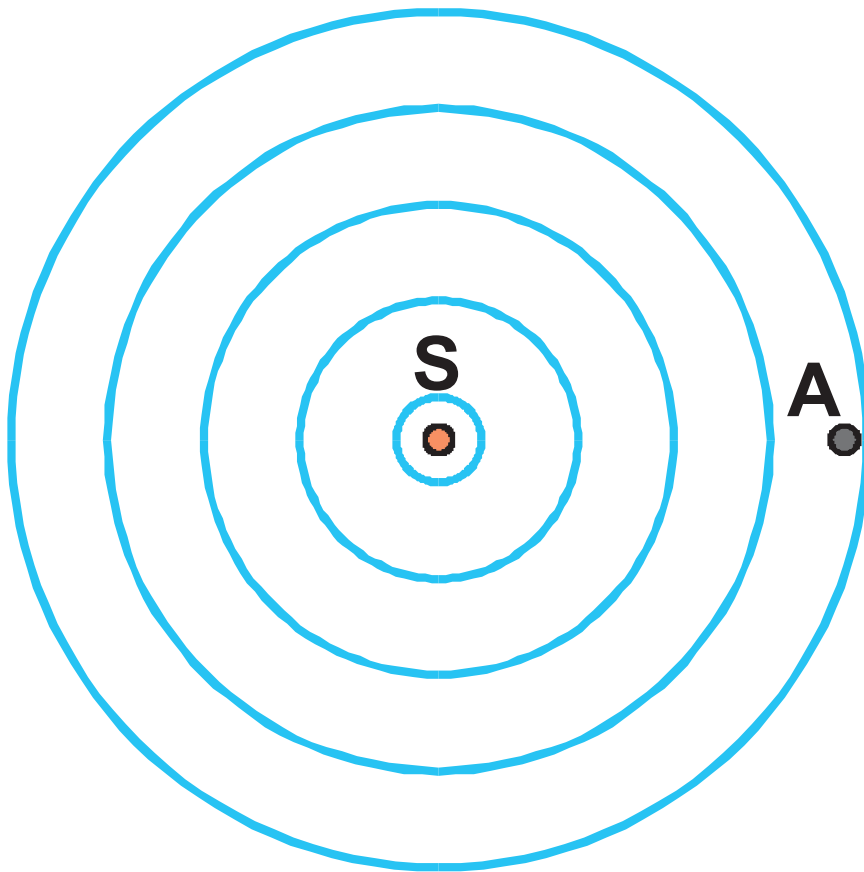
Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής δεν είναι ίδια με αυτήν που εκπέμπει μία πηγή όταν ο παρατηρητής και η πηγή βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό λέγεται φαινόμενο Doppler.

Ακίνητη πηγή - ακίνητος παρατηρητής

Μία ακίνητη ως προς το μέσον διάδοσης (αέρας) πηγή **S** που εκπέμπει ήχο συχνότητας **f_S** δημιουργεί γύρω της ένα σφαιρικό ηχητικό κύμα που διαδίδεται με ταχύτητα **u** .

Ισχύει **$f_S = \frac{u}{\lambda}$** όπου **λ** το μήκος κύματος του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

Στο **σχήμα 5.25** βλέπουμε ένα στιγμιότυπο του κύματος. Οι ομόκεντρες περιφέρειες παριστάνουν τα διαδοχικά μέγιστα του κύματος για μία δεδομένη στιγμή και απέχουν μεταξύ τους ένα μήκος κύματος λ . Ένας παρατηρητής **A** που είναι επίσης ακίνητος ως προς τον αέρα μετρώντας τα μέγιστα που φτάνουν σ' αυτόν στη μονάδα του χρόνου υπολογίζει τη συχνότητα του ήχου f_A όπως την αντιλαμβάνεται αυτός. Όμως όσα μέγιστα παράγει η πηγή στη μονάδα του χρόνου τόσα πάλι στη μονάδα του χρόνου φτάνουν στον παρατηρητή, άρα $f_A = f_S = \frac{v}{\lambda}$.



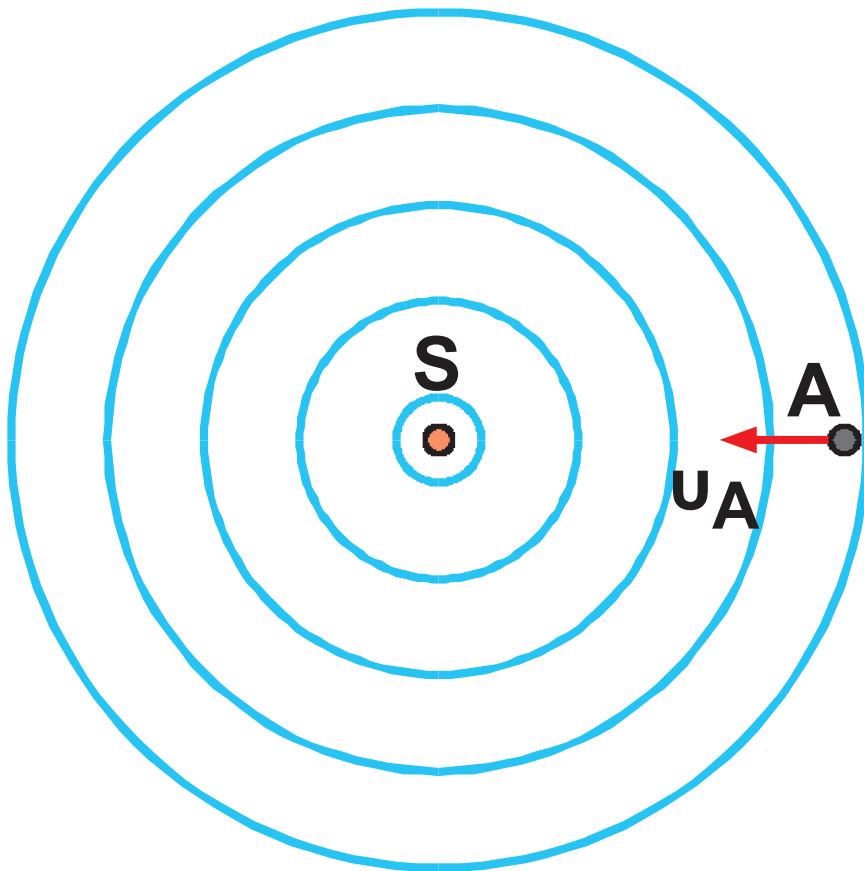
Σχήμα 5-25.

Ακίνητη πηγή - κινούμενος παρατηρητής

Ο παρατηρητής **A** πλησιάζει προς την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα u_A (σχ. 5.26). Τώρα στον παρατηρητή φτάνουν περισσότερα μέγιστα στη μονάδα του χρόνου από όσα παράγει στον ίδιο χρόνο η πηγή.

Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον παρατηρητή θα είναι $u + u_A$. Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής θα είναι

$$f_A = \frac{u + u_A}{\lambda}.$$



Σχήμα 5-26.

Αν θέσουμε όπου $\lambda = \frac{u}{f_s}$

προκύπτει $f_A = \frac{u + u_A}{\frac{u}{f_s}}$

και τελικά $f_A = \frac{u + u_A}{u} f_s$

Ο παρατηρητής ακούει ήχο μεγαλύτερης συχνότητας (οξύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή.

Αν ο παρατηρητής απομακρύνεται από την ακίνητη ηχητική πηγή με ταχύτητα u_A , στη μονάδα του χρόνου στον παρατηρητή φτάνουν λιγότερα μέγιστα από αυτά που παράγει η πηγή στον ίδιο χρόνο και η συχνότητα που θα αντιλαμβάνεται θα είναι

$$f_A = \frac{u - u_A}{u} f_s$$

Ο παρατηρητής ακούει ήχο μικρότερης συχνότητας (βαρύτερο) από αυτή που παράγει η πηγή.

Συνοψίζοντας τις δύο περιπτώσεις καταλήγουμε στη σχέση

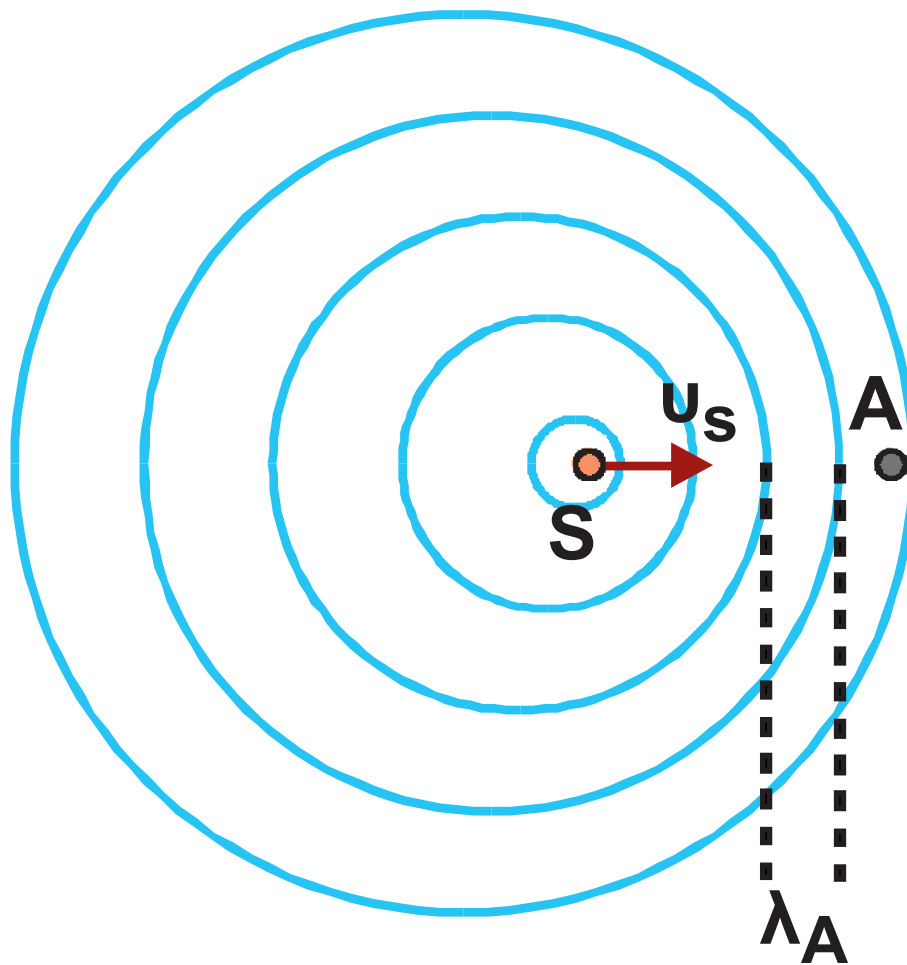
$$f_A = \frac{u \pm u_A}{u} f_s$$

όπου το (+) ισχύει όταν ο παρατηρητής πλησιάζει προς την πηγή και το (-) όταν απομακρύνεται από αυτή.

Κινούμενη πηγή - ακίνητος παρατηρητής

Υποθέτουμε τώρα ότι η πηγή κινείται ισοταχώς με ταχύτητα u_s πλησιάζοντας τον ακίνητο παρατηρητή (σχ. 5.27). Η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ο ήχος ως προς τον αέρα θα είναι πάλι u γιατί η ταχύτητα διάδοσης ενός κύματος εξαρτάται μόνο

από το μέσον διάδοσης. Το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή μικραίνει γιατί η πηγή ακολουθεί τα κύματα με αποτέλεσμα τα μέγιστα να πλησιάζουν μεταξύ τους.



Σχήμα 5-27.

Ο παρατηρητής **A** αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος την απόσταση μεταξύ δύο διαδοχικών μεγίστων

που φτάνουν σ' αυτόν. Ο χρόνος που μεσολαβεί ανάμεσα στην εκπομπή δύο μεγίστων είναι μία περίοδος (T). Αν τη στιγμή t η πηγή εκπέμπει ένα μέγιστο τη στιγμή $t + T$ το μέγιστο θα έχει πλησιάσει τον παρατηρητή κατά λ αλλά και η πηγή θα τον έχει πλησιάσει κατά $u_s T$. Τότε εκπέμπεται από την πηγή το επόμενο μέγιστο. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο διαδοχικά μέγιστα είναι $\lambda - u_s T$. Αυτή την απόσταση αντιλαμβάνεται ως μήκος κύματος ο παρατηρητής.

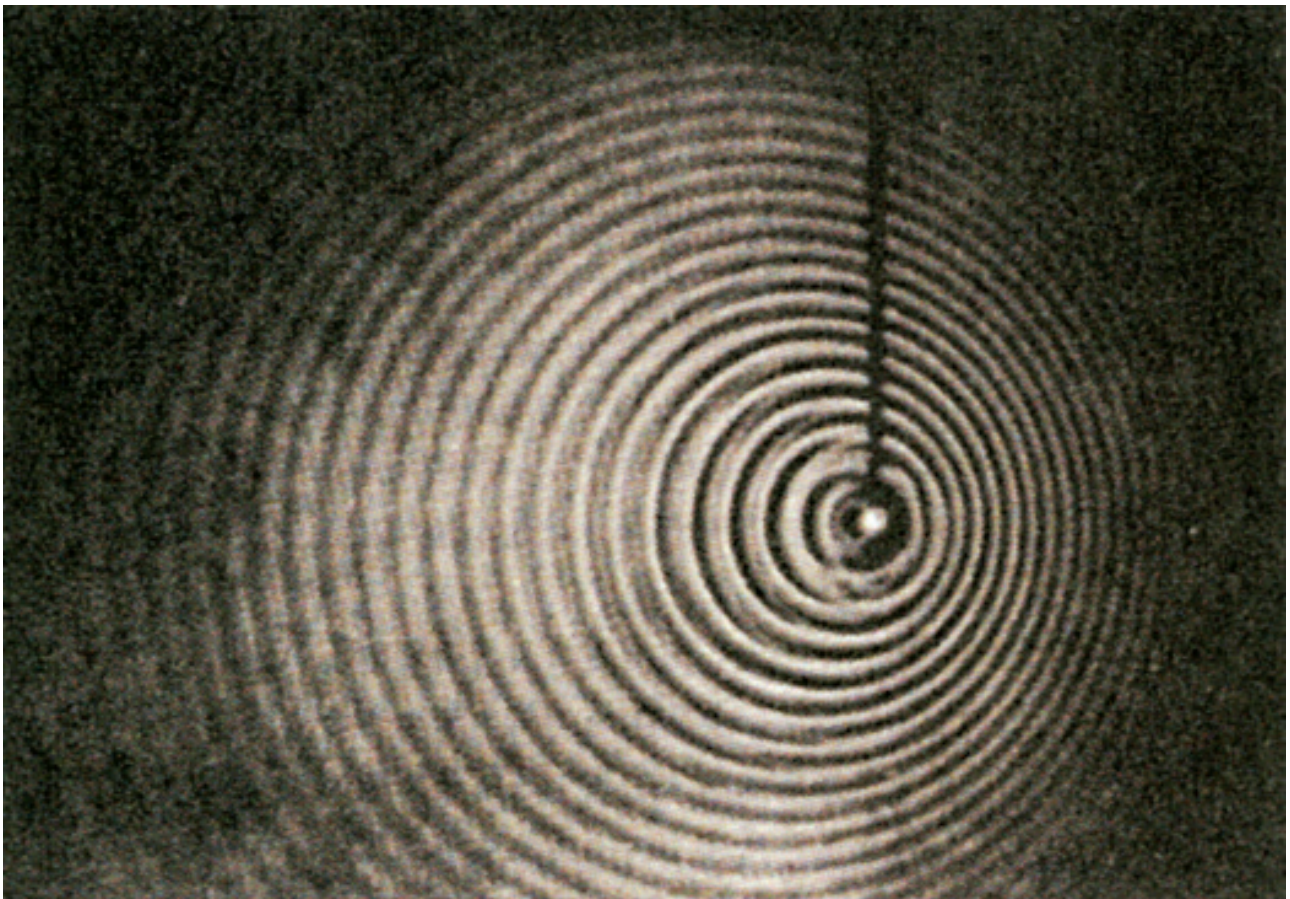
Επομένως $\lambda_A = \lambda - u_s T$

$$\text{ή } \lambda_A = \frac{u}{f_s} - \frac{u_s}{f_s} = \frac{u - u_s}{f_s}$$

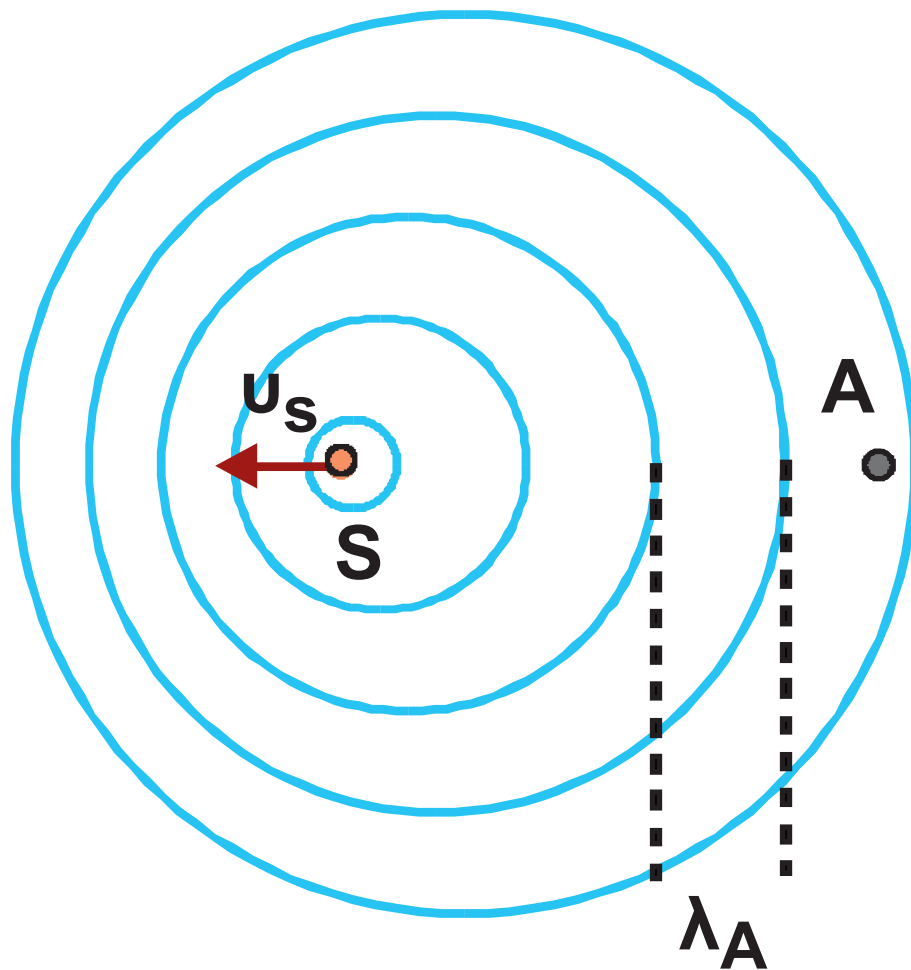
$$\text{όμως } f_A = \frac{u}{\lambda_A} = \frac{u}{\frac{u - u_s}{f_s}}$$

και τελικά $f_A = \left(\frac{u}{u - u_s} \right) f_s$

δηλαδή η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή.



Μία πηγή παράγει κύματα στην επιφάνεια υγρού και ταυτόχρονα κινείται.
Εικόνα 5-8.



Σχήμα 5-28.

Στην περίπτωση που η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή με σταθερή ταχύτητα u_s (σχ. 5.28), το μήκος κύματος που φτάνει στον παρατηρητή αυξάνεται κατά τον όρο $u_s T$. Επαναλαμβάνοντας τον προηγούμενο συλλογισμό καταλήγουμε

στη σχέση $f_A = \left(\frac{u}{u + u_s} \right) f_s$ από την οποία φαίνεται ότι η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι μικρότερη από τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.

Συνθέτοντας τις δύο περιπτώσεις κίνησης της πηγής σε μία σχέση έχουμε

$$f_A = \left(\frac{u}{u \mp u_s} \right) f_s$$

όπου το $(-)$ ισχύει όταν η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή και το $(+)$ όταν απομακρύνεται απ' αυτόν.

Εάν κινούνται τόσο η πηγή όσο και ο παρατηρητής σε σχέση με το μέσον διάδοσης τότε η σχέση που δίνει την συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$f_A = \left(\frac{u \pm u_A}{u \mp u_S} \right) f_s$$

Ο παρατηρητής ακούει ήχο με συχνότητα μεγαλύτερη από τη συχνότητα της πηγής όταν η μεταξύ τους απόσταση μειώνεται και με συχνότητα μικρότερη από τη συχνότητα της πηγής όταν η απόστασή τους μεγαλώνει.

Το φαινόμενο Doppler ισχύει για κάθε μορφής κύμανση ακόμη και για τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα, όπως το φως. Το φαινόμενο Doppler δίνει αισθητά αποτελέσματα μόνο αν οι πηγές του φωτός ή οι παρατηρητές κινούνται με ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός.

Παρατηρώντας το φως που

εκπέμπει ένα άστρο βλέπουμε ότι τα μήκη κύματος που εκπέμπονται από τα στοιχεία του άστρου είναι διαφοροποιημένα σε σχέση με τα μήκη κύματος που εκπέμπουν τα ίδια στοιχεία πάνω στη Γη. Από τη διαφοροποίηση αυτή, που οφείλεται στο φαινόμενο Doppler, βγάζουμε συμπεράσματα για την ταχύτητα με την οποία κινείται το άστρο σε σχέση με τη Γη.

Η σχέση που περιγράφει το φαινόμενο Doppler για το φως είναι διαφορετική από αυτήν στην οποία καταλήξαμε για τον ήχο. Η διαφοροποίηση οφείλεται στην ιδιαιτερότητα του φωτός, που θα τη μελετήσουμε εκτενέστερα στο επόμενο κεφάλαιο. Επιγραμματικά αναφέρουμε ότι το φως δεν χρειάζεται μέσον για να διαδοθεί και ότι η ταχύτητα διάδοσής του

είναι η ίδια για όλα τα συστήματα αναφοράς.

Η αστυνομία είναι εφοδιασμένη με συσκευές ραντάρ που ελέγχουν τις ταχύτητες των οχημάτων. Το ραντάρ, ακίνητο ως προς το δρόμο, εκπέμπει ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα το οποίο ανακλάται πάνω στο διερχόμενο όχημα. Το κύμα επιστρέφει στο ραντάρ με συχνότητα ελαφρά διαφορετική μια και η πηγή του (το όχημα) κινείται σε σχέση με τον παρατηρητή (ραντάρ). Από τη διαφορά της συχνότητας ανάμεσα στο κύμα που εκπέμπεται και αυτό που επιστρέφει η συσκευή υπολογίζει την ταχύτητα του οχήματος.

Παράδειγμα 5.9

Ένα τρένο κινείται ισοταχώς με ταχύτητα 50 m/s και χρησιμοποιεί

τη σφυρίχτρα του, που εκπέμπει συνεχώς ήχο συχνότητας **400 Hz**, σύμφωνα με το μηχανοδηγό του. Το τρένο περνάει από σταθμό χωρίς να σταματήσει. Τι συχνότητα αντιλαμβάνεται ο ακίνητος σταθμάρχης καθώς το τρένο πλησιάζει και τι συχνότητα καθώς το τρένο απομακρύνεται. Ο ήχος διαδίδεται στον αέρα με ταχύτητα **343 m/s**.

Απάντηση:

Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο σταθμάρχης, όταν το τρένο πλησιάζει το σταθμό είναι

$$f_A = \left(\frac{u}{u - u_s} \right) f_s$$

και όταν το τρένο απομακρύνεται από το σταθμό

$$f'_A = \left(\frac{u}{u + u_s} \right) f_s$$

$$\text{Άρα } f_A = \left(\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 50 \text{ m/s}} \right) 400 \text{ Hz} =$$
$$= 468 \text{ Hz}$$

$$\text{και } f'_A = \left(\frac{343 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 50 \text{ m/s}} \right) 400 \text{ Hz} =$$
$$= 349 \text{ Hz}$$

Παράδειγμα 5.10

Ένα περιπολικό που κινείται με ταχύτητα **140 km/h** εκπέμπει με τη σειρά του ήχο συχνότητας **500 Hz**. Ποια συχνότητα ακούει οδηγός αυτοκινήτου που κινείται στον ίδιο δρόμο, αντίθετα με το περιπολικό με

ταχύτητα **110 km/h**, α) όταν πλησιάζει στο περιπολικό και β) όταν απομακρύνεται από αυτό; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι **343 m/s**.

Απάντηση:

$$140 \text{ km/h} = 39,9 \text{ m/s}$$

$$110 \text{ km/h} = 30,6 \text{ m/s}$$

Όσο τα οχήματα πλησιάζουν το ένα το άλλο

$$f_A = \left(\frac{u + u_A}{u - u_S} \right) f_S$$

Άρα

$$f_A = \left(\frac{343 \text{ m/s} + 30,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} - 39,9 \text{ m/s}} \right) 500 \text{ Hz} =$$
$$= 616,3 \text{ Hz}$$

Όταν τα οχήματα απομακρύνονται μεταξύ τους

$$f_A = \left(\frac{u - u_A}{u + u_S} \right) f_s$$

$$\text{Άρα } f_A = \left(\frac{343 \text{ m/s} - 30,6 \text{ m/s}}{343 \text{ m/s} + 39,9 \text{ m/s}} \right) 500 \text{ Hz}$$
$$= 408 \text{ Hz}$$

Σύνοψη

Κατά τη διάρκεια μιας κρούσης η ορμή των σωμάτων που συγκρούονται διατηρείται.

Ανάλογα με τις διευθύνσεις των ταχυτήτων των σωμάτων που συγκρούονται οι κρούσεις διακρίνονται ως **κεντρικές, έκκεντρες και πλάγιες.**

Στην **ελαστική** κρούση η κινητική ενέργεια του συστήματος διατηρείται. Στην **ανελαστική** κρούση μέρος της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετατρέπεται σε θερμότητα.

Αδρανειακά συστήματα ονομάζονται τα συστήματα αναφοράς στα οποία ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι και αυτό αδρανειακό.

Τα συστήματα αναφοράς στα οποία δεν ισχύει ο νόμος της αδράνειας του Newton ονομάζονται **μη αδρανειακά συστήματα**.

Ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με επιτάχυνση σε σχέση με ένα αδρανειακό σύστημα είναι μη αδρανειακό σύστημα.

Ένα σύστημα αναφοράς Σ' κινείται ισοταχώς με ταχύτητα u ως προς άλλο σύστημα αναφοράς Σ . Η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση ενός σώματος, καθώς και η δύναμη που δέχεται το σώμα όπως γίνονται αντιληπτές από παρατηρητή που είναι ακίνητος στο Σ σε σχέση με αυτές που αντιλαμβάνεται παρατηρητής ακίνητος στο Σ' δίνονται από τους μετασχηματισμούς του Γαλιλαίου:

$$x = x' + u_x t$$

$$u_x = u_x' + u_x$$

$$y = y' + u_y t$$

$$u_y = u_y' + u_y$$

$$a = a'$$

$$F = F'$$

Το κέντρο μάζας ενός συστήματος σωμάτων έχει συντεταγμένες

$$x_{cm} = \frac{\sum m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{\sum m_i y_i}{M}$$

$$z_{cm} = \frac{\sum m_i z_i}{M}$$

Αν ένα σύστημα σωμάτων είναι μονωμένο το κέντρο μάζας του κινείται με σταθερή ταχύτητα.

Ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο το κέντρο μάζας συστήματος σωμάτων είναι ακίνητο ονομάζεται **σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας. Αν το σύστημα των**

σωμάτων είναι μονωμένο το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας είναι αδρανειακό σύστημα.

Η προωστική δύναμη ενός πυραύλου δίνεται από τη σχέση

$$F = u \frac{dm}{dt}$$

όπου u η ταχύτητα με την οποία εκπέμπονται τα καυσαέρια ως προς τον πύραυλο και $\frac{dm}{dt}$ ο ρυθμός εκπομπής των καυσαερίων.

Φαινόμενο Doppler λέγεται το φαινόμενο κατά το οποίο ένας παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα διαφορετική από αυτήν που εκπέμπει μια πηγή κύματος λόγω της σχετικής κίνησης μεταξύ τους.

Εάν κινούνται τόσο η πηγή όσο

και ο παρατηρητής σε σχέση με το μέσον διάδοσης η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής είναι

$$f_A = \left(\frac{u \pm u_A}{u \mp u_S} \right) f_S$$

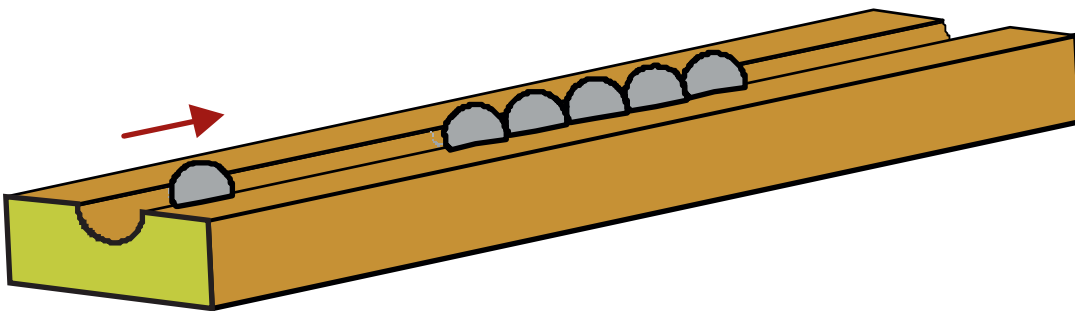
Όταν μειώνεται η απόσταση πηγής - παρατηρητή η συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής είναι μεγαλύτερη από αυτήν που εκπέμπει η πηγή, ενώ όταν αυξάνεται η μεταξύ τους απόσταση η παρατηρούμενη συχνότητα είναι μικρότερη της εκπεμπόμενης.

Δραστηριότητες

1. Κρούση σφαιρών

Θα χρειαστείτε έξι ίδιες μπίλιες και ένα λούκι - οδηγό (μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και ένα σχολικό χάρακα με λούκι).

Τοποθετήστε τις πέντε μπίλιες στο λούκι -οδηγό, τη μια δίπλα στην άλλη, ώστε να εφάπτονται. Ρίξτε την έκτη μπίλια με φόρα, όπως δείχνει το **σχήμα 5.29**. Θα δείτε ότι η μπίλια που ρίξατε ακινητοποιείται μετά την κρούση και ότι η τελευταία στη σειρά από τις ακίνητες εκτοξεύεται. Πώς εξηγείται αυτό που είδατε;



Σχήμα 5-29.

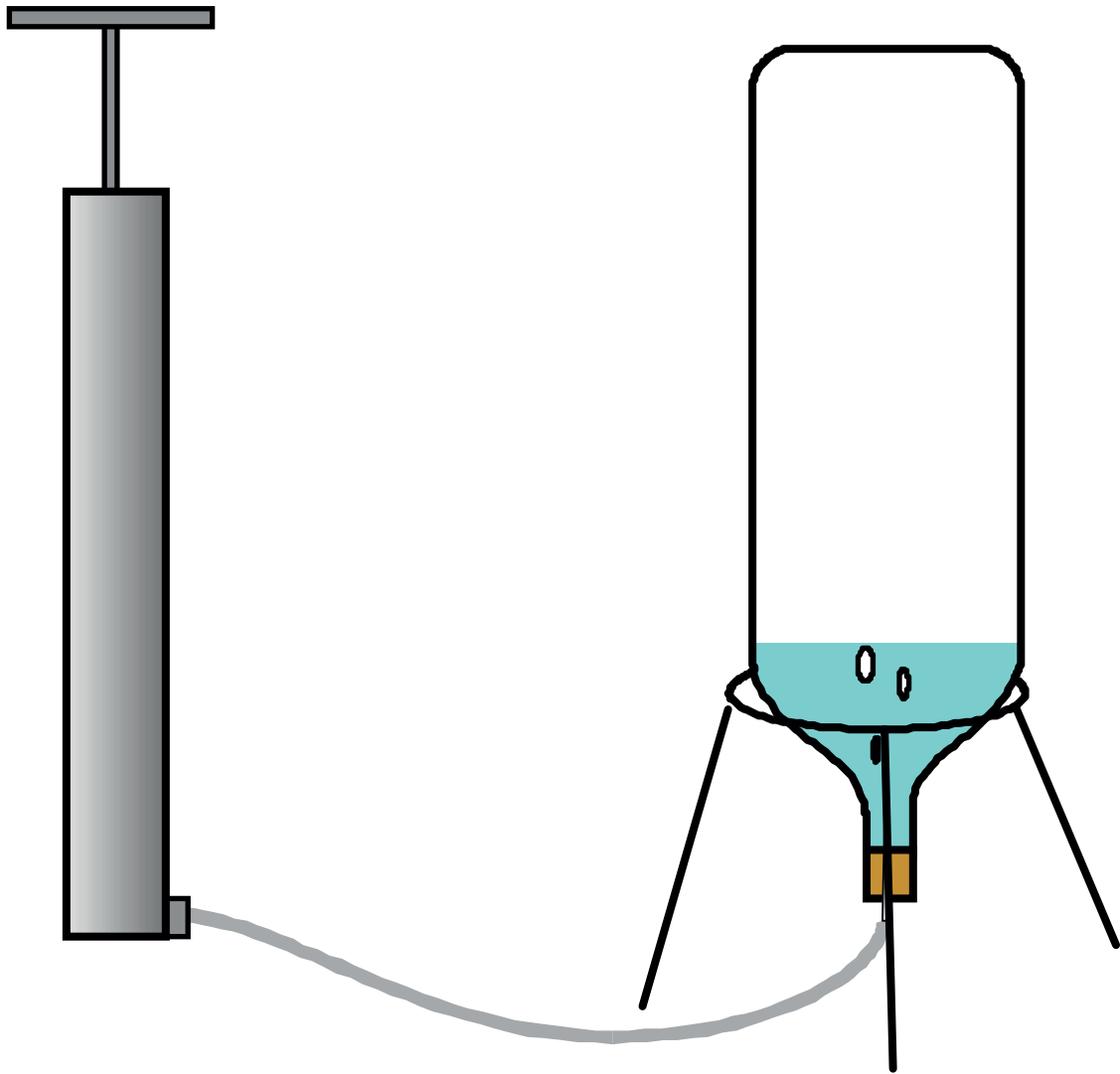
2. Εκτόξευση «πυραύλου»

Θα χρειαστείτε: μια τρόμπα ποδηλάτου με σωλήνα, μια βελόνα τρόμπας, σαν αυτές που χρησιμοποιούμε για να φουσκώσουμε τις μπάλες, ένα πλαστικό μπουκάλι του λίτρου από αναψυκτικό, ένα φελλό, ένα λεπτό τρυπάνι.

Ανοίξτε μια τρύπα στο φελλό με το τρυπάνι, τέτοιας διαμέτρου ώστε να περνάει η βελόνα της τρόμπας και να σφηνώνει. Γεμίστε το μπουκάλι κατά το ένα τέταρτο με νερό, κλείστε το με τον φελλό και συνδέστε το με την τρόμπα όπως στο **σχήμα 5.30**. Αρχίστε να τρομπάρετε. Ο φελλός γρήγορα θα εκτιναχθεί προς τα κάτω, ενώ το μπουκάλι θα εκτοξευτεί προς τα πάνω.

Κάντε το πείραμα σε ανοιχτό χώρο, μακριά από κτίρια και καλώδια

της ΔΕΗ. Την ώρα που τρομπάρετε κρατήστε μια απόσταση ασφαλείας.



Σχήμα 5-30.

3. Φαινόμενο Doppler

Θα χρειαστείτε: ένα ποδήλατο μια σφυρίχτρα, και... ένα φίλο σας.

Ζητήστε από το φίλο σας να περάσει από μπροστά σας οδηγώντας αργά το ποδήλατο και σφυρίζοντας συνέχεια. Παρατηρείτε κάποια μεταβολή στη συχνότητα του ήχου;

Ζητήστε τώρα από το φίλο σας να επαναλάβει το ίδιο οδηγώντας όσο μπορεί πιο γρήγορα. Παρατηρείτε τώρα κάποια αυξομείωση στη συχνότητα του ήχου; Πού οφείλεται η διαφορά ανάμεσα στην πρώτη παρατήρηση και τη δεύτερη;



Πολύ ενδιαφέρον το φαινόμενο Doppler!
Εικόνα 5-9.

Ερωτήσεις

Κρούσεις

- 5.1** Μπορεί ένα σύστημα σωμάτων να έχει κινητική ενέργεια χωρίς να έχει ορμή;
Ισχύει το ίδιο και στην περίπτωση ενός σώματος;
- 5.2** Συμπληρώστε τα κενά: Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 3 \text{ kg}$, που κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις και συγκρούονται πλαστικά, έχουν πριν τη σύγκρουσή τους ταχύτητες $u_1 = 3 \text{ m/s}$ και $u_2 = 3 \text{ m/s}$. Η ορμή της πρώτης σφαίρας πριν τη σύγκρουση έχει μέτρο..... kg m/s και της δεύτερης kg m/s . Η ορμή του συστήματος των δύο

σφαιρών πριν την κρούση έχει μέτρο.....**kg m/s** και μετά την κρούση.....**kg m/s**.

5.3 Ποιο από τα παρακάτω μεγέθη διατηρείται σε κάθε κρούση;

α) Η κινητική ενέργεια συστήματος.

β) Η μηχανική ενέργεια.

γ) Η ορμή του.

Επιλέξτε το σωστό.

5.4 Κατά την ελαστική κρούση δύο σωμάτων

α) η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή.

β) η κινητική ενέργεια κάθε σώματος παραμένει σταθερή.

γ) η κινητική ενέργεια του συστήματος αυξάνεται.

δ) η κινητική ενέργεια του συστήματος μειώνεται.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.

5.5 Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η μηχανική ενέργεια του συστήματος

α) παραμένει σταθερή.

β) αυξάνεται.

γ) μειώνεται.

Επιλέξτε το σωστό.

5.6 Δύο σφαίρες ίσων μαζών κινούνται πάνω στην ίδια ευθεία και κατά την ίδια φορά με ταχύτητες $u_1 = 10 \text{ m/s}$ και $u_2 = 20 \text{ m/s}$. Αν μετά την κρούση η σφαίρα 1 έχει ταχύτητα $u_1' = 16 \text{ m/s}$ τι συμπέρασμα βγάζεται για την κρούση; Είναι ελαστική ή όχι;

5.7 Μια **σφαίρα A** συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητη **σφαίρα B**, ίσης μάζας. Η ταχύτητα της **σφαίρας A** μετά την κρούση

α) θα είναι ίση με την ταχύτητα που είχε πριν την κρούση.

β) θα είναι αντίθετη της ταχύτητας που είχε πριν την κρούση.

γ) θα είναι ίση με την ταχύτητα που θα αποκτήσει η **σφαίρα B**.

δ) θα μηδενιστεί.

Επιλέξτε τη σωστή πρόταση.

5.8 Ποιες από τις προτάσεις που ακολουθούν είναι σωστές;

α) Στις μετωπικές κρούσεις δύο σφαιρών οι ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση έχουν την ίδια διεύθυνση.

β) Κατά την ελαστική κρούση

δύο σφαιρών η μηχανική ενέργεια του συστήματος διατηρείται σταθερή.

γ) Κατά την πλαστική κρούση δύο σωμάτων η ενέργεια του συστήματος μεταβάλλεται.

δ) Αν η μετωπική κρούση δύο σφαιρών με ίσες μάζες είναι ελαστική, οι σφαίρες ανταλλάσσουν ταχύτητες.

5.9 Σώμα μάζας m κινείται οριζόντια με ταχύτητα u . Στην πορεία του συγκρούεται ελαστικά με κατακόρυφο τοίχο. Η μεταβολή στην ορμή του σώματος έχει μέτρο:

α) 0 ; β) $m \frac{u}{2}$; γ) mu ; δ) $2mu$;

Συστήματα αναφοράς

5.10 Ένας άνθρωπος που είναι ακίνητος μέσα σε τρένο το οποίο κινείται με σταθερή οριζόντια ταχύτητα, ρίχνει κατακόρυφα προς τα πάνω ένα μικρό αντικείμενο. Περιγράψτε την τροχιά του σώματος όπως την αντιλαμβάνεται ο άνθρωπος που το έριξε και όπως την αντιλαμβάνεται ένας ακίνητος παρατηρητής που βρίσκεται στο σταθμό.

5.11 Εάν θεωρήσουμε τη Γη αδρανειακό σύστημα ποια από τα παρακάτω συστήματα αναφοράς είναι επίσης αδρανειακά;

α) Ένα τρένο που κινείται ευθύγραμμα ομαλά.

β) Ένας δίσκος που περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή

ταχύτητα γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο του.

γ) Ένας ανεγκυστήρας που κάνει ελεύθερη πτώση.

δ) Η Σελήνη.

5.12 Αδρανειακό σύστημα ονομάζεται το σύστημα αναφοράς στο οποίο

α) ένα σώμα φαίνεται ακίνητο.

β) η κίνηση του σώματος περιγράφεται με τον πιο απλό τρόπο.

γ) κάθε σώμα κινείται με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με οποιοδήποτε άλλο σύστημα αναφοράς.

δ) ισχύει ο πρώτος νόμος του Newton.

Επιλέξτε το σωστό.

5.13 Ένα τρένο κινείται με ταχύτητα u . Ένας επιβάτης κινείται από το πρώτο προς το τελευταίο βαγόνι του τρένου με ταχύτητα u , ως προς το τρένο. Τι ταχύτητα έχει ο επιβάτης ως προς το έδαφος;

5.14 Πλοίο **A** κινείται με ταχύτητα u . Από το ραντάρ του πλοίου γίνεται αντιληπτό άλλο πλοίο (**B**) που κινείται ως προς το πρώτο με ταχύτητα u , σε κάθετη διεύθυνση. Ποιο το μέτρο της ταχύτητας του πλοίου **B** ως προς την ακτή;

5.15 Ένας παρατηρητής, ακίνητος στο αδρανειακό σύστημα Σ , παρατηρεί σώμα μάζας m που επιταχύνεται. Από αδρανειακό σύστημα Σ' που κινείται ως

προς το πρώτο με ταχύτητα u δεύτερος παρατηρητής, ακίνητος ως προς το Σ' , παρατηρεί επίσης το σώμα m . Για ποια από τα παρακάτω μεγέθη συμφωνούν οι δύο αδρανειακοί παρατηρητές: α) για τη θέση του σώματος; β) για την ταχύτητά του; γ) για την επιτάχυνσή του; δ) για τη δύναμη που δέχεται το σώμα; ε) για την ορμή του; στ) για το ρυθμό με τον οποίο μεταβάλλεται η ορμή του; ζ) για την κινητική του ενέργεια;

5.16 Αν η ορμή συστήματος σωμάτων διατηρείται ως προς το αδρανειακό σύστημα Σ , θα διατηρείται και ως προς κάθε άλλο αδρανειακό σύστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5.17 Το σύστημα αναφοράς του κέντρου μάζας ενός συστήματος σωμάτων είναι πάντα αδρανειακό σύστημα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

5.18 Η προώθηση του πυραύλου στηρίζεται

α) στην αρχή διατήρησης της ενέργειας.

β) στο νόμο δράσης - αντίδρασης.

γ) στην αρχή διατήρησης της ορμής.

δ) στην αρχή διατήρησης της στροφορμής.

Επιλέξτε τις σωστές απαντήσεις.

Φαινόμενο Doppler

5.19 Στις σχέσεις που περιγράφουν το φαινόμενο Doppler οι ταχύτητες αναφέρονται

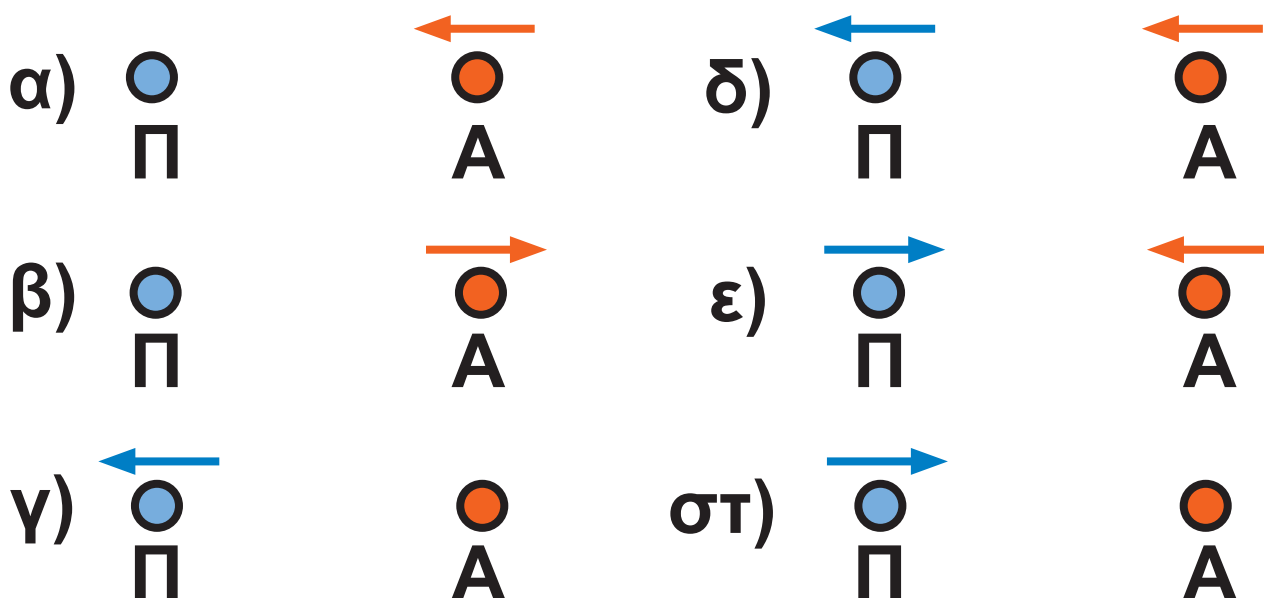
α) στο σύστημα αναφοράς της πηγής.

β) στο σύστημα αναφοράς του παρατηρητή.

γ) στο σύστημα αναφοράς του μέσου διάδοσης.

Επιλέξτε το σωστό.

5.20 Στο **σχήμα 5.31** το γράμμα **Π** αναφέρεται σε μια πηγή αρμονικού ήχου και το γράμμα **A** στον παρατηρητή. Να συγκρίνετε σε κάθε περίπτωση τη συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται ο παρατηρητής με τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει η πηγή.



Σχήμα 5-31.

5.21 Ένα τρένο εκπέμπει ήχο και κατευθύνεται προς τούνελ που βρίσκεται σε κατακόρυφο βράχο. Ο ήχος που εκπέμπεται από το τρένο ανακλάται στο βράχο.

α) Ο μηχανοδηγός του τρένου ακούει τον ήχο που προέρχεται από ανάκλαση με συχνότητα μεγαλύτερη μικρότερη ή ίση με

τη συχνότητα του ήχου που εκπέμπει το τρένο;

β) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται μεταξύ του τρένου και του εμποδίου ακούει τον ήχο που προέρχεται από το τρένο και τον ήχο που φτάνει από ανάκλαση. Οι συχνότητες των δύο ήχων όπως τους αντιλαμβάνεται είναι ίσες; Αν όχι, ποιος από τους ήχους που ακούει έχει μεγαλύτερη συχνότητα;

γ) Ένας παρατηρητής που βρίσκεται κοντά στις γραμμές και πίσω από το τρένο ακούει και αυτός δύο ήχους. Οι συχνότητες των δύο ήχων που ακούει είναι ίσες; Αν όχι, ποιος από τους ήχους έχει μεγαλύτερη συχνότητα;

Ασκήσεις

Κρούσεις

5.22 Βλήμα μάζας $m = 0,4 \text{ kg}$ κινείται οριζόντια με ταχύτητα $u_1 = 400 \text{ m/s}$. Το βλήμα στην πορεία του συναντάει σώμα μάζας $M = 2 \text{ kg}$ που ήταν ακίνητο σε οριζόντιο επίπεδο, το διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $u_2 = 300 \text{ m/s}$. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης του σώματος M , με το οριζόντιο επίπεδο είναι $0,5$. Να υπολογίσετε:

- την ταχύτητα του σώματος M , αμέσως μετά την κρούση.
- τη μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση.
- το διάστημα που θα διανύσει το M μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 20 m/s, 13.600J, 40m]

5.23 Σώμα μάζας m που κινείται με ταχύτητα $u = 12 \text{ m/s}$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με ακίνητο σώμα τριπλάσιας μάζας. Να υπολογιστούν οι ταχύτητες των σωμάτων μετά την κρούση.

[Απ: 6 m/s, 6m/s αντίθετων κατευθύνσεων]

5.24 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 10 \text{ kg}$ και $m_2 = 20 \text{ kg}$ κινούνται με αντίθετη φορά πάνω στην ίδια ευθεία με ταχύτητες $u_1 = 3 \text{ m/s}$ και $u_2 = 2 \text{ m/s}$, αντίστοιχα, και συγκρούονται πλαστικά. Να βρείτε

την ταχύτητα του συσσωματώματος και το ποσοστό της κινητικής ενέργειας του συστήματος που χάθηκε κατά την κρούση.

[Απ: 0,33 m/s, 98%]

5.25 Σφαίρα (1) μάζας $m_1 = 1 \text{ kg}$ προσπίπτει με ταχύτητα u_1 σε ακίνητη σφαίρα (2) και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Μετά την κρούση η (1) κινείται με ταχύτητα μέτρου $u_1' = \frac{u_1}{3}$.

Ποια πρέπει να είναι η μάζα m_2 της σφαίρας (2) ώστε

α) Η u_1' να είναι ομόρροπη της u_1 . β) Η u_1' να είναι αντίρροπη της u_1 .

[Απ: 0,5 kg, 2 kg]

5.26 Σφαίρα μάζας $m_1 = 2\text{Kg}$ που κινείται με ταχύτητα $u_1 = 4\text{ m/s}$ συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλη σφαίρα μάζας $m_2 = 4\text{ kg}$ που κινείται αντίθετα με ταχύτητα $u_2 = 5\text{ m/s}$. Να υπολογίσετε τις ταχύτητες των σωμάτων μετά τη σύγκρουση.

[Απ: 8 m/s , 1 m/s]

5.27 Σφαίρα μάζας m_1 πέφτει με ταχύτητα u_1 σε ακίνητη σφαίρα μάζας m_2 και συγκρούεται ελαστικά και κεντρικά με αυτή. Ποια πρέπει να είναι η σχέση μεταξύ των m_1 και m_2 ώστε μετά την κρούση η σφαίρα m_2 να έχει μέγιστη κινητική ενέργεια;

[Απ: $m_1 = m_2$]

5.28 Όταν ένα κινούμενο νετρόνιο συγκρουστεί με ακίνητο πυρήνα χάνει μέρος της κινητικής του ενέργειας και επιβραδύνεται. Τι ποσοστό της κινητικής του ενέργειας χάνει το νετρόνιο αν συγκρουστεί α) με πυρήνα πρωτίου $\left({}_1^1\text{H} \right)$, β) με πυρήνα δευτερίου $\left({}_1^2\text{H} \right)$ και γ) με πυρήνα ηλίου $\left({}_2^4\text{He} \right)$; Οι κρούσεις θεωρούνται ελαστικές.

[Απ: 100%, 88,9%, 64%]

5.29 Δύο σφαίρες με μάζες $m_1 = 6 \text{ kg}$ και $m_2 = 4 \text{ kg}$, κινούνται στο οριζόντιο επίπεδο, με ταχύτητες $u_1 = 8 \text{ m/s}$ και $u_2 = 9 \text{ m/s}$ κάθετες

μεταξύ τους, και συγκρούονται πλαστικά. Να υπολογίσετε:

α) την κοινή τους ταχύτητα μετά την κρούση.

β) τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

[Απ: 6 m/s , $\epsilon\varphi\theta = \frac{3}{4}$, -174J]

5.30 Ξύλινη πλάκα με μάζα $M = 5 \text{ kg}$ είναι δεμένη από σκοινί και κρέμεται κατακόρυφα. Ένα βλήμα με μάζα $m = 50 \text{ g}$ και οριζόντια ταχύτητα $u_1 = 520 \text{ m/s}$, χτυπά την πλάκα στο κέντρο της τη διαπερνά και βγαίνει με ταχύτητα $u_2 = 80 \text{ m/s}$. Η απόσταση του κέντρου της πλάκας από το σημείο όπου είναι δεμένο το σκοινί είναι $\ell = 2 \text{ m}$. Πόσο

θα εκτραπεί το σκοινί από την κατακόρυφη θέση; Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Θεωρήστε ότι η πλάκα αρχίζει να κινείται όταν την έχει διαπεράσει το βλήμα.

[Απ: περίπου 60°]

Κινήσεις σε αδρανειακά συστήματα

5.31 Ένα ποταμόπλοιο κινείται με ταχύτητα $u = 20 \text{ km/h}$ ως προς το νερό. Το ρεύμα του ποταμού έχει ταχύτητα 5 km/h . Σε πόσο χρόνο θα κάνει το ποταμόπλοιο τη διαδρομή **ABA**, όπου **A** και **B** δυο πόλεις που απέχουν 24 km μεταξύ τους;

[Απ: $2,56 \text{ h}$]

5.32 Ο πιλότος ενός αεροπλάνου που κινείται βόρεια με ταχύτητα 400 m/s , αντιλαμβάνεται με το ραντάρ του ένα άλλο αεροπλάνο που κινείται ανατολικά με ταχύτητα 300 m/s . Ποια είναι η ταχύτητα του δεύτερου αεροπλάνου ως προς τη Γη;

[Απ: 500 m/s , $\epsilon\phi\theta = \frac{4}{3}$]

5.33 Σε αδρανειακό σύστημα Σ ένας παρατηρητής παρατηρεί το φαινόμενο της κρούσης ενός σώματος μάζας $m = 2 \text{ kg}$ που κινείται κατά τη διεύθυνση x , με ταχύτητα $u = 6 \text{ m/s}$ και συγκρούεται πλαστικά με άλλο ακίνητο σώμα μάζας $M = 4 \text{ kg}$. α) Υπολογίστε την ταχύτητα του συσσωματώματος που προκύπτει από

την κρούση, όπως τη μετράει ο παρατηρητής στο Σ . β) Δείξτε ότι και ένας παρατηρητής που κινείται κατά την διεύθυνση x με ταχύτητα $u = 2 \text{ m/s}$, παρόλο που αντιλαμβάνεται διαφορετικά τις ταχύτητες των σωμάτων πριν και μετά την κρούση, συμφωνεί με τον πρώτο ότι η ορμή διατηρείται.

[Απ: 2 m/s]

Κέντρο μάζας - Σχετικές κινήσεις

5.34 Τρεις ομογενείς σφαίρες έχουν μάζες 20 kg , 20 kg , και 30 kg και τα κέντρα τους στα σημεία $(1,1)$, $(2,2)$ και $(3,1)$ του επιπέδου xy . Να προσδιοριστούν οι συντεταγμένες του κέντρου

μάζας του συστήματος των σφαιρών.

$$[\text{Απ: } \left(\frac{15}{7}, \frac{9}{7} \right)]$$

5.35 Λέμε συχνά ότι η Γη περιστρέφεται γύρω από τον Ήλιο. Το ακριβές είναι ότι η Γη και ο Ήλιος περιστρέφονται γύρω από το κέντρο μάζας τους. Να βρείτε σε πόση απόσταση από το κέντρο του Ήλιου βρίσκεται το κέντρο μάζας του συστήματος Γη - Ήλιος και να συγκρίνετε την απόσταση αυτή με την ακτίνα του Ήλιου. Δίνονται η μάζα της Γης $m_{\Gamma} = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$, η μάζα του Ήλιου $m_{\text{H}} = 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$, η ακτίνα του Ήλιου $R_{\text{H}} = 6,96 \times 10^8 \text{ m}$

και η διάκεντρος Γης - Ήλιου
 $d = 1,49 \times 10^{11} \text{ m}$.

[Απ: $4,48 \times 10^5 \text{ m}$]

5.36 Στην άκρη μιας ακίνητης βάρκας με μάζα $M = 120 \text{ kg}$ και μήκος $s = 6 \text{ m}$ στέκεται άνθρωπος με μάζα $m = 60 \text{ kg}$. Να υπολογίσετε πόσο θα κινηθεί η βάρκα αν ο άνθρωπος κινηθεί από τη μια άκρη της βάρκας στην άλλη. Οι τριβές μεταξύ βάρκας και νερού θεωρούνται αμελητέες.

[Απ: 2 m]

5.37 Τα καυσαέρια βγαίνουν από ένα πύραυλο που κινείται στο διάστημα με ρυθμό $\frac{dm}{dt} = 140 \text{ kg/s}$

και σχετική ταχύτητα $u=1000\text{ m/s}$ ως προς τον πύραυλο. Να υπολογίσετε την προωστική δύναμη του πυραύλου και την επιτάχυνσή του κάποια χρονική στιγμή που η μάζα του είναι $M=10\text{ ton}$.

[Απ: 140.000 N , 14 m/s^2]

5.38 Ένας πύραυλος ταξιδεύει στο διάστημα και κάποια χρονική στιγμή έχει μάζα 4000 kg , μαζί με τα καύσιμά του. Η ταχύτητα με την οποία εκτοξεύονται τα καυσαέρια είναι 1500 m/s ως προς τον πύραυλο. Πόσα kg καυσαερίων πρέπει να αποβάλλει ανά δευτερόλεπτο ο πύραυλος ώστε να αποκτήσει στιγμιαία επιτάχυνση 15 m/s^2 .

[Απ: 40 kg/s]

Φαινόμενο Doppler

5.39 Με πόση ταχύτητα πρέπει να απομακρύνεται παρατηρητής από μια ακίνητη πηγή ήχου ώστε να ακούει ήχο με συχνότητα ίση με τα εννέα δέκατα της συχνότητας του ήχου που παράγει η πηγή; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι **340 m/s**.

[Απ: 34 m/s]

5.40 Ένας παρατηρητής, που είναι ακίνητος στην άκρη του δρόμου, αντιλαμβάνεται τον ήχο της σειρήνας ενός περιπολικού που πλησιάζει, με συχνότητα **$f_1 = 500 \text{ Hz}$** . Όταν το περιπολικό απομακρύνεται, ο ήχος που ακούει ο παρατηρητής έχει συχνότητα **$f_2 = 450 \text{ Hz}$** . Με ποια

ταχύτητα κινείται το περιπολικό και ποια είναι η πραγματική συχνότητα του ήχου της σειρήνας; Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι **340 m/s**.

[Απ: 17,9 m/s, 473,7 Hz]

Προβλήματα

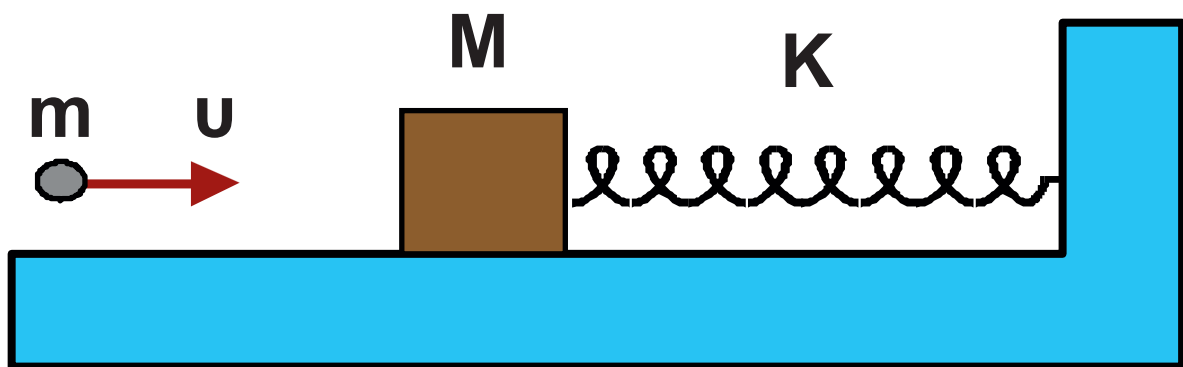
5.41 Μια σφαίρα συγκρούεται ελαστικά με άλλη όμοια σφαίρα που αρχικά ηρεμεί. Δείξτε ότι αν η κρούση δεν είναι κεντρική, μετά την κρούση οι σφαίρες θα κινηθούν σε διευθύνσεις κάθετες μεταξύ τους.

5.42 Ένα βλήμα με μάζα **$m = 50 \text{ g}$** κινείται οριζόντια με ταχύτητα **$u = 200 \text{ m/s}$** και σφηνώνεται σε ξύλο με μάζα **$M = 950 \text{ g}$** που είναι

ακίνητο σε λείο οριζόντιο τραπέζι (σχ. 5.32). Η σταθερά του ελατηρίου είναι $K = 10000 \text{ N/m}$. Να υπολογίσετε:

- α) τη μέγιστη συσπίρωση του ελατηρίου
- β) το ποσοστό της μηχανικής ενέργειας που χάθηκε.

[Απ: 0,1 m, 95%]



Σχήμα 5-32.

5.43 Ένα βλήμα με μάζα $m = 20 \text{ g}$ κινείται οριζόντια και σφηνώνεται σε κομμάτι ξύλου με μάζα $M = 1 \text{ kg}$ το οποίο είναι δεμένο σε κατακόρυφο σκοινί μήκους 1 m . Μετά τη σύγκρουση το νήμα εκτρέπεται από την κατακόρυφο κατά γωνία $\theta = 60^\circ$. Να υπολογιστεί η μηχανική ενέργεια που χάθηκε κατά την κρούση. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 255 J]

5.44 Ένα σώμα με μάζα $m_1 = 20 \text{ kg}$ ισορροπεί σε πλάγιο επίπεδο με κλίση $\varphi = 30^\circ$. Ένα δεύτερο σώμα με μάζα $m_2 = 30 \text{ kg}$ που ανεβαίνει στο πλάγιο επίπεδο, συγκρούεται πλαστικά με το πρώτο έχοντας ταχύτητα $u = 10 \text{ m/s}$. Ο συντελεστής

τριβής ολίσθησης μεταξύ συσσωματώματος και επιπέδου είναι $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Να υπολογίσετε το διάστημα που διανύει το συσσωμάτωμα μέχρι να σταματήσει. Θα επιστρέψει το συσσωμάτωμα στη βάση του πλάγιου επιπέδου; Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 1,8 m, όχι]

5.45 Από την κορυφή πλάγιου επιπέδου, που έχει μήκος $s = 4,2 \text{ m}$ και σχηματίζει με το οριζόντιο επίπεδο γωνία $\varphi = 30^\circ$ αφήνεται να ολισθήσει σώμα με μάζα $m = 1 \text{ kg}$, χωρίς τριβή. Κατά την κάθοδό του και ενώ έχει διανύσει διάστημα $s_1 = 1,6 \text{ m}$ συναντά ακίνητο σώμα της ίδιας μάζας

και συγκρούεται πλαστικά με αυτό. Το συσσωμάτωμα που δημιουργείται από την κρούση ολισθαίνει στο πλάγιο επίπεδο και φτάνει στη βάση του με μηδενική ταχύτητα. Να υπολογίσετε:

α) το συντελεστή τριβής ολίσθησης του συσσωματώματος με το πλάγιο επίπεδο.

β) τη συνολική θερμότητα που παράχθηκε κατά τη διάρκεια του φαινομένου.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: $\frac{5\sqrt{3}}{13}$, 34J]

5.46 Αερόστατο μάζας M αιωρείται (ισορροπεί) σε ύψος H από το έδαφος. Από το αερόστατο κρέμεται μια ανεμόσκαλα που φτάνει μέχρι το έδαφος. Στο κάτω

άκρο της ανεμόσκαλας στέκει ένας άνθρωπος με μάζα m .

Αν ο άνθρωπος αρχίσει να σκαρφλώνει, υπολογίστε πόσο θα κατέβει το αερόστατο μέχρι να φτάσει σ' αυτό. Δίνονται M , m , H .

[Απ: $H \frac{m}{m+M}$]

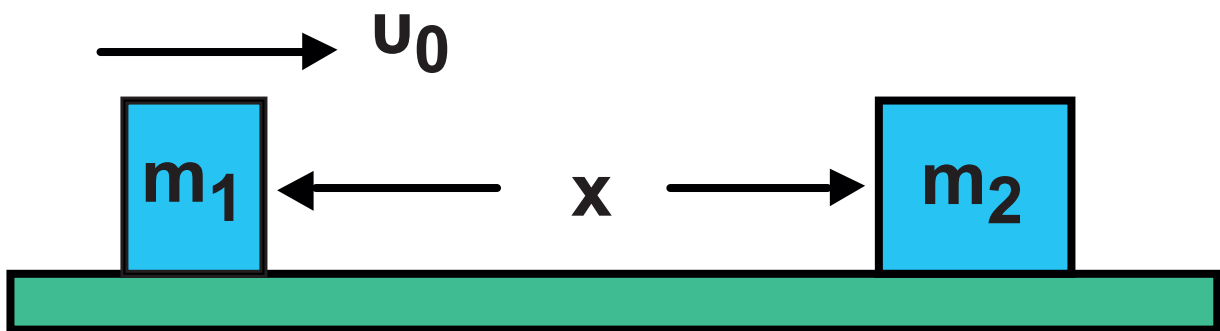
5.47 Σώμα μάζας m_1 έχει ταχύτητα u_0 και προσκρούει σε ακίνητο σώμα μάζας $m_2=2m_1$ που βρίσκεται σε απόσταση $x=1\text{ m}$ (σχ. 5.33). Μετά την κρούση, που είναι ελαστική, το πρώτο σώμα επιστρέφει και σταματά στην αρχική του θέση. Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης των δυο σωμάτων με το δάπεδο είναι $\mu = 0,5$. Να υπολογίσετε:

α) την αρχική ταχύτητα u_0 του πρώτου σώματος.

β) το διάστημα που θα διανύσει το δεύτερο σώμα μέχρι να σταματήσει.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 10 m/s , 4 m]

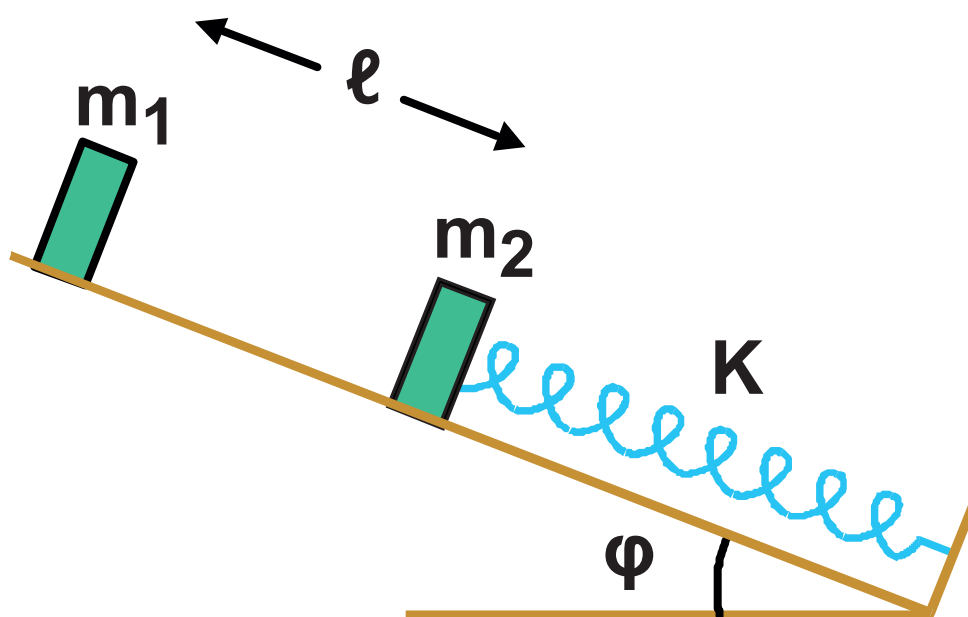


Σχήμα 5-33.

5.48 Ελατήριο σταθεράς $K = 200 \text{ N/m}$ βρίσκεται πάνω σε λείο πλάγιο επίπεδο, με κλίση $\varphi = 30^\circ$ όπως στο [σχήμα 5.34](#) Στο πάνω άκρο του ελατηρίου ισορροπεί σώμα με μάζα $m_2 = 1 \text{ kg}$ ενώ το κάτω άκρο του είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Από το σημείο **A** που απέχει απόσταση $\ell = 4 \text{ m}$

από το m_2 αφήνεται να ολισθήσει σώμα μάζας $m_1 = \frac{m_2}{3}$. Το m_1 κατεβαίνοντας συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με το m_2 . Να υπολογιστεί σε πόση απόσταση από το σημείο της σύγκρουσης οι ταχύτητες των m_1 και m_2 στιγμιαία θα μηδενιστούν. Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 1m , $\sqrt{5} \times 10^{-1}\text{m}$]



Σχήμα 5-34.

5.49 Το σώμα Σ_2 του σχήματος 5.35 έχει μάζα $m_2 = 4 \text{ kg}$ και βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Πάνω στο Σ_2 βρίσκεται δεύτερο σώμα Σ_1 που έχει μάζα $m_1 = 950 \text{ g}$. Το επίπεδο επαφής των σωμάτων Σ_1, Σ_2 είναι οριζόντιο και ο συντελεστής τριβής μεταξύ τους είναι $\mu = 0,5$. Στο Σ_1 σφηνώνεται ένα βλήμα, μάζας $m_B = 50 \text{ g}$ που κινείται με οριζόντια ταχύτητα $v_B = 100 \text{ m/s}$. Η χρονική διάρκεια της κρούσης του βλήματος με το σώμα Σ_1 θεωρείται αμελητέα.

α) Ποια είναι η κοινή ταχύτητα που αποκτούν τα σώματα Σ_1, Σ_2 ;

β) Πόση, συνολικά, θερμότητα μεταφέρεται στο περιβάλλον;

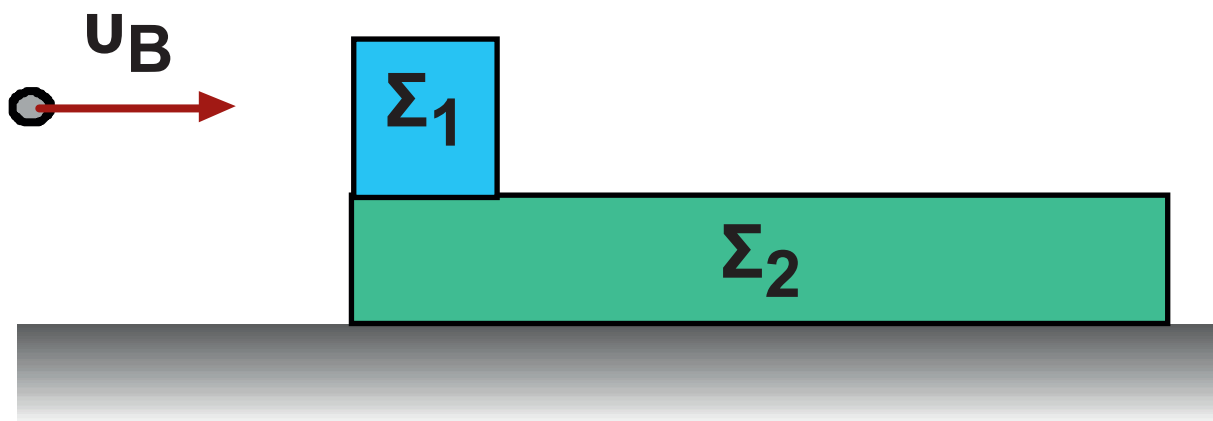
γ) Μετά από πόσο χρόνο από

τη στιγμή της κρούσης τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αποκτούν κοινή ταχύτητα;

δ) Πόσο μετακινήθηκε το Σ_1 πάνω στο σώμα Σ_2 μέχρι τη στιγμή αυτή;

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

[Απ: 1 m/s, 247,5 J, 0,8 s, 2 m]



Σχήμα 5-35.

5.50 Σε οριζόντιο δρόμο κινείται άνθρωπος με ταχύτητα u_1 κρατώντας ομπρέλα, για να προφυλαχτεί από τη βροχή που πέφτει κατακόρυφα με ταχύτητα u_2 . Ποια είναι η κατάλληλη θέση της ομπρέλας για τη μεγαλύτερη δυνατή κάλυψη;

[Απ: $\varepsilon\varphi\theta = \frac{u_2}{u_1}$]

5.51 Ένας μοτοσυκλετιστής που βρίσκεται σε απόσταση $d = 400\text{ m}$ από μια ακίνητη ηχητική πηγή συχνότητας 540 Hz αρχίζει να κινείται προς αυτή με σταθερή επιτάχυνση. Η συχνότητα του ήχου που αντιλαμβάνεται τη στιγμή που φτάνει στην πηγή είναι $603,5\text{ Hz}$. Να υπολογίσετε την επιτάχυνσή του και να παραστήσετε γραφικά τη συχνότητα

που αντιλαμβάνεται ο μοτοσυκλετιστής σε συνάρτηση με το χρόνο. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι **340 m/s**.

[Απ: **2 m/s²**]

5.52 Μια ηχητική πηγή κινείται με ταχύτητα **8 km/h** και εκπέμπει ήχο συχνότητας **400 Hz**. Ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα **54 km/h**, ακολουθεί την ηχητική πηγή. Να υπολογίσετε τη συχνότητα που ακούει ο παρατηρητής. Δίνεται η ταχύτητα του ήχου **340 m/s**.

[Απ: **415 Hz**]

5.53 Σιδηροδρομικός υπάλληλος βρίσκεται στη μέση μιας γέφυρας με μήκος **1000 m**, όταν βλέπει

σε απόσταση **1500 m** μια αμαξοστοιχία, να πλησιάζει σφυρίζοντας. Η συχνότητα του ήχου που ακούει είναι **360 Hz** ενώ ξέρει ότι η πραγματική συχνότητα είναι **340 Hz**. Για να αποφύγει τον κίνδυνο κινείται ισοταχώς και καταφέρνει να φτάσει στην άκρη της γέφυρας, τη στιγμή που φτάνει και η αμαξοστοιχία. Υπολογίστε τη συχνότητα του ήχου που άκουγε ο υπάλληλος στη διάρκεια της κίνησής του. Η ταχύτητα του ήχου στον αέρα είναι **340 m/s**.

[Απ: **355 Hz**]

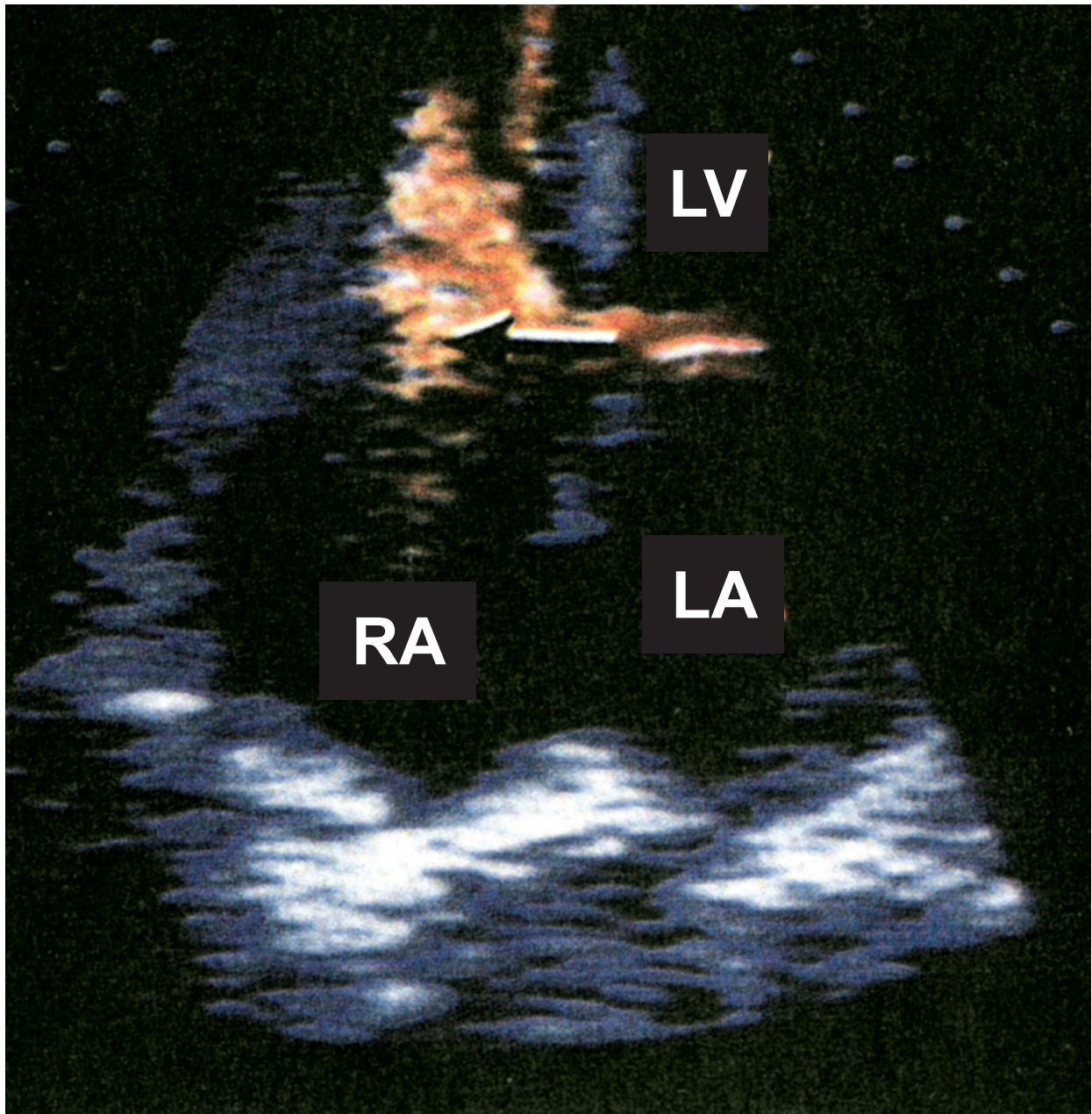
ΕΝΘΕΤΟ

Ηχοκαρδιογραφία Doppler

Οι γιατροί χρησιμοποιούν τους υπέρηχους για διαγνωστικούς σκοπούς. Οι υπέρηχοι είναι ήχοι με συχνότητα πάνω από **20.000 Hz**. Το ανθρώπινο αφτί δε μπορεί να αντιληφθεί τέτοιες συχνότητες. Οι υπέρηχοι που χρησιμοποιούνται στην ιατρική έχουν συχνότητα κοντά στα **2 MHz**.

Οι υπέρηχοι έχουν τη δυνατότητα να σχηματίζουν στενές δέσμες, υπακούουν στους νόμους της ανάκλασης και της διάθλασης και μπορούν να ανακλώνται σε εμπόδια πολύ μικρών διαστάσεων. Τα εμπόδια αυτά μπορεί να είναι σταθερά (π.χ. τα τοιχώματα των αγγείων, ένας λίθος στη

χοληδόχο κύστη κ.λπ.) ή κινητά (π.χ. τα ερυθρά αιμοσφαίρια).



Δύο διαστάσεων υπερηχογράφημα Doppler με χρωματική χαρτογράφηση ροής ενός ασθενούς με έμφρακτο μεσοκοιλιακού διαφράγματος.

Η ανώμαλη ροή (βέλος) διακρίνεται σαν πορτοκαλόχρους πίδακας με ροή από την αριστερή κοιλία προς την δεξιά πλευρά της καρδιάς.
RA = δεξιός κόλπος, LA = αριστερός κόλπος.
Εικόνα 5-10.

Στην ηχοκαρδιογραφία Doppler οι υπέρηχοι ανακλώνται σε κινητά εμπόδια. Όταν μια δέσμη υπέρηχων συναντήσει ένα εμπόδιο, ένα μέρος της ενέργειας που μεταφέρει ανακλάται, επιστρέφει δηλαδή στο αρχικό μέσο. Αν η ανάκλαση γίνει πάνω σε ακίνητο εμπόδιο το κύμα που επιστρέφει έχει την ίδια συχνότητα με το αρχικό κύμα. Αν όμως η ανάκλαση γίνει σε κινητό εμπόδιο η συχνότητα του ανακλώμενου κύματος θα είναι μικρότερη ή μεγαλύτερη

από την αρχική συχνότητα, ανάλογα με το αν το εμπόδιο απομακρύνεται ή πλησιάζει τη διάταξη που καταγράφει την ανακλώμενη δέσμη. Η διαφορά των συχνοτήτων της δέσμης που επιστρέφει και της αρχικής δέσμης - λέγεται συχνότητα Doppler. Η συχνότητα αυτή συνδέεται με τη συχνότητα της αρχικής δέσμης και την ταχύτητα του εμποδίου με τη σχέση

$$f_{\delta} = 2 f_t \frac{u \sin \theta}{c}$$

όπου f_t η συχνότητα της αρχικής δέσμης, u η ταχύτητα των αιμοσφαιρίων, c η ταχύτητα διάδοσης των υπέρηχων και θ η γωνία που σχηματίζει η ταχύτητα του εμποδίου με τον άξονα της δέσμης.

Από τη σχέση αυτή φαίνεται ότι είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ταχύτητας του εμποδίου αν είναι γνωστή η ταχύτητα διάδοσης του ήχου, η συχνότητα Doppler και η γωνία θ . Για την τελευταία, επειδή στη σχέση υπεισέρχεται το συνημίτονό της, να θυμηθούμε ότι για μικρές τιμές της γωνίας ($\theta < 20^\circ$) το συνημίτονο παίρνει τιμές που προσεγγίζουν τη μονάδα.

Έτσι, είναι δυνατός ο προσδιορισμός της ταχύτητας των ερυθρών αιμοσφαιρίων και επομένως η ταχύτητα ροής του αίματος στα αιμοφόρα αγγεία. Αν, με άλλη μέθοδο, προσδιοριστεί και η διατομή A του αγγείου είναι δυνατό να προσδιοριστεί η παροχή του αγγείου από την οποία συνάγονται συμπεράσματα για τη λειτουργία της καρδιάς.

Ο προσδιορισμός της παροχής γίνεται σε μεγάλης διατομής αγγεία, όπου η ροή του αίματος μπορεί να θεωρηθεί στρωτή και η ταχύτητα όλων των αιμοσφαιρίων ίδια. Στα αγγεία μικρής διατομής η ταχύτητα της κεντρικής ρευματικής γραμμής είναι σημαντικά μεγαλύτερη από την ταχύτητα που αντιστοιχεί σε σημεία κοντά στα τοιχώματα του αγγείου.

Μέσω της ηχοκαρδιογραφίας Doppler είναι δυνατός ο άμεσος προσδιορισμός της διαφοράς πίεσης (ή αλλιώς της βαθμίδας πίεσης) σε περιοχές που τα αγγεία παρουσιάζουν στενώσεις. Στην περίπτωση αυτή η ροή γίνεται τυρβώδης και η ταχύτητα του αίματος πριν τη στένωση και μετά από αυτή δεν είναι ίδια.

Πίνακες Σταθερών - Χρήσιμα Μεγέθη

Θεμελιώδεις Φυσικές Σταθερές

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Ταχύτητα του φωτός	c	$3 \times 10^8 \text{ m/s}$
Φορτίο ηλεκτρονίου (απόλυτη τιμή)	e	$1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Βαρυτική σταθερά (σταθερά της παγκόσμιας έλξης)	G	$6,67 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2/\text{Kg}^2$
Σταθερά Planck	h	$6,626 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s}$
Σταθερά Boltzmann	k	$1,38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
Σταθερά Avogadro	N _A	$6,023 \times 10^{23} \text{ μόρια/mol}$
Σταθερά των αερίων	R	$8,314 \text{ J/mol}\cdot\text{K}$
Μάζα ηλεκτρονίου	m _e	$9,1 \times 10^{-31} \text{ Kg}$

Όνομα	Σύμβολο	Τιμή
Μάζα νετρονίου	m_n	$1,675 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
Μάζα πρωτονίου	m_p	$1,673 \times 10^{-27} \text{ Kg}$
Διηλεκτρική σταθερά του κενού	ϵ_0	$8,85 \times 10^{-12} \text{ C}^2 / \text{N} \cdot \text{m}^2$
Σταθερά Coulomb	K_C	$9 \times 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{C}^2$
Μαγνητική διαπερατότητα του κενού	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ Wb} / \text{A} \cdot \text{m}$

Άλλες Χρήσιμες Σταθερές

Μηχανικό ισοδύναμο της θερμότητας

4,186 J/cal

Κανονική ατμοσφαιρική πίεση

1 atm $1,013 \times 10^5$ Pa (N/m²)

Απόλυτο μηδέν

0 K -273 °C

Ηλεκτρονιοβόλτ

1 eV $1,6 \times 10^{-19}$ J

Ενέργεια ηρεμίας ηλεκτρονίου

mc² 0,511 MeV

Γραμμομοριακός όγκος ιδανικού αερίου (0°C, 1 atm)

V_{mol} 22,4 L/mol

Λεξιλόγιο Όρων

A

αδρανειακό σύστημα: σύστημα αναφοράς στο οποίο ισχύει η αρχή της αδράνειας του Newton.

αεροδύναμη: η δύναμη που δέχεται από τον αέρα η πτέρυγα του αεροπλάνου κατά τη διάρκεια της πτήσης του.

αιθέρας: υποθετικό αβαρές ελαστικό μέσο, η παρουσία του οποίου θεωρήθηκε απαραίτητη για τη διάδοση του φωτός.

ακτίνες Röntgen: ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-8} και 10^{-13} m. Είναι αποτέλεσμα της επιβράδυνσης των ηλεκτρονίων

που προσπίπτουν σε μεταλλικές επιφάνειες με μεγάλη ταχύτητα ή της αποδιέγερσης των ατόμων του μετάλλου.

ακτίνες γ : ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος μεταξύ 10^{-10} και 10^{-14} m. Εκπέμπονται από πυρήνες ραδιενεργών στοιχείων.

ακτίνες X: οι ακτίνες Roentgen.

ακτινοβολία: ενέργεια που εκπέμπεται με μορφή ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων.

αμορτισέρ: μηχανισμός που χρησιμοποιείται για την απόσβεση των ταλαντώσεων των αυτοκινήτων.

ανάκλαση κύματος: το φαινόμενο κατά το οποίο όταν το κύμα συναντήσει τη διαχωριστική επιφάνεια δυο μέσων επιστρέφει στο πρώτο μέσο ακολουθώντας ορισμένο δρόμο.

άξονας περιστροφής (στερεού σώματος): η ευθεία που ενώνει τα σημεία τα οποία παραμένουν ακίνητα κατά την περιστροφή του σώματος.

απεριοδική ταλάντωση: η κίνηση ενός ταλαντωτή ο οποίος δεν υπερβαίνει τη θέση ισορροπίας, λόγω ισχυρών αποσβέσεων.

απομάκρυνση: η απόσταση σώματος που ταλαντώνεται, από τη θέση ισορροπίας.

αρμονική ταλάντωση: η ταλάντωση στην οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή είναι αρμονική συνάρτηση του χρόνου.

αρχική φάση: η τιμή που έχει τη χρονική στιγμή μηδέν η φάση ενός μεγέθους που μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας: η θεωρία της σχετικότητας που συμπεριλαμβάνει και μη αδρανειακά συστήματα - θεωρία για τη βαρύτητα.

γωνία εκτροπής: η γωνία που σχηματίζει με την αρχική της διεύθυνση η μονοχρωματική δέσμη που βγαίνει από μια οπτική διάταξη.

γωνιακή συχνότητα: μέγεθος που χαρακτηρίζει τα περιοδικά φαινόμενα, ανάλογο προς τη συχνότητα. Στην ομαλή κυκλική κίνηση συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού): ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό προς την ταχύτητά του στο υλικό αυτό.

δεσμός στάσιμου κύματος: ένα σημείο που παραμένει ακίνητο όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει δημιουργείται στάσιμο κύμα.

δευτέριο: ισότοπο του υδρογόνου με μαζικό αριθμό δύο.

διάθλαση κύματος: η αλλαγή πορείας ενός κύματος κατά τη μετάβασή του από ένα μέσο σε ένα άλλο στο οποίο διαδίδεται με διαφορετική ταχύτητα.

διακρότημα: η αυξομείωση του πλάτους της ταλάντωσης που εκτελεί ένα σώμα όταν μετέχει σε δυο ταλαντώσεις της ίδιας διεύθυνσης, που έχουν το ίδιο πλάτος και συχνότητες που παρουσιάζουν μικρή διαφορά.

διάμηκες κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται στη διεύθυνση της διάδοσής του.

διαμόρφωση πλάτους (AM): η τροποποίηση του πλάτους του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διαμόρφωση συχνότητας (FM): η τροποποίηση της συχνότητας του ηλεκτρομαγνητικού κύματος που εκπέμπει ο σταθμός, από το μικροφωνικό ρεύμα.

διασκεδασμός (του φωτός): η εξάρτηση του δείκτη διάθλασης ενός υλικού από το μήκος κύματος.

διαστολή του χρόνου: Η φαινομενική επιβράδυνση του χρόνου

(αύξηση του χρονικού διαστήματος)
σε σώμα που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

δίδυμη γένεση: η μετατροπή ενός φωτονίου σε ζεύγος ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου.

διέγερση (ατόμου): η μετάβαση ενός ηλεκτρονίου του ατόμου σε στιβάδα με ενέργεια μεγαλύτερη από την αρχική.

διεγέρτης: το σώμα που προκαλεί εξαναγκασμένη ταλάντωση ενός ταλαντωτή- που προσφέρει περιοδικά ενέργεια σε ένα σώμα που ταλαντώνεται.

δύναμη επαναφοράς: η δύναμη που αναγκάζει ένα σώμα να ταλαντώνεται- που τείνει να επαναφέρει το σώμα στη θέση ισορροπίας.

δυναμική άνωση: η συνιστώσα της αεροδύναμης η κάθετη στην ταχύτητα.

Ε

εγκάρσιο κύμα: το κύμα στο οποίο τα μόρια του ελαστικού μέσου ταλαντώνονται κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσής του.

ειδική θεωρία της σχετικότητας: θεωρία που διατύπωσε ο Einstein για αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Βασικές της παραδοχές είναι: α) η ταχύτητα του φωτός είναι ανεξάρτητη από τη ταχύτητα του παρατηρητή, β) οι νόμοι της φυσικής είναι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα.

έκκεντρη κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε παράλληλες ευθείες.

ελαστική κρούση: η κρούση κατά την οποία διατηρείται η μηχανική ενέργεια του συστήματος των σωμάτων.

ελεύθερη ταλάντωση: η ταλάντωση ενός σώματος το οποίο εκτρέπεται από τη θέση ισορροπίας και αφήνεται ελεύθερο.

έλλειμμα μάζας: η διαφορά της μάζας ενός πυρήνα από τη μάζα των συστατικών του.

ενέργεια σύνδεσης (πυρήνα): το ποσό της ενέργειας που πρέπει να προσφερθεί στον πυρήνα για να διασπαστεί στα συστατικά του.

ενέργεια ηρεμίας: το ποσό της ενέργειας (mc^2) που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

ένταση ακτινοβολίας: η ενέργεια που περνάει από τη μονάδα επιφάνειας στη μονάδα του χρόνου.

εξαναγκασμένη ταλάντωση: η ταλάντωση που γίνεται με την περιοδική προσφορά ενέργειας στο ταλαντούμενο σύστημα.

εξίσωση κύματος: η σχέση που δίνει την απομάκρυνση των σημείων του μέσου στο οποίο διαδίδεται το κύμα κάθε χρονική στιγμή.

εξίσωση συνέχειας: η σχέση μεταξύ της ταχύτητας ενός ασυμπύεστου ρευστού και της διατομής του σωλήνα στον οποίο κινείται.

εσωτερική τριβή ρευστού: η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ των μορίων του ρευστού λόγω της κίνησής του.

έργο εξαγωγής: η ελάχιστη ενέργεια που πρέπει να πάρει ένα ηλεκτρόνιο για να εγκαταλείψει την επιφάνεια ενός μετάλλου.

H

ηλεκτρική ταλάντωση: εναλλασσόμενο ρεύμα μεγάλης συχνότητας που παίρνουμε από κύκλωμα LC όταν φορτίσουμε τον πυκνωτή.

ηλεκτρομαγνητικό κύμα: η ταυτόχρονη διάδοση ενός ηλεκτρικού και ενός μαγνητικού πεδίου στο χώρο.

I

ιδιομήκος (αντικειμένου): βλ. «μήκος ηρεμίας».

ιδιόχρονος (αδρανειακού συστήματος): ο χρόνος που μετράει ένα ρολόι ακίνητο σε ένα αδρανειακό σύστημα.

ιξώδες: η εσωτερική τριβή μεταξύ των μορίων ενός ρευστού-συντελεστής που δείχνει πόσο παχύρρευστο είναι ένα υγρό.

Κ

κβαντισμένο μέγεθος: κάθε μέγεθος που παίρνει διακριτές τιμές που είναι πολλαπλάσια μιας ελάχιστης.

κέντρο μάζας (σώματος): το σημείο στο οποίο μπορεί να θεωρηθεί συγκεντρωμένη όλη η μάζα ενός σώματος.

κοιλία στάσιμου κύματος: ένα σημείο που ταλαντώνεται με το μέγιστο πλάτος, όταν στο ελαστικό μέσο στο οποίο ανήκει σχηματίζεται στάσιμο κύμα.

κρίσιμη γωνία: η μέγιστη τιμή της γωνίας πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια δύο διαφανών υλικών για την οποία το φως περνάει από το πρώτο υλικό στο δεύτερο στο οποίο το φως διαδίδεται με μεγαλύτερη ταχύτητα.

κρούση κεντρική: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται στην ίδια ευθεία.

κύμα μηχανικό: μια διαταραχή που μεταδίδεται σε ένα ελαστικό μέσο.

κυματοπακέτο: κύμα περιορισμένο στο χώρο.

M

μάζα ηρεμίας: η μάζα που έχει ένα σώμα όταν ηρεμεί.

μέλαν σώμα: σώμα που απορροφά όλες τις ακτινοβολίες που πέφτουν πάνω του.

μετασχηματισμοί Lorentz: οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης και χρόνου ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση.

μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου:

οι σχέσεις που συνδέουν τις συντεταγμένες της θέσης ενός σώματος σε δυο αδρανειακά συστήματα αναφοράς που κινούνται με ταχύτητα πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

μεταφορική κίνηση (στερεού σώματος): η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του σώματος έχουν την ίδια ταχύτητα.

μήκος ηρεμίας (αντικειμένου): το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο ηρεμεί.

μήκος κύματος De Broglie: το μήκος του κύματος που αντιστοιχεί σε ένα σωματίδιο.

μήκος κύματος: η απόσταση στην οποία φτάνει το κύμα σε χρόνο μιας

περιόδου- η μικρότερη απόσταση δύο σημείων, στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος, που βρίσκονται σε φάση.

μικροκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα με μήκη κύματος μεταξύ **1mm** και **30cm**. Χρησιμοποιούνται στα ραντάρ.

μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας: όργανο που επιτρέπει να απεικονίσουμε αγώγιμες επιφάνειες σε ατομική κλίμακα. Η λειτουργία του βασίζεται στο φαινόμενο σήραγγας.

N

νευτώνεια ρευστά: τα ρευστά στα οποία η εσωτερική τριβή είναι γραμμική συνάρτηση της ταχύτητας ροής.

Ο

ολική εσωτερική ανάκλαση: η ανάκλαση μιας φωτεινής δέσμης που δε συνοδεύεται από διάθλαση. Γίνεται στην επιφάνεια που διαχωρίζει ένα διαφανές μέσον από ένα άλλο με μικρότερο δείκτη διάθλασης, όταν η γωνία πρόσπτωσης είναι μεγαλύτερη από την κρίσιμη γωνία.

ορμή (υλικού σημείου): το διάνυσμα που έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας και μέτρο ίσο με το γινόμενο της μάζας του υλικού σημείου επί το μέτρο της ταχύτητάς του.

ουράνιο τόξο: το φωτεινό τόξο που εμφανίζεται στον ουρανό, ως αποτέλεσμα της ανάκλασης και του διασκεδασμού του ηλιακού φωτός στα σταγονίδια της βροχής.

Π

poise (πουάζ): μονάδα μέτρησης του ιξώδους ενός ρευστού, ισοδύναμη με 10^{-1}Nsm^{-2} .

παροχή (σωλήνα ή ρευματικής φλέβας): το πηλίκο του όγκου dV του ρευστού που περνάει από μια διατομή του σωλήνα (ή της φλέβας) σε χρόνο dt προς το χρόνο αυτό.

περίοδος (φαινομένου): το πηλίκο του χρόνου μέσα στον οποίο ολοκληρώνονται N εναλλαγές του φαινομένου με τον αριθμό N - ο χρόνος ανάμεσα σε δυο διαδοχικές όμοιες φάσεις του φαινομένου.

πλάγια κρούση: η κρούση σωμάτων που οι ταχύτητές τους βρίσκονται σε τυχαία διεύθυνση.

πλαστική κρούση: η κρούση που οδηγεί στη συγκόλληση των σωμάτων.

ποζιτρόνιο: το αντισωματίδιο του ηλεκτρονίου - σωματίδιο με μάζα ίση με τη μάζα του ηλεκτρονίου και φορτίο $+e$.

πυρηνική σύντηξη: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας πυρήνες μικρού ατομικού αριθμού συντήκονται και δίνουν βαρύτερους πυρήνες, με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνική σχάση: πυρηνική αντίδραση στη διάρκεια της οποίας ένας πυρήνας μεγάλου ατομικού αριθμού χωρίζεται σε δυο πυρήνες μικρότερου ατομικού αριθμού με ταυτόχρονη έκλυση ενέργειας.

πυρηνικός αντιδραστήρας: η διάταξη στην οποία πραγματοποιούνται ελεγχόμενες πυρηνικές αντιδράσεις.

P

ραδιοκύματα: ηλεκτρομαγνητικά κύματα που προκύπτουν από ταλαντούμενα ηλεκτρικά δίπολα και χρησιμοποιούνται στις τηλεπικοινωνίες.

ρευματική γραμμή: η γραμμή που συνδέει τις διαδοχικές θέσεις ενός μορίου του ρευστού.

ρευστά: σώματα που δεν έχουν δικό τους σχήμα-τα υγρά και τα αέρια.

ροπή αδράνειας (ως προς άξονα): το μέτρο της αδράνειας των σωμάτων στη στροφική κίνηση- ορίζεται ως το άθροισμα $\sum m_i \cdot r_i^2$, όπου m_i μια στοιχειώδης μάζα του σώματος και r_i η απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς άξονα):
διάνυσμα που έχει τη διεύθυνση του άξονα και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της συνιστώσας της δύναμης που βρίσκεται σε επίπεδο κάθετο στον άξονα επί την απόστασή της από τον άξονα.

ροπή δύναμης (ως προς σημείο):
διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζει το σημείο και ο φορέας της δύναμης και μέτρο το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί την απόσταση του σημείου από τον φορέα της δύναμης.

Σ

σταθερά απόσβεσης: η σταθερά αναλογίας στη σχέση που συνδέει τη δύναμη η οποία προκαλεί την απόσβεση μιας ταλάντωσης με την ταχύτητα του ταλαντωτή.

στάσιμο κύμα: η κίνηση που κάνει ένα μέσο στο οποίο διαδίδονται ταυτόχρονα, με αντίθετη φορά, δυο κύματα της ίδιας συχνότητας και του ίδιου πλάτους.

στιγμιότυπο κύματος: η εικόνα που παρουσιάζει μια χρονική στιγμή το ελαστικού μέσο στο οποίο διαδίδεται ένα κύμα - η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = f(x, t)$ για ορισμένη τιμή του t .

στρόβιλοι: περιοχές στις οποίες το ρευστό κάνει περιστροφική κίνηση.

στροφική κίνηση: η κίνηση ενός στερεού γύρω από άξονα- η κίνηση στην οποία όλα τα σημεία του στερεού έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

στροφορμή στερεού σώματος: το άθροισμα των στροφορμών των στοιχειωδών τμημάτων που απαρτίζουν το στερεό.

στροφορμή συστήματος σωμάτων: το άθροισμα των στροφορμών των σωμάτων που απαρτίζουν το σύστημα.

στροφορμή υλικού σημείου (που κάνει κυκλική κίνηση): διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο της τροχιάς με μέτρο το γινόμενο του μέτρου της ορμής του υλικού σημείου επί την ακτίνα της τροχιάς του.

στρωτή ροή: η κίνηση ενός ρευστού, όταν δε σχηματίζονται στρόβιλοι.

συμβολή κυμάτων: η ταυτόχρονη διάδοση δυο ή περισσότερων κυμάτων στην ίδια περιοχή του χώρου.

συμβολόμετρο: όργανο που μας επιτρέπει να προσδιορίζουμε με μεγάλη ακρίβεια τη θέση των κροσσών συμβολής του φωτός.

σύνθεση ταλαντώσεων: η μελέτη της κίνησης ενός σώματος που μετέχει σε περισσότερες από μια ταλαντώσεις.

συντονισμός: το φαινόμενο κατά το οποίο ένα σώμα κάνει εξαναγκασμένη ταλάντωση με το μέγιστο πλάτος.

συστολή του μήκους: Η φαινομενική σμίκρυνση ενός σώματος που κινείται με σχετικιστική ταχύτητα.

συχνότητα κατωφλίου: η ελάχιστη συχνότητα που πρέπει να έχει μια φωτεινή δέσμη για να προκαλέσει εκπομπή φωτοηλεκτρονίων από ένα μέταλλο.

συχνότητα (φαινομένου): ο αριθμός των επαναλήψεων του φαινομένου στη μονάδα του χρόνου.

Τ

ταλάντωση (μηχανική): Παλινδρομική κίνηση γύρω από μια θέση ισορροπίας.

πλάτος ταλάντωσης: η μεγαλύτερη τιμή της απομάκρυνσης του ταλαντωτή.

τάση αποκοπής: η τιμή της τάσης μεταξύ των ηλεκτροδίων ενός φωτοκύτταρου για την οποία διακόπτεται το ρεύμα.

τυρβώδης ροή: η ροή ενός ρευστού όταν σχηματίζονται στρόβιλοι.

Υ

υδροστατική πίεση: η πίεση των υγρών που οφείλεται στο βάρος τους.

υπεριώδης ακτινοβολία: αόρατη ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία με μήκη κύματος από **60 nm** μέχρι **380 nm**.

Φ

φαινόμενο Compton: ο σκεδασμός της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας από τα σωματίδια της ύλης. Συνοδεύεται από αύξηση του μήκους κύματος της ακτινοβολίας.

φαινόμενο Doppler: η εμφάνιση διαφοράς ανάμεσα στη συχνότητα του εκπεμπόμενου κύματος και της συχνότητας που αντιλαμβάνεται ένας παρατηρητής όταν μεταβάλλεται η απόστασή του από την πηγή του κύματος.

φαινόμενο σήραγγας: η διέλευση σωματιδίων μέσα από ένα φράγμα δυναμικού χωρίς να έχουν την απαραίτητη ενέργεια, όπως απαιτεί η κλασική θεωρία.

φωτοηλεκτρικό φαινόμενο: η απόσπαση ηλεκτρονίων από ένα μέταλλο όταν στην επιφάνειά του

προσπίπτει ηλεκτρομαγνητική ακτινοβολία κατάλληλης συχνότητας.

φλέβα: το σχήμα που ορίζεται από τις ρευματικές γραμμές που αντιστοιχούν στα σημεία του περιγράμματος μιας επιφάνειας που βρίσκεται στη ροή του ρευστού.

φώραση: η διαδικασία με την οποία διαχωρίζεται το μικροφωνικό ρεύμα από το φέρον κύμα.

φωτοκύτταρο: διάταξη με την οποία οι αυξομειώσεις στην ένταση μιας φωτεινής δέσμης, κατάλληλης συχνότητας, μετατρέπονται σε αυξομειώσεις ηλεκτρικού ρεύματος.

φωτόνιο: το κβάντο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας. Σωματίο μηδενικής μάζας ηρεμίας.

Αλφαβητικό Ευρετήριο

A

αδρανειακό σύστημα	Z' 34
ακτίνες Röntgen	B' 102, Θ' 37
ακτίνες γ	B' 102
ακτίνες X	B' 102, Θ' 37
ακτινοβολία μέλανος σώματος	Θ' 7
ανάκλαση του φωτός	B' 104
ανάλυση του φωτός	Γ' 18
αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας	H' 22
απεριοδική ταλάντωση	A' 71
απομάκρυνση	A' 24
αρμονική ταλάντωση	A' 24
αρχή διατήρησης της στροφορμής	E' 92

αρχή της αβεβαιότητας	Θ' 57
αρχή του Pascal	Δ' 12
αρχική φάση	Α' 30

Γ

γενική θεωρία της σχετικότητας	Η' 104
γωνία εκτροπής	Γ' 20
γωνιακή επιτάχυνση	Ε' 14
γωνιακή συχνότητα	Α' 21

Δ

δείκτης διάθλασης (υλικού)	Β' 112
δεσμός στάσιμου κύματος	Β' 56
διάθλαση του φωτός	Β' 110
διακρότημα	Α' 114, Α' 116
διάμηκες κύμα	Β' 14
διαμόρφωση κατά πλάτος	Β' 83
διασκεδασμός (του φωτός)	Γ' 18

διαστολή του χρόνου	H' 30
διαφορικό	ΣΤ' 103
δίδυμη γένεση	H' 79
διεγέρτης	A' 82
δύναμη επαναφοράς	A' 35

E

εγκάρσιο κύμα	B' 12
έκκεντρη κρούση	Z' 14
ελαστική κρούση	Z' 18, Z' 24
ελεύθερη ταλάντωση	A' 80
έλλειμμα μάζας	H' 78
ενέργεια σύνδεσης	H' 85
ενέργεια ηρεμίας	H' 77
εξαναγκασμένη ταλάντωση (ηλεκτρ.)	A' 94
εξαναγκασμένη ταλάντωση (μηχαν.)	A' 82

εξίσωση Schrödinger	Θ' 69
εξίσωση Bernoulli	Δ' 39
εξίσωση κύματος	Β' 23
εξίσωση στάσιμου κύματος	Β' 53
εξίσωση συνέχειας	Δ' 27
εξωτερικό γινόμενο διανυσμάτων	ΣΤ' 84
επαλληλία κυμάτων	Β' 28
έργο εξαγωγής	Θ' 28
εσωτερική τριβή	Δ' 52

H

ηλεκτρική ταλάντωση	Α' 51
ηλεκτρομαγνητικό κύμα	Β' 65
ηχοκαρδιογράφημα Doppler	Ζ' 139

Θ

θεμελιώδης νόμος στροφικής κίνησης	Ε' 63
---------------------------------------	-------

θεώρημα Steiner	Ε' 56
θεώρημα Torricelli	Δ' 44

I

ιδανικά υγρά	Δ' 19
ιδιομήκος	Η' 44
ιδιοσυχνότητα	Α' 80
ιδιόχρονος	Η' 30
ιξώδες	Δ' 52

K

καμπύλωση του χωροχρόνου	Η' 115
κβαντικός αριθμός	Θ' 17
κέντρο μάζας (συστήματος)	Z' 55
κέντρο μάζας (σώματος)	Ε' 20
κιβώτιο ταχυτήτων	ΣΤ' 93
κίνηση του κέντρου μάζας	Z' 58

κινητική ενέργεια:

- στην αρμονική ταλάντωση	A' 45
- στη στροφική κίνηση	E' 101
κοιλία στάσιμου κύματος	B' 56
κρίσιμη γωνία	Γ' 8
κρούση κεντρική	Z' 13
κύλιση τροχού	E' 17
κύμα ελαστικότητας	B' 8
κυματοπακέτο	Θ' 60
κυματοσυνάρτηση	Θ' 69

M

μάζα ηρεμίας	H' 77
μέλαν σώμα	Θ' 12
μετασχηματισμοί Lorentz	H' 48, H' 60
μετασχηματισμοί έντασης ηλεκτρικού - μαγνητικού πεδίου	H' 91
μετασχηματισμοί του Γαλιλαίου	Z' 49

μεταφορική κίνηση	Ε' 8
μήκος ηρεμίας	Η' 44
μήκος κύματος	Β' 18
μήκος κύματος De Broglie	Θ' 52
μηχανικά κύματα	Β' 8
μικροκύματα	Β' 95
μικροσκόπιο σάρωσης σήραγγας	Θ' 131
μιόνιο	Η' 35

N

νευτώνεια ρευστά	Δ' 57
νόμος μετατόπισης του Wien	Θ' 14
νόμος του Snell	Β' 113

O

ολική εσωτερική ανάκλαση	Γ' 7
ουράνιο τόξο	Γ' 23

Π

poise (πουάζ)	Δ' 56
παράδοξο των διδύμων	Η' 164
παροχή	Δ' 23, Δ' 24
πείραμα Michelson- Morley	Η' 11
περίοδος	Α' 19
περίοδος ηλεκτρικής ταλάντωσης	Α' 58
πηγάδι δυναμικού	
- με άπειρο βάθος	Θ' 80
- με ορισμένο βάθος	Θ' 86
πλάγια κρούση	Z' 14, Z' 25
πλαστική κρούση	Z' 19, Z' 31
πλάτος ταλάντωσης	Α' 25
ποζιτρόνιο	Η' 81
προώθηση πυραύλου	Z' 67

Ρ

ραδιοκύματα	Β' 94
ρευματική γραμμή	Δ' 20

ρευστά	Δ' 19
ροπή αδράνειας (ως προς άξονα)	Ε' 51
ροπή δύναμης (ως προς άξονα)	Ε' 28
ροπή δύναμης (ως προς σημείο)	Ε' 33

Σ

σταθερά απόσβεσης	Α' 68
σταθερά επαναφοράς	Α' 35
στάσιμο κύμα	Β' 48
στιγμιότυπο κύματος	Β' 31
στροφική κίνηση	Ε' 12
στροφορμή στερεού σώματος	Ε' 81
στροφορμή συστήματος	Ε' 86
στροφορμή υλικού σημείου	Ε' 78
στρωτή ροή	Δ' 20
συμβολή κυμάτων	Β' 34

συμβολόμετρο	Η' 14
σύνθεση ταλαντώσεων	Α' 104
σύνθετη κίνηση στερεού	Ε' 14
συνθήκη ισορροπίας στερεού	Ε' 44
συνθήκη κανονικοποίησης	Θ' 72
συντονισμός	Α' 85
συντονισμού εφαρμογές	Α' 97
σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας	Ζ' 55
συστολή του μήκους	Η' 44
συχνότητα	Α' 20
συχνότητα κατωφλίου	Θ' 34
σχετικιστική ορμή	Η' 70
σχετικιστική ενέργεια	Η' 77
σωλήνας	Δ' 22

T

ταλάντωση (μηχανική)	Α' 23
τάση αποκοπής	Θ' 27

Υ

υδροστατική πίεση	Δ' 10
υπέρθεση κυμάτων	Β' 28
υπεριώδης ακτινοβολία	Β' 100

Φ

φαινόμενο Compton	Θ' 37
φαινόμενο Doppler	Ζ' 72
φαινόμενο σήραγγας	Θ' 93
φάση ταλάντωσης	Α' 30
φέρουσα συχνότητα	Β' 82
φθίνουσα ηλεκτρική ταλάντωση	Α' 78
φθίνουσα ταλάντωση	Α' 64
φλέβα ρευματική	Δ' 22
φώραση	Β' 90
φωτοηλεκτρικό φαινόμενο	Θ' 22
φωτοκύτταρο	Θ' 23
φωτόνιο	Θ' 29

Χ

χωροχρόνος	Η' 24
------------	-------

Βιβλιογραφία

1. Πανεπιστημιακή Φυσική Hugh D. Young Εκδόσεις Παπαζήση.
2. Physics for scientists & engineers Serway.
3. Φυσική Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
4. Halliday - Resnick - Walker Fundamentals of Physics Extended (fifth edition).
5. F.J.Keller - W.E.Gettys - M.J.Skove Physics (second edition).
6. Κεφάλαια σύγχρονης Φυσικής Halliday Resnick Εκδόσεις Πνευματικός.
7. Οι έννοιες της Φυσικής Paul G. Hewitt Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

- 8. Εισαγωγή στην Ηλεκτροδυναμική David J. Griffiths
Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**
- 9. Μαθήματα Φυσικής (Ηλεκτρισμός - Μαγνητισμός) πανεπιστήμιο Berkley Edward Purcell
μετάφραση και έκδοση ομάδα καθηγητών ΕΜΠ.**
- 10. Κλασσική και σύγχρονη Φυσική Kenneth W. Ford Εκδόσεις Πνευματικός.**
- 11. Κβαντομηχανική Ι. Στέφανος Τραχανάς Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**
- 12. Η Φυσική σήμερα Ε.Ν. Οικονόμου Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.**

- 13. Η εξέλιξη των ιδεών στη Φυσική Einstein - Infeld Εκδόσεις Δωδώνη.**
- 14. Η ελαφρότητα της Βαρύτητας Jayant Narlikar Εκδόσεις Τροχαλία.**
- 15. Ιστορία της Φυσικής Emilio Segre Εκδόσεις Δίαυλος.**
- 16. Φυσική Β΄ Ενιαίου Λυκείου (ειδίκευση) Υπουργείο Παιδείας Κύπρος.**
- 17. Κ.Δ. Αλεξόπουλος - Δ.Ι. Μαρίνος Γενική Φυσική. Εκδόσεις ΟΛΥΜΠΙΑ.**
- 18. Κβαντικό σύμπαν Tony Hey & Patrick Walters, εκδόσεις Κάτοπτρο.**

- 19. 3000 solved problems in physics
Alvin Halpern, Ph.D Schaum's
Mc Graw Hill.**
- 20. Echocardiography Harvey
Feigenbaum fourth edition Lea
& Febigep.**
- 21. String and sticky tape
experiments by R.D.Edge.**
- 22. Turning the World Inside Out by
Robert Ehrlich.**

Περιεχόμενα

5 Κρούσεις και σχετικές κινήσεις	
Εισαγωγή	6
Κρούσεις	10
Κεντρική ελαστική κρούση δύο σφαιρών	20
Ελαστική κρούση σώματος με άλλο ακίνητο πολύ μεγάλης μάζας	24
Αδρανειακά και μη αδρανειακά συστήματα	34
Σχετική ταχύτητα σε αδρανειακά συστήματα	41
Σύστημα αναφοράς κέντρου μάζας	55
Προώθηση πυραύλου	67

Φαινόμενο Doppler	72
Σύνοψη	90
Δραστηριότητες	96
Ερωτήσεις	100
Ασκήσεις	113
Προβλήματα	126
Ένθετο. Ηχοκαρδιογραφία Doppler	139
Παραρτήματα _____	
Πίνακες Σταθερών	145
Λεξιλόγιο Όρων	149
Αλφαβητικό Ευρετήριο	175
Βιβλιογραφία	186

Βάσει του ν. 3966/2011 τα διδακτικά βιβλία του Δημοτικού, του Γυμνασίου, του Λυκείου, των ΕΠΑ.Λ. και των ΕΠΑ.Σ. τυπώνονται από το ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ και διανέμονται δωρεάν στα Δημόσια Σχολεία. Τα βιβλία μπορεί να διατίθενται προς πώληση, όταν φέρουν στη δεξιά κάτω γωνία του εμπροσθόφυλλου ένδειξη «ΔΙΑΤΙΘΕΤΑΙ ΜΕ ΤΙΜΗ ΠΩΛΗΣΗΣ». Κάθε αντίτυπο που διατίθεται προς πώληση και δεν φέρει την παραπάνω ένδειξη θεωρείται κλεψίτυπο και ο παραβάτης διώκεται σύμφωνα με τις διατάξεις του άρθρου 7 του νόμου 1129 της 15/21 Μαρτίου 1946 (ΦΕΚ 1946,108, Α').

Απαγορεύεται η αναπαραγωγή οποιουδήποτε τμήματος αυτού του βιβλίου, που καλύπτεται από δικαιώματα (copyright), ή η χρήση του σε οποιαδήποτε μορφή, χωρίς τη γραπτή άδεια του Υπουργείου Παιδείας, Έρευνας και Θρησκευμάτων / ΙΤΥΕ - ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ.